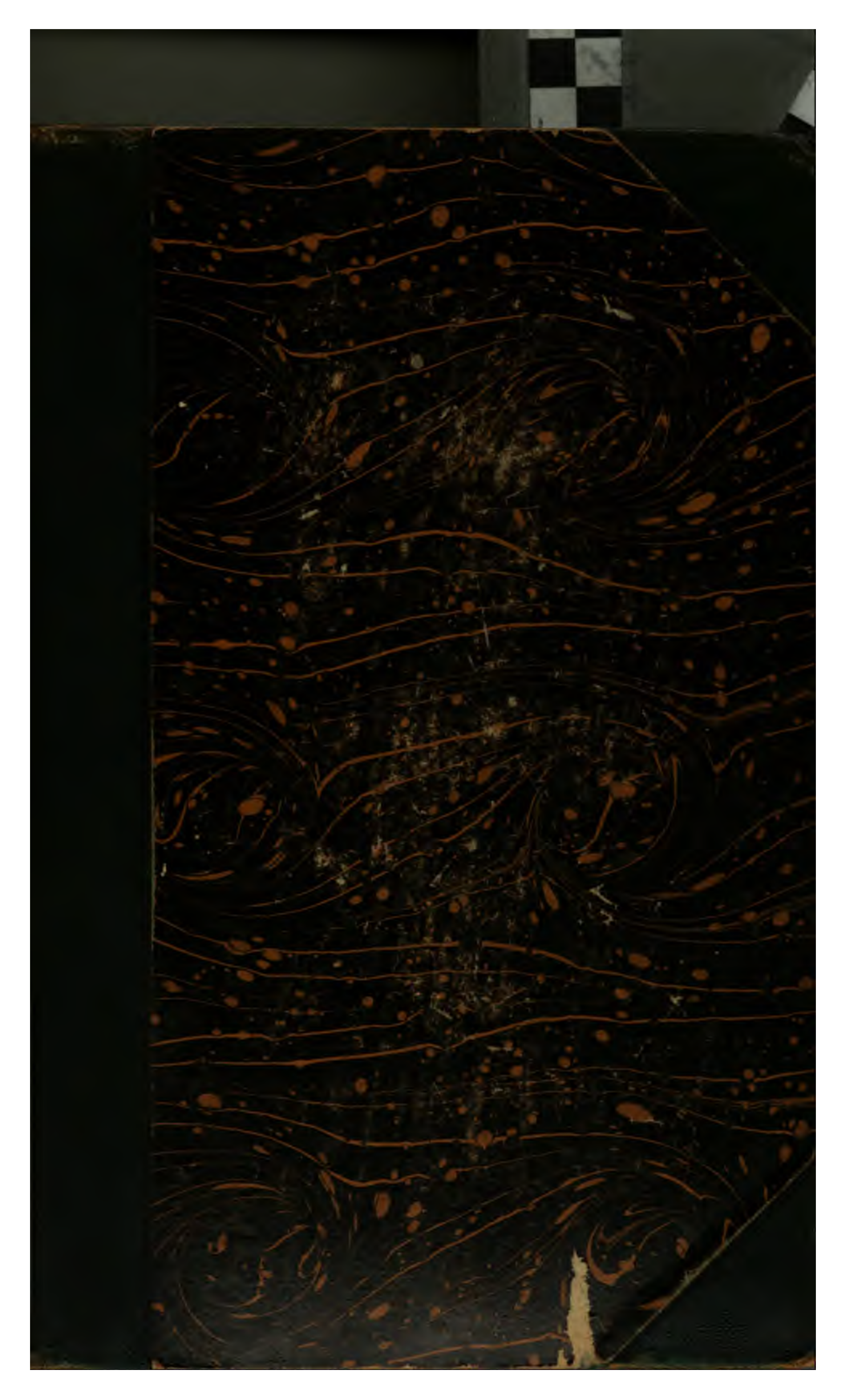


GRUNDZÜGE

DER

KRISTALLOGRAPHIE

VON

PROF. C. M. VIOLA
BERGINGENIEUR, STAATSGEOLOGE UND
DOZENT DER MINERALOGIE IN ROM

MIT 453 ABBILDUNGEN IM TEXT

LEIPZIG
VERLAG VON WILHELM ENGELMANN
1904

Vorwort.

Vor einiger Zeit bereitete ich einen Kurs der gesamten Kristallographie vor, welchen ich als Privatum an der kgl. Universität in Rom zu halten hatte. Im Laufe der Jahre bildete ich meinen Text allmählich um, nach Maßgabe neuer Beobachtungen und neuer Gesichtspunkte, die sich in der Wissenschaft Geltung verschafft hatten.

Als ich daran ging, diesen Kurs ins Deutsche zu übersetzen und für die Veröffentlichung zu bearbeiten, stellten sich mir bedeutende Schwierigkeiten in den Weg. Das Buch schien mir zu weitläufig zu sein; die Zitate belasteten manche Kapitel allzusehr und schienen mir überhaupt zu zahlreich für eine elementare Behandlung des Stoffes. Dazu kam, daß der physikalische Teil die reine Kristallographie zu überwiegen drohte. So begann ich denn zu kürzen, die Zitate zu streichen und insbesondere die Erörterungen über alle diejenigen physikalischen Erscheinungen zu unterdrücken, welche sich ebensowohl bei andern Zuständen als bei den Kristallen finden, und das um so mehr, da die neuen Handbücher von P. v. Groth, Th. Liebisch und W. Voigt darüber jedem Studierenden vollen Aufschluß geben. Der so entstandenen Arbeit gab ich alsdann den besser passenden Namen »Grundzüge der Kristallographie«.

Herr Professor v. Groth riet mir, die Struktur der Kristalle nach den neuen Ansichten nicht zu vernachlässigen; wir hatten, während meiner wiederholten Aufenthalte in München, zusammen oft über dieselbe gesprochen. Diese neuen Ansichten sind von Fedorow mehrmals auseinandergesetzt worden; ich habe sie zum Teil modifiziert, wobei ich mich auf das spezielle Gebiet der Harmonie der Kristalle beschränkte. Auch in der Systematik habe ich vorgezogen, die Symmetrie der Kristalle gegenüber ihrer Harmonie in den Hintergrund treten zu lassen.

Über die Harmonie und das Grundgesetz der Kristalle habe ich mannigfache Unterredungen mit Professor V. Goldschmidt gepflogen, und diese Diskussionen wie seine Schriften haben viel zur Modifikation meines ersten Manuskriptes beigetragen.

Man wird wohl begreifen, daß ein so entstandenes Buch nicht das Ergebnis neuer Forschungen des Verfassers sein kann; es stellt vielmehr

eine Summe unermüdlicher Arbeit einer ganzen ruhmvollen Schar von Gelehrten dar. Der Leser wird im geschichtlichen Teil erkennen, daß ich bei meiner Arbeit eine nicht unbedeutende Zahl bereits veröffentlichter Werke benutzt habe.

Große Hilfe fand ich bei meinem Freunde A. Bodmer-Beder in Zürich, der das ganze Manuskript revidierte und mich auf jeden Punkt aufmerksam machte, bei dem sich ihm eine Änderung zu empfehlen schien, wie das ein fleißiger und gewissenhafter Leser tut, der etwa im Hinblick auf eine zweite Auflage aus dem Werke seines Freundes Irrtümer, die sich vielleicht eingeschlichen haben mögen, auszuscheiden sucht. Ich verdanke vieles dem trefflichen Freunde; der Dank, den ich ihm hier ausspreche, ist wenig im Vergleich zu den Diensten, die er mir erwiesen hat.

Herr Prof. P. von Groth hat sich die Mühe genommen, einen Teil der Druckbogen durchzusehen, wofür ich ihm Dank schulde, sowie auch dem Herrn Verleger, der mit großer Bereitwilligkeit und Einsicht den Druck des Buches förderte.

Rom, September 1904.

C. M. Viola.

Inhalt.

Kapitel I. Einleitung.

Kapitel II. Ableitung des Grundgesetzes der Kristalle.

Kapitel III. Abbildung der Kristalle.

Kapitel IV. Die Grundgestalten der Kristalle.

a. Die geometrischen Eigenschaften.

b. Beschreibung der Grundgestalten der Kristalle.

I. Drei- und viergliedrige Grundgestalten.

II. Viergliedrige Grundgestalten.

III. Dreigliedrige Grundgestalten.

IV. Sechsgliedrige Grundgestalten.

Kapitel V. Die Harmonien der Kristalle.

a. Physikalische Verhältnisse.

Kapitel VI. Die Gestalten der Kristalle.

Kapitel VII. Die Verwachsungen der Kristalle.

Kapitel VIII. Die Symmetrie der Kristalle.

Kapitel IX. Chemisch-physikalische Beziehungen.

Kapitel X. Die geometrische Struktur der Kristalle.

a. Das Raumgitter.

b. Die Harmonien im Raumgitter.

Kapitel I.

Einleitung.

§ 1. Art der Wirkungen und Gegenwirkungen.

Wirkungen und Gegenwirkungen treten in jedem Raum gleichzeitig auf. Der Zusammenhang derselben bestimmt einen gewissen Zustand des Raumes, worauf das Verhältnis der Wirkungen und Gegenwirkungen sich bezieht. Mit dem Wort »Erscheinung« pflegt man irgend welche Veränderung zu bezeichnen, welche durch unsere Sinne wahrgenommen wird. Die Wirkungen sowie die Beziehung derselben mit den Gegenwirkungen können daher zu den Erscheinungen gerechnet werden. Die Erscheinungen, welche einen Zustand des Raumes feststellen, sind chemisch und physikalisch. Durch die chemischen Reaktionen wird die chemische Zusammensetzung bestimmt. Um den Raumzustand vollständig zu kennen, muß man die chemischen Reaktionen in jedem Punkt bestimmen. Allein für die Praxis ist diese Bestimmung nur annähernd möglich, da die chemische Wage und die ganze chemische Bearbeitung unter eine gewisse tiefere Grenze nicht gehen können; daher müssen wir uns bei den chemischen Reaktionen mit einer nicht sehr großen Genauigkeit begnügen.

Doch weiß man heutzutage schon, daß gewisse Wirkungen andere vollständig ersetzen. Wo die chemischen Reaktionen nicht die erforderliche Genauigkeit besitzen, werden sie einfach durch gewisse empfindliche physikalische Erscheinungen ersetzt. So z. B. sind wir imstande durch gewisse optische Erscheinungen festzustellen, ob innerhalb eines gewissen Raumes die chemische Zusammensetzung dieselbe bleibt oder nicht. Aber wir sind erst nach vieler Mühe zur Erkenntnis dieser Tatsache gekommen, welche immer ein Erfahrungsgesetz bleibt, das sich eben auf die Empfindlichkeit der chemischen Analyse gründet.

Wenn wir von einem Raumzustand sprechen, und wenn wir denselben bestimmen wollen, so denken wir uns naturgemäß, daß der Raum, worauf sich der Zustand bezieht, durch eine geschlossene Oberfläche begrenzt sei. Die meisten Naturforscher sagen, daß der Raum von einer Materie erfüllt sei. Wir wollen vorläufig diese Auffassung bei Seite lassen, da wir nur von Erscheinungen sprechen.

Wenn der Zustand des geschlossenen Raumes untersucht werden soll, so bleibt uns gar kein anderer Weg übrig, als die umschließende Oberfläche durch bekannte Wirkungen anzugreifen. Allerdings gibt es Erscheinungen, die auf entfernte Wirkungen zurückgeführt werden. Das spezifische Gewicht

ist offenbar ein Verhältnis, welches sich auf die Wirkung bezieht, die zwischen der Masse unserer Erde und derjenigen des betrachteten begrenzten Raumes besteht. Aber abgesehen von solchen sich auf die Entfernungen beziehenden Wirkungen, haben wir meistens nur mit Oberflächenwirkungen zu tun, welche uns zur Verfügung stehen und mit denen wir den Raumzustand erforschen können.

Die Einwirkung auf die Oberfläche des geschlossenen Raumes ist nur durch eine Bewegung möglich, die wiederum einer Gegenbewegung entspricht. Diese wechselartigen Bewegungen sind durch eine Richtung, d. h. durch einen Vektor, nach Größe und Richtung bestimmt. Allein es gibt doch Wirkungen, bei denen die Richtung für unsere Sinne nicht wahrnehmbar ist und unbekannt bleiben muß. Erhöhen wir z. B. die Temperatur an der umgrenzenden Oberfläche, so wissen wir doch nichts von Wirkungen nach einer Richtung. Oder umgeben wir den zu untersuchenden Raum mit einer auflösenden Flüssigkeit oder mit einem chemischen Reagens, so bleibt die Richtung des einwirkenden äußern Mittels unbekannt, oder wir wollen uns lieber so aussprechen, die Richtungen bei solcher Art von Wirkungen sind mannigfaltig. Man nennt sie deshalb skalare Wirkungen, weil ihre Größe durch ein Skalar, eine Zahl, ausreichend gegeben ist. Die Gegenwirkungen von solchen skalaren Wirkungen können entweder skalar bleiben, oder aber sich nach Richtungen entfalten. Die auflösende Kraft, die chemische Wirkung, entspricht Auflösungserscheinungen und chemischen Reaktionen, welche zuweilen nach Richtungen gemessen werden.

Die Wirkungen, bei denen eine Richtung bekannt ist, nennt man im allgemeinen vektoriale. Tritt Licht in einen Raum ein, so ist die vektoriale Wirkung immer entweder nach einer Richtung oder nach verschiedenen in einer Ebene liegenden Richtungen bekannt. Die elektrischen und magnetischen Erscheinungen sind ebenfalls durch Vektoren nach Größe und Richtung festgestellt. Auch die elastischen Verhältnisse können nur dadurch untersucht werden, daß die äußere einwirkende Kraft nach Richtung und Größe gegeben wird.

Indem wir durch skalare und vektoriale Wirkungen die vektorialen Gegenwirkungen hervorrufen, tritt uns der Zustand des Raumes deutlich hervor. Dieser Zustand ist offenbar nach Richtung und Stelle erst vergleichbar, wenn die Beziehung zwischen Wirkung und Gegenwirkung in jeder Richtung und an jeder Stelle bekannt sein wird.

Das Verhältnis zwischen vektorialen und skalaren sowie zwischen vektorialen und vektorialen Einwirkungen heißt vektoriales Element. Das Verhältnis zwischen skalaren und skalaren Größen heißt skalare Konstante.

Der Zusammenhang aller vektorialen Elemente und skalaren Konstanten bestimmt einen Raumzustand vollständig.

§ 2. Homogenität und Inhomogenität.

Erscheinen die vektorialen Elemente, welche für eine Richtung gelten, für alle zu ihr parallelen Richtungen gleich, so nennt man den Zustand homogen. Wenn aber ein Zustand in bezug auf ein vektoriales Element homogen ist,

ist er es auch für alle anderen vektorialen Elemente, sodaß daher die Erforschung der Homogenität auf nur eine vektoriale Erscheinung beschränkt bleiben darf. Man wählt zu diesem Behuf die einfachste und empfindlichste, z. B. die Lichterscheinung. Auch die skalaren Konstanten pflegen für alle Punkte des Raumes dieselben zu sein, wenn ein Zustand als vektorial homogen nachgewiesen ist. Diese Erfahrungstatsachen beweisen, daß alle skalaren und vektorialen Konstanten untereinander im Zusammenhang stehen. Das Band, welches alle verbindet, herauszufinden ist eben Aufgabe der Naturwissenschaft.

Sind die vektorialen Elemente nicht dieselben längs einer Richtung oder gelten die skalaren Konstanten nicht für alle Punkte des begrenzten Raumes, so haben wir es mit einem inhomogenen Zustand zu tun.

§ 3. Isotrope und anisotrope Zustände.

Gelten alle vektorialen Elemente eines homogenen Zustandes, welche für eine Richtung genügen, auch für alle anderen nicht parallelen Richtungen, so nennt man den Zustand isotrop. Anisotrop ist derjenige homogene Zustand, bei dem die vektorialen Elemente nach verschiedenen Richtungen verschieden sind.

Sowohl die isotropen als auch die anisotropen Zustände können inhomogen sein. Man nennt einen isotropen homogenen oder inhomogenen Zustand auch amorph.

Ein homogener Zustand wird schlechtweg anisotrop genannt, wenn er in bezug auf irgendwelche physikalische Erscheinung anisotrop ist. Anisotrope Zustände können auf verschiedene Weise erzeugt werden. Trübe Flüssigkeiten sind oft mit Bezug auf das Licht anisotrop. Durchsichtige homogene isotrope Körper bleiben, wenn sie in ein elektrostatisches Feld gebracht werden (Phänomen von Kerr) homogen und werden für das Licht anisotrop. Ein ähnliches Phänomen ist auch dasjenige von Majorana, wo eine aktiv-magnetische Flüssigkeit zwischen zwei stark magnetischen Polen doppeltbrechend, d. h. für das Licht anisotrop wird, ohne ihre Homogenität zu verlieren.

Setzt man eine Säule aus Glasplatten zusammen, so gewinnt man daraus einen homogenen Körper, der in bezug auf die Licht-, Elastizitäts- und Kohäsionserscheinungen anisotrop ist.

Überaus interessant sind gewisse Flüssigkeiten, welche zuerst von O. Lehmann erforscht worden sind, die bei gewisser Temperatur und gewissem Druck für das Licht anisotrop werden.

Die von Lehmann untersuchten Flüssigkeiten sind

Para-azoxyanisol $(C_{14}H_{14}N_2O_3)$,
Para-azoxyphenetol $(C_{16}H_{18}N_2O_3)$,
Colesterilbenzoat $(C_{34}H_{50}O_2)$.

Wenn sie bei 760 mm Druck flüssig werden, verlieren sie ihren anisotropen Zustand, die erste bei 134° C., die zweite bei 162° C. und die dritte bei 178° C.

Diesen kann man noch das

Para-azophenetol ($C_8 H_9 NO$)

hinzufügen, das bei 149° trübflüssig und anisotrop wird; seine Anisotropie verliert es erst bei 160°.

§ 4. Kristalle. Kristallographie.

Von allen möglichen homogenen anisotropen Zuständen scheidet man besonders diejenigen aus, welche mit Bezug auf die Kohäsion anisotrop sind, und letztere nennt man Kristalle. Man versteht daher unter Kristall einen homogenen Zustand, der für die Kohäsion anisotrop ist. Derjenige Zweig der Wissenschaft, welcher die Kristalle erforscht, heißt Kristallographie.

Der Kristall erscheint nur unter festem Aggregatzustand; flüssige Aggregatzustände können keine Kohäsionskräfte äußern, welche nach verschiedenen Richtungen verschieden sind, oder solche Zustände sind bis jetzt unbekannt. Der Kristallzustand tritt in der Natur abgegrenzt auf, und als solcher wird er auch Individuum genannt. Die Individualität erhält er durch alle skalaren Konstanten und vektorialen Elemente.

Ein Kristallindividuum ist mit einem organischen Individuum nicht zu verwechseln. Der Kristall ist homogen, d. h. in allen einzelnen Punkten absolut gleich. Man hat eine Zeit lang die anisotropen flüssigen Substanzen seit Lehmann flüssige Kristalle genannt. Nach unserer Definition sind die flüssigen anisotropen Zustände keine Kristalle. Es ist zweckmäßig, bei dieser Trennung zu bleiben, auch deshalb, weil die flüssigen anisotropen Zustände anders erforscht werden, als die Kristalle. Siehe die Anmerkung der Seite 19.

§ 5. Kurze Übersicht des Buches. Literatur.

Da die Erkennung der Kristalle vor allem durch die Kohäsionseigenschaften erfolgen soll, so werden wir mit der Kohäsion beginnen und das Grundgesetz der Kristalle ableiten, welches sich auf die Kohäsion bezieht. Hieran schließen sich die geometrischen Eigenschaften der Kristalle und ihre Gestalten. Um die Gestalten zu studieren, müssen Goniometer in Gebrauch kommen, und dabei ist sowohl die stereographische Projektion als auch die parallele Perspektive von großer Wichtigkeit.

Nachdem diese Arbeit geschehen ist, werden wir die Grundgestalten, die Trachten und die verschiedensten Gestalten der Kristalle kennen lernen. Die Grundgestalten und die Trachten der Kristalle werden auf das allgemeine Prinzip der Harmonie gestützt. An die Grundgestalten werden sich die Verwachsungen der Kristalle anschließen.

Die Symmetrie der Kristalle wird in einem speziellen Kapitel behandelt und als Grenze der Harmonie aufgefaßt.

Darauf wird der Isomorphismus und der Polymorphismus mit den isomorphen Mischungen folgen. Zum Schluß werden wir uns mit der geometrischen Struktur der homogenen Zustände beschäftigen, welche in die Struktur der Kristalle einführt.

Über die Literatur, welche die Aggregatzustände, Homogenität, Kristallzustand, Amorphzustand und Definition des Kristalles behandelt, sind die in § 12 angegebenen Bücher zu konsultieren. Außerdem seien besonders folgende Arbeiten erwähnt:

G. Tammann. Über die Grenzen des festen Zustandes. Wied. Ann. 1867, 62, p. 384.

Fr. Reinitzer. Sitz.-Ber. der k. Akadem. der Wiss. Wien 1888, 94 (2), p. 219; 97 (1), p. 167.

O. Lehmann. Über fließende Krystalle. Ztschr. für phys. Chemie 1889, 4, 462, 472.

—— Die Struktur krystallinischer Flüssigkeiten. Ztschr. für phys. Chemie 1890, 5, 427—435.

—— Über Kontaktbewegung und Myelinformen. Wied. Ann. 1895, 56, 771—788.

—— Über tropfbarflüssige Krystalle. Wied. Ann. 1890, 40, 401—423.

—— Über krystallinische Flüssigkeiten. Wied. Ann. 1890, 42, 525—537.

L. Gattermann und A. Ritschke. Über Azoxyphenoläther. Berichte d. deutsch. chem. Gesellsch. 1890, 23, 1738—1750.

O. Lehmann. Struktur, System und magnetisches Verhalten flüssiger Krystalle und deren Mischbarkeit mit festen. Wied. Ann. 1900, 2, 649.

J. W. Retgers. Beiträge zur Kenntnis des Isomorphismus. Ztschr. f. phys. Chemie 1894, 14, 1—52 und Neues Jahrb. für Min. 1895, II, 167.

W. Ostwald. Lehrbuch der allg. Chemie (2) 2, p. 393, 1897.

Jacques Boyer. Kosmos 1897, 5. Sept., No. 658, p. 291.

J. Schenck. Untersuchungen über die krystallinischen Flüssigkeiten. Ztschr. f. phys. Chemie 1897, 25, 337—352; 1898, 27, 167; 1899, 28, 280.

K. Schaum. Dissertation. Liebig's Ann. 1898, 300, 208.

R. Abegg nnd W. Seitz. Das diëlektrische Verhalten einiger krystallinischer Flüssigkeiten. Ztschr. f. phys. Chemie 1899, 29, 491.

G. H. Hulett. Der stetige Übergang fest-flüssig. Zust. Zeitschr. f. phys. Chemie 1899, 28, 625—672.

R. Schenck und Fr. Schneider. Zeitschr. f. phys. Chemie 1900, 29, 546—557.

W. Ostwald. Studien über die Bildung und Umwandlung fester Körper. Ztschr. f. phys. Chemie 22, 289.

A. Amerio. Über Lehmanns flüssige Kristalle. Il nuovo Cimento 1901, 2, 281.

R. Schenck. Die Ergebnisse der bisherigen Untersuchungen über flüssige Kristalle. Ztschr. f. phys. Chemie 1900, 1, 409—413; 425—428. Mit Literatur.

Kapitel II.

Ableitung des Grundgesetzes der Kristalle.

§ 6. Die Abgrenzung der Kristalle.

Wir wollen zuerst die von der Natur gelieferten Kristalle von ihrer Begrenzung aus studieren. Da jeder Kristall abgegrenzt erscheint und seine Abgrenzung durch Zustände verursacht sein muß, welche während der Entstehung des Kristalles vorhanden waren, so muß uns seine Abgrenzung etwas über seinen innern homogenen Zustand sagen. Freilich wäre die Untersuchung

vollständiger und sicherer, wenn wir jene äußern Zustände kennen würden; aber da das uns nicht immer zu Gebote steht, so müssen wir uns mit der äußeren Gestalt der Kristalle begnügen.

Wir erstaunen vor der Mannigfaltigkeit der Kristallgestalten; sie sind verschieden voneinander selbst für dieselbe chemische Substanz. Trotzdem läßt sich darin etwas charakteristisches bemerken; oft springen besondere Züge, die sich beständig wiederholen oder kaum variieren, in die Augen. Die Fig. 1 zeigt drei Kristalle I, II und III von Glaukochroit, nach S. L. Penfield und C. H. Warren, die zusammen verwachsen sind. Dieselben sind von vielen Flächen begrenzt, die eine Richtung deutlich hervortreten lassen, weil eben jene Flächen parallel zu derselben liegen. Wir sagen, daß in diesem Fall die Flächen eine Zone abgrenzen, deren Richtung Zonenachse heißt; die Flächen bestimmen eine große Anzahl von Kanten, wo sie sich schneiden, und die parallel der Zonenachse laufen.

Fig. 1.



Ein zweites Beispiel von Kristallgestalten liefert uns die Fig. 2, die einen Lanthansulfatkristall, nach E. H. Kraus, darstellt. Die Begrenzung des Kristalles geschieht ebenfalls deutlich nach einer Richtung, d. h. nach einer Zone, aber die Endungen sind pyramidal. Eine sehr komplizierte Zone liefert der Realgarkristall, der in Fig. 3, nach V. Hackmann, abgebildet ist; die Endung ist komplizierter als in Fig. 2.

Fig. 2. Fig. 3.

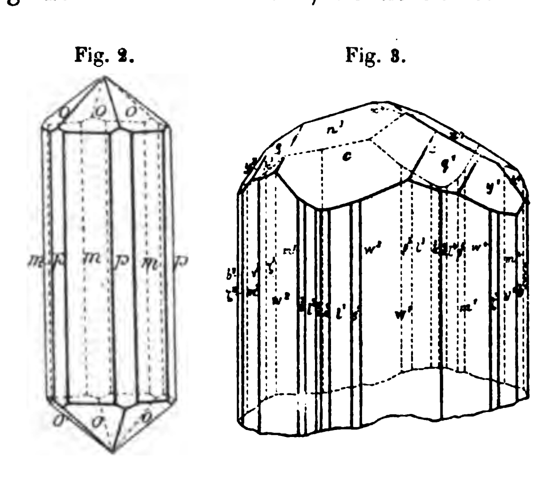


Fig. 4.

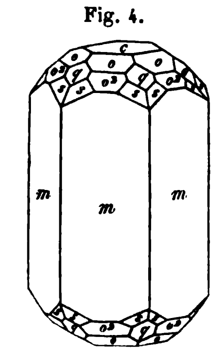


Fig. 5.

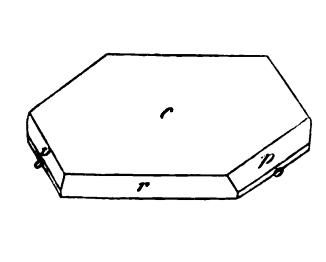
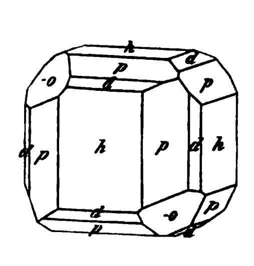


Fig. 6.



Der Beryllkristall der Fig. 4 ist einfach nach der verlängerten Zone gebaut, aber zugleich sehr kompliziert an den Endungen. Die Fig. 5 zeigt, nach

P. v. Groth, die Gestalt des Anthracen, der nach zwei parallelen Ebenen einfach gebaut erscheint, tafelförmig durch kleine Flächenleisten ringsherum abgegrenzt.

Die Fig. 6 zeigt die gewöhnliche Gestalt des Natriumchlorats, wo eigentlich nicht nach einer einzigen Zone die Flächen geordnet sind und die Gestalt nicht tafelförmig erscheint. Gehen wir noch weiter in der Untersuchung, so werden wir kompliziertere Gestalten antreffen. Die Fig. 7 stellt z. B. eine ungewöhnliche Gestalt des Kupferkieses dar, wo die Flächen nicht glatt und die Kanten zackig sind. Noch komplizierter ist die in Fig. 8 dargestellte Gestalt des Parisits, nach R. L. Penfield, welche nach oben sechsseitig-pyramidal endet und nach unten treppenartig gebaut ist.

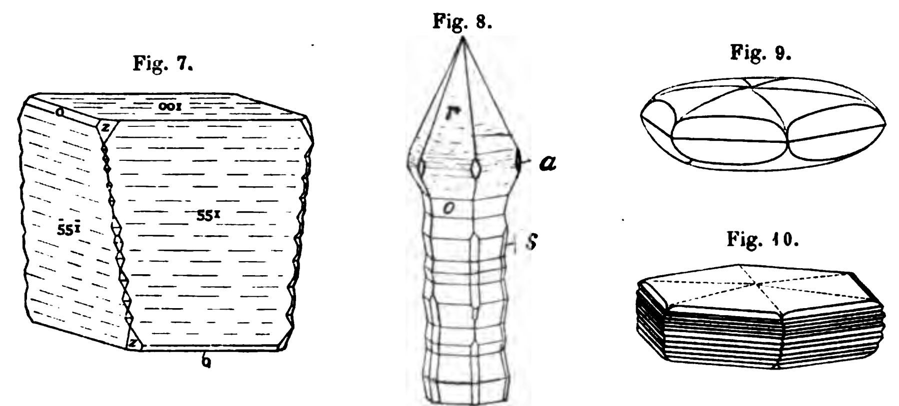
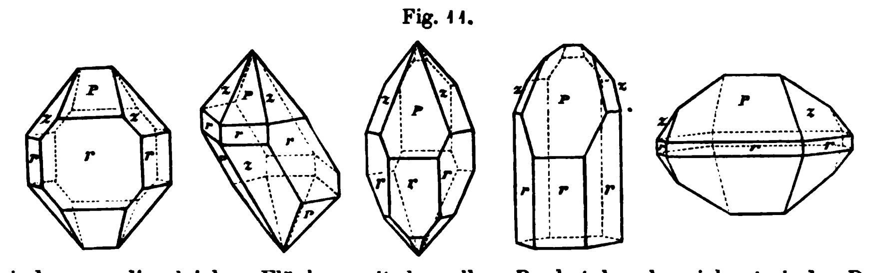


Fig. 7. Fig. 8. Fig. 9. Fig. 10.

Es scheint als ob die Gestalt der Kristalle im großen und ganzen ein Polyeder sei, mit ebenen Flächen und geraden Kanten; aber das ist durchaus nicht immer der Fall, wovon uns eine genaue Prüfung der Kristalloberfläche überzeugt. Krumme Kristallgestalten erscheinen manchmal sehr deutlich, sodaß man sie mit freiem Auge erkennt. Die Fig. 10 zeigt, nach A. v. Lasaulx, eine ziemlich gewöhnliche Gestalt des Herschelitkristalls, während die Fig. 9 dieselbe durch krumme Flächen abgegrenzt darstellt.

Der Quarz, der die reine kristallisierte Kieselsäure darstellt, kommt in der Natur nicht immer unter gleicher Gestalt vor; mannigfaltige Formen werden von ihm beobachtet. Die Fig. 11 gibt, nach Naumann-Zirkel, einige derselben

Fig. 11.



wieder, wo die gleichen Flächen mit denselben Buchstaben bezeichnet sind. Der Kalkspat ist noch mehr der äußern Veränderung unterworfen als der Quarz; man kann sogar behaupten, daß es schwer ist zwei Kalkspatkristalle zu treffen,

welche genau die gleiche Gestalt haben. So könnten wir die Beispiele ins Zahllose ausdehnen. Und doch läßt sich aus einer so reichen Mannigfaltigkeit auf bestimmte Regeln schließen. Bei einigen Kristallen tritt ausschließlich eine Zone deutlich hervor (Fig. 2), bei anderen nur eine ebene Fläche (Fig. 5); oder es erscheinen zwei, drei, ... Zonen, oder zwei, drei, ... Ebenen (Fig. 6).

Wie kompliziert auch die Kristallgestalt sein mag, so springt doch in die Augen, daß nur eine recht kleine Anzahl von Zonen und nur eine recht kleine Anzahl von Ebenen die Eigentümlichkeit der Gestalt in den Vordergrund treten läßt. Das kann doch nicht ein Zufall sein und muß vielmehr mit der Eigentümlichkeit des Kristallinnern im Zusammenhang stehen.

Um näher die Kristallgestalt zu studieren, denke man sich, daß ihre Oberfläche in lauter kleine Flächenelemente, die als vollkommen eben angesehen werden können, eingeteilt sei; man denke sich ferner, daß jedes Flächenelement durch seine Normale der Richtung nach festgestellt sei, oder noch einfacher, daß die Normale den Ort des Flächenelements angibt. Die Erfahrung zeigt nun, daß die Flächenörter entweder so weit oder so nahe sind, daß nur gewisse Örter oder nur gewisse Zonen hervortreten. Deshalb sagt man, daß eine Kristallgestalt ein Verband von wenigen Flächen oder ein Verband von wenigen Zonen ist, ein Flächenverband oder ein Zonenverband. Flächenverband und Zonenverband werden erst verständlich, wenn wir das Grundgesetz kennen werden.

Man unterscheidet bei den Kristallen Flächenelemente, Kanten und Ecken. Mehrere Flächenelemente, deren Örter nahe aneinander liegen, bilden das was man kurzweg Kristallfläche nennt. Mehrere Kanten, deren Örter nahe aneinander liegen, bilden eine einzige Richtung, den mittleren Ort derselben, welcher die Zonenachse ist. Der Ort eines Flächenelements ist derjenige seiner Normalen. Der Ort einer Kristallfläche ist der mittlere Ort der Normalen, welche nahe aneinander liegen. Der Ort einer Zone ist der Ort der Ebene, welche zur Zone senkrecht steht.

Sei s die Anzahl der Seiten und v der Ecken, so gilt für ein einfaches Polygon

$$s - v = 0.$$

Gleichfalls sei f die Anzahl der Flächen, k diejenige der Kanten und e der Ecken, so gilt für das einfache Polyeder die Eulersche Beziehung:

$$f + e - k = 2.$$

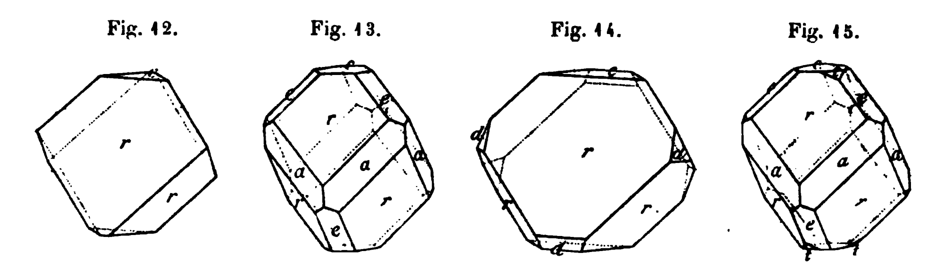
Sowie eine ebene Fläche des Kristalles die Form des einfachen Polygons hat, so kann auch die Gestalt des Kristalles auf ein einfaches Polyeder zurückgeführt werden.

§ 7. Kristalltracht und Kristallgrundgestalt.

Wenn uns die Erfahrung zeigt, daß eine und dieselbe chemische Substanz unter ganz verschiedenen Gestalten erscheint, so müssen wir doch annehmen, daß die äußern Bedingungen, welche bei der Kristallbildung bestanden haben, für jede Gestalt eigenartig gewesen sein müssen; außerdem kommen noch

hinzu die zufälligen Wirkungen, welche zufällige Veränderungen in der Kristallgestalt hervorbringen.

Wenn wir aus einem und demselben Ort Kristalle sammeln, so können wir vermuten, daß sie alle unter denselben Bedingungen entstanden sind. Wir finden in der Tat, daß sie eine Eigenart besitzen, welche besonders hervorspringt, und einige Elemente haben, welche bald in diesem bald in jenem Kristall auftreten; es ist also bei solchen Kristallen etwas Konstantes und etwas Veränderliches bemerkenswert. Um in dieser Hinsicht ein Beispiel zu nennen, stellen die Fig. 12, 13, 14, 15 verschiedene Kristallgestalten des Ammoniumperjodats, nach A. S. Eakle, dar, welche sich sichtlich unter der Herrschaft der gleichen



konstanten Ortsbedingungen gebildet haben. Die Figuren dieser Kristalle haben als vorherrschende Flächen *r* und *c*, welche allen gemein sind. In einigen zeigen sich auch die Flächen *a* und *e*, aber weniger ausgebildet als die ersteren; die Flächen *t* sind noch rudimentärer als die letzteren. Die Bedingungen, unter deren Einfluß die Kristalle bei ihrer Bildung gestanden haben, sind sicherlich diejenigen, welche die Flächen *r* und *c* bestimmen. Das Konstante steht unbedingt mit den äußern Bedingungen im Zusammenhang, welche während der Kristallbildung keine Veränderung erleiden, wie die Flächen *r* und *c* in dem vorhergehenden Beispiel; das Variable aber hängt von den zufälligen Wirkungen ab, die bald so bald anders zum Vorschein kommen, wie bei den Flächen *a*, *e*, *t*. Wenn wir also eine mittlere Gestalt zusammensetzen, welche die konstanten Elemente zeigt, die aus einer großen Anzahl von gleichzeitig und in demselben Ort entstandenen Kristallgestalten hervorgehen, so wird diese mittlere Gestalt den Ausdruck der äußern konstanten Bedingungen darstellen; man nennt sie Kristalltracht (Habitus).

Indem man aus den verschiedenen Kristallgestalten, von denen man sicher ist, daß sie unter denselben äußern Bedingungen sich gebildet haben, eine mittlere Gestalt, die Kristalltracht, konstruiert, setzt man also voraus, daß die zufälligen Wirkungen unberücksichtigt bleiben, oder sich gegenseitig aufheben.

Machen wir eine Sammlung von 100 Kalkspatkristallen aus 100 verschiedenen Fundorten und wir werden nahezu 100 verschiedene herrschende Kristallgestalten des Kalkspats erhalten.

Wenn wir aus diesen 100 verschiedenen Kalkspatkristallen die mittlere Gestalt herausfinden, so wird sie nur von solchen Flächen begrenzt sein, welche sich in den 100 verschiedenen Kristalltrachten am meisten wiederholt haben,

also die größte Wahrscheinlichkeit besitzen; alle übrigen Flächenelemente, welche bald hier bald dort auftreten, werden in der aus 100 Exemplaren hervorgehenden mittleren Gestalt nicht erscheinen. Eine solche mittlere Gestalt nennt man Kristallgrundgestalt. Eine Grundgestalt besteht also eigentlich in der Natur nicht, kann aber aus einer großen Anzahl von Gestalten abgeleitet werden; sie ist von beständig und vorherrschend auftretenden Flächen begrenzt, wie immer auch die äußern Umstände und Bedingungen, von denen sie unabhängig ist, sein mögen; die Grundgestalt stellt vielmehr den Ausdruck der innern Eigenschaften oder, genauer ausgesprochen, den wahrnehmbaren Ausdruck des Kristallinnern dar, und das um so genauer, je größer die Anzahl der Kristalle ist, welche zur Bestimmung der Kristallgrundgestalt dient.

Und da wir im Kristall nur die Kohäsion und sonst keine andere Wirkung kennen, welche nicht von Ort zu Ort, von Kristall zu Kristall variiert, so müssen wir gestehen, daß die Grundgestalt lediglich in Beziehung mit der Kohäsion des Kristalls stehen muß.

In den folgenden Paragraphen wird bewiesen, daß die Kohäsion Minimal- und Maximalwert haben muß. Und wir werden zu dem Schluß kommen, daß die Flächen der Grundgestalt zu den Richtungen der Kohäsionsminima senkrecht stehen müssen. Es ist vor allem unsere Aufgabe, die Beziehungen dieser Richtungen kennen zu lernen, da sie auf die Flächen der Grundgestalt ohne weiteres übertragen werden dürfen.

§ 8. Ausdruck der Kohäsion.

Denke man sich eine zylindrische Stange, deren Querschnitt bekannt ist, und unterwerfe man dieselbe einer Zugkraft. Ist letztere genügend groß, so bricht die Stange ab. Diejenige Zugkraft pro Querschnitteinheit, welche kaum den Bruch zustande bringt, gibt die Größe der Kohäsion an, d. h. derjenigen Kraft, welche dem Bruche gerade zu widerstehen vermag. Und zwar bezieht sich diese Kraft auf diejenige Fläche, nach welcher der Bruch entstanden ist. Unter Kohäsion wird eine Flächenkraft verstanden, d. h. eine Kraft, welche pro Fläche, nicht pro Masse gemessen wird.

Wenige Beobachtungen liegen vor, welche die Kohäsionsgröße der Kristalle zuverlässig angeben. Große Schwierigkeiten setzen sich derartigen Versuchen entgegen. Zuerst ist es die Ausarbeitung des Materials, dann aber die Art des Angreifens durch die äußere Zugkraft, die Feststellung der Zugkraftgrenze und des Querschnittes im Moment des Bruches, was die Schwierigkeiten erhöht; und ferner ist der Widerstand auf dem Bruch auch abhängig von der Zylinderfläche der Stange.

Man denke sich einen Körper, einen Kristall, in eine Flüssigkeit getaucht. Auf der Oberfläche derselben wirkt die Kapillarität, d. h. die molekulare Kraft der Flüssigkeit gegen die Oberfläche des Körpers. Ist diese Kapillarität größer als die Kohäsion, so erfolgt eine Trennung des Körpers; die einzelnen getrennten Teilchen gehen in die Flüssigkeit über und wir bekommen das, was man Lösung nennt. Wäre die Kapillarität bekannt, oder würden wir die

Schnelligkeit der Auflösung kennen, so könnte man zurück auf die Kohäsionsgröße schließen. Je stärker die Auflösung ist unter sonst gleichen Verhältnissen, um so kleiner wird die Kohäsion sein, und umgekehrt. Aber auch die Festsetzung dieses Vorgangs ist mit Schwierigkeiten verbunden, denn die Kapillarität ist von dem Zustand der Fläche abhängig. Ist die Fläche glatt, so kann die Kapillarität viel kleiner sein, als wenn sie rauh ist.

Durch wiederholte Versuche können wir aber doch zu bestimmten Schlüssen kommen, indem wir nämlich auf sehr verschiedene Weise die auflösende Flüssigkeit ändern. Indem wir das tun, verändern wir die Angriffsweise des Kristalls durch die ihn umgebende Flüssigkeit.

Unter Kristall haben wir denjenigen homogenen Zustand verstanden, welcher in bezug auf die Kohäsion anisotrop ist. Alle Beobachtungen an denjenigen natürlichen Gegenständen, welche man immer mit dem Namen Kristall belegt hat, haben ergeben, daß in der Tat die Kohäsionskräfte sich von Richtung zu Richtung ändern.

§ 9. Kohäsionsminima, Spaltbarkeit und Bruch.

Die genannten Aufschlüsse über die Änderung der Kohäsion im Kristall geben uns die Kohäsionsminima. Senkrecht zu den Richtungen, wo die Kohäsionsminima herrschen, ist die Trennung des Kristalls am leichtesten. Diese leichteste Trennung der Kristallteilchen nennt man Spaltbarkeit, zuweilen auch Bruch. Ist die Spaltbarkeit höchst vollkommen, so sind die Trennungsflächen vollkommen parallele Ebenen, und die darauf senkrechte Kohäsion wird ein scharfes Minimum zeigen. Nicht überall wo ein Kohäsionsminimum vorhanden ist, wird sich Spaltbarkeit zeigen. Wir können darüber auf folgende Weise ins Klare kommen: Man denkt sich eine Richtung, wo ein Kohäsionsminimum herrscht, d. h. längs einer Ebene, welche zu dieser Richtung senkrecht steht, sei die Trennung des Kristalls am leichtesten. Lassen wir diese Ebene nun um einen Winkel drehen, so wird die Kohäsion senkrecht zu dieser neuen Ebene nicht verschieden von dem Minimum sein, falls der Drehungswinkel klein ist. Aber es kann vorkommen, daß die Kohäsion sich nicht ändert für einen resp. großen Drehungswinkel, oder es kann auch möglich sein, daß die Kohäsion nur konstant bleibt, wenn die Drehung der Ebene sehr klein ist; im ersteren Fall wird der Kristall nach verschiedenen Ebenen eine leichte Trennung erfahren, d. h. nach einer krummen Fläche, im zweiten Fall aber wird die Trennung nur nach einer Ebene erfolgen. Je schärfer also das Minimum der Kohäsion ist, desto deutlicher wird die Spaltbarkeit, und je stumpfer das Minimum ist, desto undeutlicher wird die Spaltbarkeit ausfallen müssen, und sie kann so undeutlich sein, daß wir nicht mehr von einer eigentlichen Spaltbarkeit sprechen können, es vielmehr mit einem Bruch des Kristalls zu tun haben.

Die Spaltbarkeit kann höchst vollkommen sein (wie beim Glimmer, Chlorit, Molybdänit usw.), sehr vollkommen (wie bei Flußspat, Calcit, Zinkblende, Baryt, Amphibol usw.), vollkommen (wie beim Pyroxen, Kryolith usw.),

unvollkommen (Granat, Quarz usw.) und sehr unvollkommen (Pyrit) ausfallen.

Solange es nicht möglich sein wird, durch Kräfte die Zugwiderstände auf Bruch am Kristall zu messen, wird man genötigt sein bei dieser nicht strengen Bezeichnung des Spaltbarkeitsgrads zu bleiben.

Auch für die Unterscheidung der Bruchart müssen ähnliche wenig scharfe Ausdrücke genügen; der Bruch kann muschelig, eben, uneben, glatt, splitterig, erdig und hakig sein.

Die meisten Kristalle besitzen mehr oder weniger deutliche Spaltbarkeit und weisen daher Kohäsionsminima auf. Aber auch wo keine Spaltbarkeit wahrgenommen wird, können Kohäsionsminima vorhanden sein; denn wenn man im allgemeinen sagen darf, daß Kohäsionsminima und Spaltbarkeit zusammenhängen, wird sich doch nur dort eine Spaltungsebene zeigen, wo ein scharfes Kohäsionsminimum liegt. Die Kohäsionsminima müssen daher erforscht werden, ohne daß auf die Spaltbarkeit streng geachtet wird, und dabei kommen uns hauptsächlich die Auflösungserscheinungen und das Wachstum der Kristalle zu Hilfe. Wo aus zahlreichen Wachstumserscheinungen das kleinste Wachstum wahrgenommen wird, dahin versetzt man ein Kohäsionsminimum. Mit dem Begriff Kristall ist also stets die Annahme von Kohäsionsminima verbunden, auch dann, wenn die Erfahrung keine Spaltbarkeit aufweist.

Es ist auffallend, wie die Spaltungen der Kristalle konstante Örter behalten. So bilden z. B. die drei Spaltungsörter des Kalkspates untereinander einen Winkel von 75° (105°), welches auch die Gestalt dieses Minerals sein mag. Auch der verschiedene Versteinerungen, z. B. die Echiniden, erzeugende Kalkspat spaltet nach den genannten Örtern vollkommen. Der Orthoklas hat stets zwei vollkommene Spaltungen, welche immer aufeinander senkrecht stehen, wie auch die äußere Gestalt des Kristalls sein mag. Der Flußspat hat vier vollkommene Spaltungen, und ihre Örter bilden stets untereinander dieselben Winkel. Die Zinkblende hat sechs konstante Spaltungen, deren Örter immer dieselben bleiben, wie unregelmäßig diese Substanz äußerlich auch zu sein pflegt.

Die Kohäsion hat nach einer Richtung einen Minimalwert, falls sie keine oder nur eine unmerkliche Änderung in der nächsten Nähe derselben Richtung erfährt. Daß die Kohäsion auch Maximalwerte haben muß, ist selbstverständlich, denn zwei nächstliegende Minima müssen durch ein Maximum getrennt werden. Auch das Maximum der Kohäsion nach einer Richtung hat dieselbe Eigenschaft wie das Minimum, daß in der nächsten Nähe derselben die Kohäsion keine oder nur eine unmerkliche Änderung erfährt.

Es ist eine wichtige Aufgabe der kristallographischen Forschung, die Minima und die Maxima der Kohäsion herauszufinden.

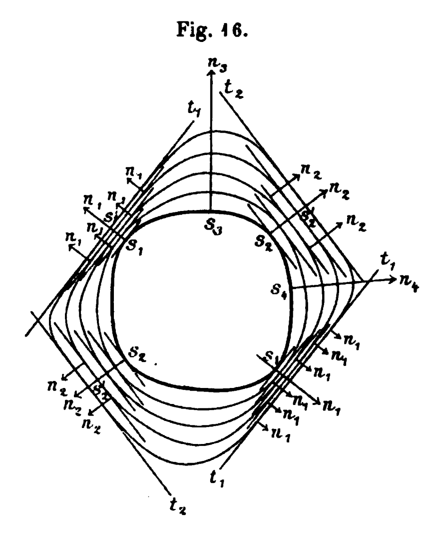
§ 10. Das Wachstum der Kristalle und die mit demselben verbundenen Kohäsionsminima.

Betrachten wir das Wachstum des Kristalls von irgend einer Form aus, die er künstlich oder natürlich erreicht hat. Eine solche Form ist durch die Schnittkurve

$s_1 s_2 s_3$ in der Zeichnungsebene, Fig. 16, angedeutet. Wir bezeichnen mit s_1 und s_2 die beiden Elemente, in denen nach den entsprechenden Normalen n_1 und n_2 die Minima der Kohäsion von den resp. Größen c_1 und c_2 wirken.

Wir wollen vorläufig feststellen, daß ein Wachstum möglich ist, das in jeder Richtung proportional der Größe der Kohäsion sei. Wenn ein solches Wachstum des Kristalls von selbst nicht möglich wäre, so könnten wir immer die Einrichtung so treffen, daß das verlangte Wachstum künstlich zustande kommt. Das Wachstum des Kristalls muß also minimal sein in den Richtungen der Normalen n_1 und n_2, demgemäß anderwärts verschiedene Werte aufweisen und zwar keinen minimalen, noch auch solche, welche denjenigen der Richtungen n_1 und n_2 gleich sind. Wenn also nach gewisser Zeit die Oberflächenelemente s_1 und s_2 bis zu s_1' und s_2' gelangt sind, werden die übrigen Elemente weiter sich entwickelt haben und das Resultat wird sein, daß, welches auch im Anfange die Gestalt des Kristalls sein mochte, sie nach gewisser Zeit sich derjenigen genähert haben wird, welche durch die Tangenten t_1 und t_2 bestimmt ist. Hat der Kristall einmal eine solche Form erreicht, dann schreitet sein Wachstum immer gleichmäßig fort, überall mit gleichen Geschwindigkeiten senkrecht zu den Tangenten t_1 und t_2.

Fig. 16.



Bedenken wir aber ferner, daß zwischen den Richtungen n_1 und n_2 die Richtungen n_3 und n_4 vorhanden sein müssen, nach welchen die Kohäsion ihr Maximum erreicht, so werden wir inne, daß der Kristall die durch die Tangentialebenen t_1 und t_2 bestimmte Form noch schneller erreichen wird, als wenn die Kohäsionsminima allein vorhanden wären. Wir kommen demnach zu folgendem Schluß:

Wächst der Kristall nach allen Richtungen proportional zu den nach diesen Richtungen herrschenden Kohäsionskräften, so nimmt der Kristall die Form an, welche durch die zu den Kohäsionsminima senkrechten Ebenen bestimmt ist.

Wir werden immerfort den Ort einer Ebene durch die Lage ihrer Normalen festsetzen, also auch sagen, daß der Ort der Normalen denjenigen der Ebene ersetzt. Durch diese Verkürzung bekommt der letzte Satz folgende einfachere Fassung: Der Kristall nimmt die Gestalt an, welche durch die Örter der Kohäsionsminima gegeben ist.

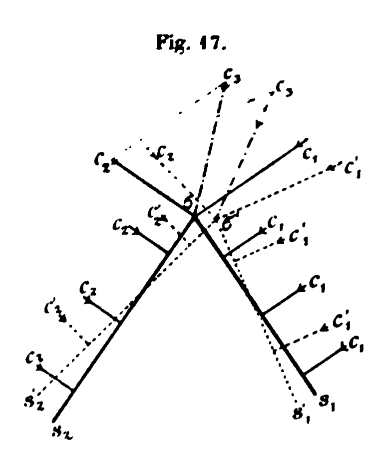
§ 11. Beziehung der Kohäsionsminima untereinander.

Wenn nur zwei Kohäsionsminima gegeben sind c_1 und c_2 nach den resp. Richtungen n_1 und n_2, so würde der Kristall eine solche Form annehmen,

welche durch die Ebenenflächen s_1 und s_2 senkrecht zu n_1 resp. n_2 gebildet ist, selbstverständlich falls das Wachstum in jeder Richtung proportional zu der in derselben herrschenden Kohäsion ist.

Die Fig. 17 stellt eben nur einen Teil dieser Form dar; hier bezeichnen die Geraden s_1 und s_2 die gleichnamigen Ebenenflächen. Wächst aber der Kristall senkrecht zu s_1 mit der Geschwindigkeit c_1 und senkrecht zu s_2 mit der Geschwindigkeit c_2, so erfährt die durch den Punkt σ dargestellte Kante σ, wo s_1 und s_2 sich schneiden, ein ganz bestimmtes Wachstum und zwar nach einer ganz bestimmten Richtung. Man kann das Wachstum sich in der Weise vorstellen, daß die Fläche s_1 nach außen verschoben wird mit der Geschwindigkeit c_1, und die Fläche s_2 mit der Geschwindigkeit c_2; dann muß man aber schließen, daß die Kante σ weder mit der Geschwindigkeit c_1 noch mit der Geschwindigkeit c_2 nach außen verschoben wird, sondern mit einer Geschwindigkeit, welche die Resultante aus c_1 und c_2 ist und Größe sowie Richtung von c_3 besitzt, wenn c_3 die Diagonale des mit c_1 und c_2 gebildeten Parallelogramms ist. Wir denken uns natürlich, daß zu diesem Behufe die Kante σ etwa durch eine unendlich kleine Fläche repräsentiert ist, worauf senkrecht eine Kohäsion wirksam sein kann, denn ohne eine Fläche, und sei sie noch so klein, können wir uns nicht ein Wachstum vorstellen.

Fig. 17.



Wenn also der Kristall nach allen Richtungen proportional zu den in diesen Richtungen herrschenden Kohäsionskräften wächst, so nimmt er vor allem diejenige Form an, welche durch die zu den Kohäsionsminima senkrechten Ebenenflächen gebildet ist, und die Wachstumsgeschwindigkeit einer Kante, wie σ, ist die Resultante aus den zwei angenommenen Minimalgeschwindigkeiten; die Geschwindigkeit c_3 stellt also auch nach Größe und Richtung die Kohäsionskraft dar.

Nun denken wir uns, daß durch irgend welchen Umstand der Kristall nicht von den Flächen s_1 und s_2 gebildet wird, sondern von den nahe liegenden Flächen s_1' und s_2'. Das wird offenbar leicht möglich sein, da in der Nähe der Richtungen, wo die Kohäsionsminima herrschen, die Kohäsion keine oder nur eine unmerkliche Änderung erfährt. Also auch senkrecht zu den Ebenenflächen s_1' und s_2' werden dieselben Wachstumsgeschwindigkeiten c_1' und c_2' vorhanden sein, zwar mit anderen Richtungen als vorher, aber von gleichen Größen wie c_1 und c_2. Die aus c_1' und c_2' entstehende Resultante c_3' wird ebenfalls nach Richtung und Größe die Kohäsion darstellen; aber c_3' hat wohl eine andere Richtung als c_3, nicht aber eine andere Größe. Die Größe c_3 hat also die merkwürdige Eigenschaft, daß in ihrer nächsten Nähe die Kohäsion keine oder nur eine unmerkliche Änderung erfährt; das gerade ist

die Eigenschaft, durch die ein Maximum oder ein Minimum sich auszeichnet. Daraus folgt der Satz:

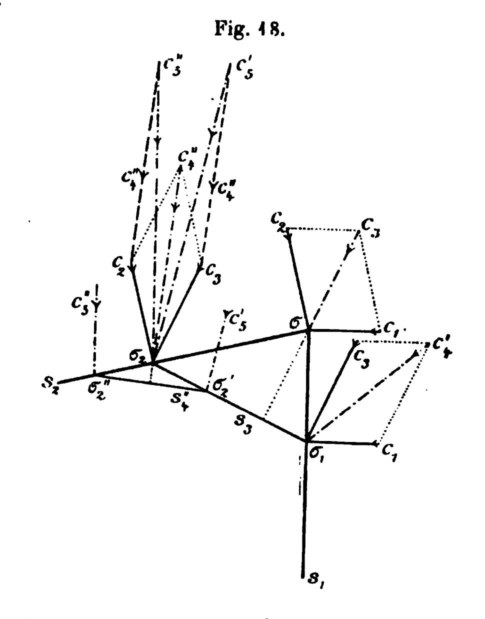
Wenn zwei Richtungen gegeben sind, in welchen die Kohäsion ihr Minimum erreicht, so muß die Größe der Kohäsion in den Diagonalen des aus den beiden Kohäsionsminima gebildeten Parallelogramms maximal oder minimal sein.

Wenn wir nun die Richtung c_3 gefunden haben, nach welcher die Kohäsion ihr Maximum oder ihr Minimum erreicht, nehmen wir an, daß c_3 Minimum sei und noch ziemlich klein; daraus wird folgen, daß senkrecht zu c_3 eine Ebenenfläche während des Wachstums zum Vorschein kommen wird, falls das Wachstum porportional der Kohäsion in jeder Richtung stattfindet.

Aber eine neue Fläche, wie etwa s_3, Fig. 18, erzeugt zwei neue Kanten σ_1 und σ_2, in der Fig. 18 durch die gleichnamigen Punkte dargestellt.

Das Wachstum des Kristalls schreitet also senkrecht zu s_1, s_2, s_3 mit den resp. Geschwindigkeiten c_1, c_2, c_3 fort. Wenn wir also aus c_1 und c_3 im Punkte σ_1 die Resultante c_4' bilden, wird diese wieder der Größe und der Richtung nach die Kohäsion des Kristalls darstellen. Desgleichen wenn c_4'' die Resultante von c_2 und c_3 im Punkte σ_2 ist, wird sie der Größe und Richtung nach die Kohäsion des Kristalls darstellen.

Fig. 18.



Aus dem Vorhergehenden folgt nun, daß sowohl c_4' als auch c_4'' Maximum oder Minimum der Kohäsion sein muß. Ist wiederum z. B. c_4'' ein Minimum und genügend klein, so wird senkrecht zu c_4'' eine Fläche, etwa s_4'' entstehen. Letztere bestimmt zwei neue parallele Kanten σ_2' und σ_2'', die durch die gleichnamigen Punkte in der Fig. 18 dargestellt sind; auf diesen zwei Kanten ist die vorhergehende Entwicklung möglich.

Also wird c_5' als Resultante von c_3 und c_4'', sowie c_5'' als Resultante von c_2 und c_4'' nach Größe und Richtung die Kohäsion des Kristalles darstellen, und zwar werden sie Minimum oder Maximum sein.

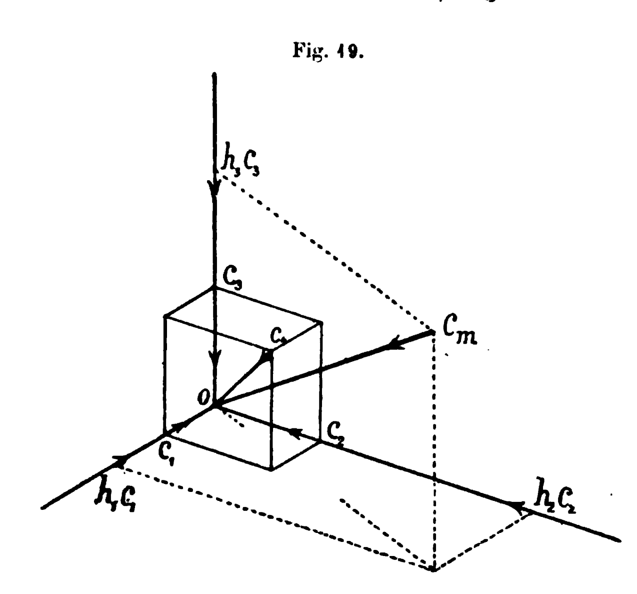
Die hier gewonnene Ableitung kann fortgesetzt werden. Alle Minima oder Maxima der Kohäsion, welche aus c_1 und c_2 abgeleitet werden, haben die besondere Eigenschaft, daß ihre schiefen Projektionen auf die Richtungen von c_1 und c_2 ein Vielfaches von c_1 und c_2 sind, oder mit anderen Worten:

Die Maxima und die Minima der Kohäsion sind die Resultanten der Vielfachen von c_1 und c_2.

Es ist sehr leicht einzusehen, daß wir diese Ableitung auf Minimalwerte der Kohäsion ausdehnen können, welche im Raume gelegen sind.

Es seien c_1, c_2, c_3 die drei kleinsten nicht in einer Ebene liegenden Minimalwerte der Kohäsion eines Kristalls, Fig. 19. Wenn das Wachstum proportional zu den Kohäsionen nach allen möglichen Richtungen ist, so wird der Kristall vorerst eine solche Form annehmen, welche aus den zu c_1, c_2, c_3 senkrechten Ebenenflächen gebildet ist. Betrachten wir nun die Ecke o, wo die drei Flächen (nicht in der Figur angegeben) zusammenstoßen; so können wir, wie vorher in o die drei Minima c_1, c_2, c_3 zusammensetzen; die daraus hervorgehende Resultante c_4 wird nach Größe und Richtung die Kohäsion des Kristalls darstellen, und zwar wird sie die Eigenschaft des Maximum oder Minimum besitzen. Wir denken uns natürlich auch hier, daß die Ecke etwa durch eine unendlich kleine Fläche repräsentiert ist, worauf senkrecht eine Kohäsion wirksam sein kann, denn ohne eine Fläche, und sei sie auch noch so klein, können wir uns nicht ein Wachstum des Kristalls vorstellen.

Fig. 19.



Wir sehen also, daß wir auch aus drei Minimalwerten wie c_1, c_2, c_3 ebenso Minima und Maxima ableiten können, welche im Kristall möglich sind.

Wir schließen:

Jedes Maximum und Minimum der Kohäsion eines Kristalls wird zusammengesetzt aus den Vielfachen von drei Minima der Kohäsion.

Oder auch so:

Die schiefen Projektionen eines beliebigen Maximums oder Minimums eines Kristalls auf die drei Minimalwerte sind das Vielfache von den letzteren.

Wenn also c_1, c_2, c_3, Fig. 19, die Ausgangsminima der Kohäsion darstellen, so kann irgend welches Maximum oder Minimum der Kohäsion, wie etwa c_m als Resultante von drei nach c_1, c_2, c_3 wirkenden Kräften aufgefaßt werden, welche die vielfachen Größen von c_1, c_2, c_3 haben, also z. B. $h_1 c_1$, $h_2 c_2$, $h_3 c_3$, wie in Fig. 19 angegeben ist.

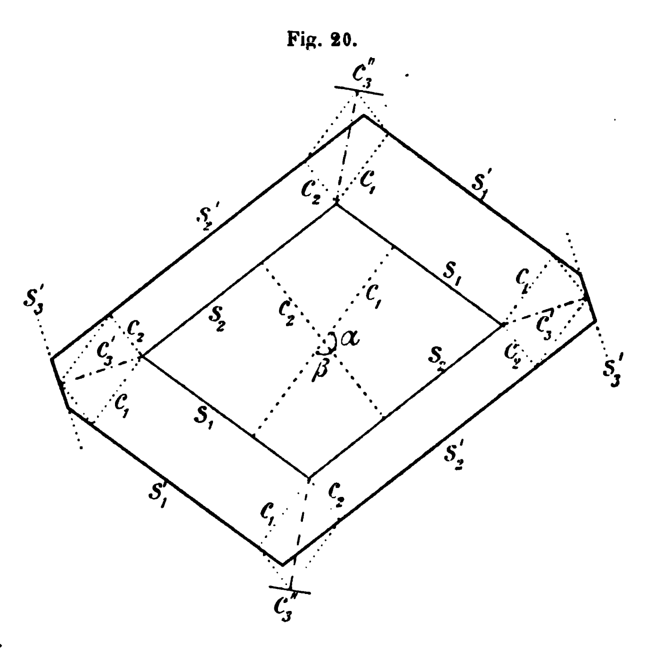
§ 12. Grundeigenschaft der Kohäsionsminima oder Grundgesetz der Kristalle.

Bis dahin ist bewiesen worden, daß die Kohäsion Maxima und Minima haben muß, und daß jedes derselben aus drei Minima, und zwar aus den kleinsten dadurch abgeleitet werden kann, daß auf letzteren das Vielfache der genannten drei Minima genommen, und sie nach der Methode der Zusammensetzung der Kräfte zusammengesetzt werden.

Das ist gleichbedeutend mit dem Satze, daß die schiefen Projektionen irgendwelches Maximums oder Minimums der Kohäsion auf drei bestimmten Minimalwerten der Kohäsion rationale Größen sind; oder noch einfacher: Die Minima und Maxima der Kohäsion eines Kristalls sind stets rational.

Man darf nicht übersehen, was dieser Satz bedeutet. Wenn das Vielfache der schiefen Projektionen durch kleine Zahlen dargestellt wird, so hat der Satz insofern eine Bedeutung, als es nur ganz bestimmte Richtungen und Größen der Kohäsion geben kann, welche dieser Bedingung genügen. Will man dagegen das Vielfache durch ganz beliebig große Zahlen darstellen, dann hat die Rationalität keinen Sinn, da irgendwelche Größe und Richtung rational werden kann, wenn nur das Vielfache durch genügend große Zahlen dargestellt wird.

Fig. 20.



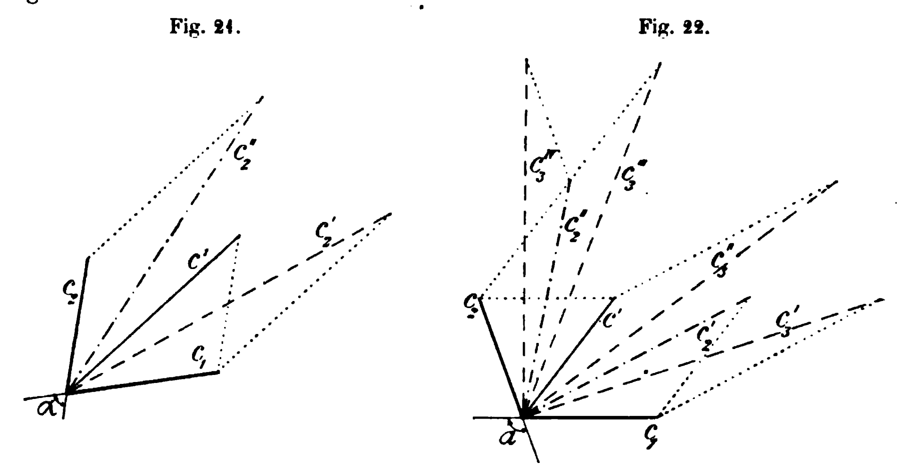
Es sollen s_1 und s_2, Fig. 20, die zwei Paar Ebenenflächen darstellen, welche senkrecht zu den zwei kleinsten Kohäsionsminima c_1 und c_2 stehen, und zur Entwicklung gelangen müssen, falls das Wachstum in jeder Richtung proportional zu der in dieser Richtung herrschenden Kohäsion ist. Sind aber c_1 und c_2 die Minimalwerte der Kohäsion, so sind c_3' und c_3'' Maxima oder Minima, weil sie aus c_1 und c_2 zusammengesetzt sind. Dieselben sind verhältnismäßig klein, und sie können sogar kleiner sein, als c_1 und c_2, wenn der von c_1 und c_2 eingeschlossene Winkel α ein stumpfer ist. Wir können mit großer Wahrscheinlichkeit sagen, daß c_3' und c_3'', d. h. die Größen der Kohäsion der ersten Ableitung, noch Minima seien. Senkrecht zu c_3' wird eine Ebenenfläche, s_3', entstehen, da der Endpunkt von c_3' noch innerhalb des von s_1' und s_2' eingeschlossenen Winkels zu liegen kommt. Wir haben

mit s_1' und s_2' die Lage der Flächen s_1, s_2 bezeichnet, welche sie nach einer gewissen Zeit infolge des Wachstums einnehmen würden; und desgleichen stellt die Strecke c_3' das Wachstum in derselben Zeit dar. Umgekehrt, wenn die zu c_3'' senkrechte Fläche vorhanden wäre, würde sie durch das Wachstum selbst abgestoßen, da eben c_3'' zu groß ist im Verhältnis zu c_1 und c_2.

Wir wollen jetzt die zwei Fälle ins Auge fassen, nämlich daß der eingeschlossene Winkel α stumpf oder daß er spitz ist:

Mit c_1 und c_2 seien die kleinsten Kohäsionsminima bezeichnet, Fig. 21 und Fig. 22.

Fig. 21. Fig. 22.



Die erste Ableitung derselben ist c'. — Wir haben soeben bemerkt, daß, wenn der zwischen c_1 und c_2 eingeschlossene Winkel ein stumpfer ist, die zu c' senkrechte Ebenenfläche zur Entwicklung gelangen muß, falls das Wachstum des Kristalls proportional zu der Größe der Kohäsion ist.

Die zweite Ableitung aus c_1, c_2 und c' liefert die Größen der Kohäsion c_2' und c_2'', welche bedeutend größer sind als c_1, c_2 und c'; vgl. Fig. 21 u. Fig. 22. Da der zwischen c_1 und c' sowie der zwischen c_2 und c' eingeschlossene Winkel ein spitzer ist, so wird das künstlich erreichte Wachstum des Kristalls keine zu c_2' oder c_2'' senkrechte Fläche verursachen können. Unter solchen Bedingungen könnten wir vielleicht annehmen, daß die Kohäsionsminima bei der zweiten Ableitung stehen bleiben, oder wir könnten bezweifeln, ob noch andere Minima möglich seien.

Ändern wir nun ein wenig die Bedingungen, welche das Wachstum beherrschen, so wird die nächste Wahrscheinlichkeit die sein, daß, falls c_2' und c_2'' Minima sind, Flächen zum Vorschein kommen, welche fast senkrecht zu c_2' bzw. c_2'' erscheinen werden. Dann wird aber auch die Möglichkeit nicht ausgeschlossen sein, daß eine dritte Ableitung der Kohäsionsminima entwickelt wird, welche den Kohäsionskräften c_3', c_3'', c_3''' ..., Fig. 22, entspricht.

Mögen diese Kräfte Minima oder Maxima sein, das steht jedenfalls fest, daß sie immerhin im Verhältnis zu c_1 und c_2 groß sind, damit noch senkrecht oder nahezu senkrecht zu denselben Ebenenflächen entstehen, falls man eine nicht zu große Änderung an den Bedingungen des Wachstums anbringen will.

Ist also der durch die zwei kleinsten Kohäsionsminima eingeschlossene Winkel stumpf, so dürfen wir durch die erste, die zweite und höchstens durch die dritte Ableitung die Kohäsionsminima herleiten; darüber hinauszugehen haben wir keinen Grund.

Ist dagegen der durch die zwei kleinsten Kohäsionsminima eingeschlossene Winkel spitz, so dürfen wir die zweite Ableitung nicht überschreiten; zuweilen wird wohl nur die erste Ableitung möglich sein.

Wir gelangen dadurch zum Grundgesetz der Kristalle, welches lautet: Die Kohäsionsminima der Kristalle setzen sich höchstens aus dem Dreifachen der kleinsten Kohäsionsminima zusammen.

Dieses Gesetz geht aus der Definition der Kristalle hervor. Wir schließen somit alle homogenen anisotropen Zustände von den Kristallen aus, welche diesem Grundgesetz nicht genügen, mögen sie flüssig oder fest sein[1]).

§ 13. Die aus den Kristallen sich ergebenden Gestalten.

Mit Kristallgrundgestalt haben wir eine ideale Gestalt definiert, welche sich aus dem Mittel von zahlreichen Kristallgestalten ergibt. Daraus folgt, daß die Grundgestalt als entstanden gedacht werden muß nach der Art, wie der Kristall bei seiner Ausbildung gewachsen ist; und zwar kann das Wachstum der Grundgestalt nur von der Größe der Kohäsion abhängig sein. Außerdem zeigt die Erfahrung, daß die Grundgestalt dieselbe ist, wie groß auch die Kristalle sein mögen, aus denen sie abgeleitet worden ist. Man muß also annehmen, daß das Wachstum, welches die ideale Grundgestalt hervorzubringen imstande ist, proportional der Größe der Kohäsion in jeder Richtung sein muß. Also: Das die Kohäsionsminima beherrschende Gesetz überträgt sich auf die Flächen der Grundgestalt der Kristalle.

Die Richtungen der Kohäsionsminima sind infolgedessen die Örter der Flächen, welche der Grundgestalt angehören.

Wir wollen uns nun genau vergegenwärtigen, wie eine Grundgestalt aus den Beobachtungen konstruiert werden kann.

Wir teilen wie vorher die ganze Abgrenzung einer Kristallgestalt in lauter kleine ebene Flächenelemente, und fixieren jedes derselben durch seine Normale, welche wir kurzweg »Ort« dieses Flächenelements genannt haben. Im folgenden Kapitel III wird angegeben sein, wie die Örter der Flächen bestimmt werden können.

1) Wir können homogene Zustände bauen, welche in bezug auf die Kohäsion sowie auf die verschiedenen physikalischen Erscheinungen anisotrop sind, und doch nicht zu den Kristallen gerechnet werden dürfen. — So z. B., wenn wir eine Säule aus dünnen Glasplatten zusammensetzen, erhalten wir offenbar einen homogenen Körper, der in bezug auf die Kohäsion, die Elastizität, das Licht usw. anisotrop ist. Ein solcher Körper ist aber kein Kristall. — Die Kohäsion ist dabei verschieden nach den verschiedenen Richtungen, besitzt aber nur ein Minimum, nämlich senkrecht zu den Platten.

Zu der Definition des Kristalles muß also noch das Merkmal treten, daß die Kohäsion verschiedene (nicht weniger als drei) nicht in einer Ebene liegende Minima besitzen muß; vergleiche § 4.

Sind die Örter festgestellt, so ziehen wir sie sämtlich durch den Mittelpunkt einer Kugel. — Diese Richtungen oder Örter der Flächenelemente werden auf der Kugeloberfläche Schnittpunkte angeben, welche genügen, um die Lage der einzelnen Richtungen oder Örter der Flächenelemente zu fixieren.* Man nennt solche Schnittpunkte Pole der Flächenelemente.

Wiederholen wir diese Operation für alle Kristallgestalten einer und derselben Substanz, die uns zu Gebote stehen, indem wir annehmen, daß sie alle gleich orientiert seien, so werden wir eine große Anzahl von Polen der Flächenelemente erhalten, die auf bestimmte Weise auf der Kugeloberfläche angeordnet sein werden, siehe Kap. VI.

Es gibt Gebiete der Kugeloberfläche, welche mit sehr vielen Polen besetzt sind, und Gebiete, in denen vielleicht keine oder nur sehr wenige Pole auftreten.

Die Pole, welche um einen Punkt stark angehäuft sind, bestimmen mit großer Wahrscheinlichkeit die Lage eines solchen Punktes. Und alle mittleren Punkte, welche mit großer Wahrscheinlichkeit bestimmt sind, geben die Flächenörter der Grundgestalt an. Alle übrigen zufälligen Örter, welche also mit kleiner Wahrscheinlichkeit bestimmt werden, fallen entweder von der Grundgestalt aus, oder kommen für die Grundgestalt nicht in Betracht.

Wenn also auch die Grundgestalt eine ideale Gestalt des Kristalls darstellt, so ist sie doch infolge der Beobachtungen bestimmbar, und zwar um so genauer, je größer die Anzahl der Kristallgestalten ist, welche für die Beobachtung zu Gebote stehen. Diese ideale Gestalt, oder diese mittlere Kristallgestalt muß also lediglich mit den Minima der Kohäsion des Kristalls im Zusammenhang stehen.

Wir haben infolgedessen in jeder kristallisierten Substanz drei eigenartige äußere Erscheinungen zu betrachten, nämlich:

1. die Grundgestalt,
2. die Kristalltracht,
3. die Gestalt im allgemeinen.

Jede dieser Erscheinungen des Kristalls gibt uns Auskunft über seine äußere Eigenschaft, seine chemische Konstitution, seine Struktur usw. Wir müssen jede derselben genau studieren.

§ 14. Geschichtliches.

Dadurch, daß Nicolaus Steno (De solido intra solidum naturaliter contento. Florentiae 1669) und wahrscheinlich frühere Naturforscher (Biringuecio 1554) darauf aufmerksam gemacht hatten, daß bei den kleinen Kristallen einer Substanz ihre herrschenden Flächen untereinander Winkel einschließen, welche dieselben sind, wie bei den großen Kristallen derselben Substanz, ist bereits das Prinzip der Homogenität niedergelegt. — Genaue Messungen liegen erst von Romé de l'Isle (Essai de Cristallographie. 2. ed. Paris 1783) vor, mit dessen Namen das Gesetz der Konstanz der Flächenwinkel belegt worden ist.

Das »Konstanz der Flächenwinkel« genannte Romé de l'Islesche Gesetz stimmt offenbar mit dem Prinzip der Homogenität überein, da in einem homogenen Zustand alle Minima der Kohäsion dieselben bleiben der Richtung und der Größe nach, von welchem Punkt des Kristalles aus sie auch betrachtet werden.

Die Einführung der Kohäsion als Hauptmerkmal der Kristalle rührt erst von R. J. Hauy her (Extrait d'un Mémoire sur la strùcture des cristaux de grenat, approuvé par l'Acad. Roy. d. Sc. le 21 Fevr. 1781. — Journ. de Phys. Mai 1782, p. 366. — Mémoire sur la structure des spath calcaires, apprv. le 22. Déc. 1781. — Journ. de Phys. Juillet 1782, pag. 33. Essai d'une théorie sur la structure des cristaux. Paris 1784. — Traité de cristallographie, 2 vol. in 8^{0}. avec atlas in 4^{0}. Paris 1828. — Traité de Minéralogie, T. I—IV, Paris 1801, — sec. édit. Paris 1822).

Hauy hebt die Spaltbarkeit der Kristalle hervor und denkt sich, daß die kleinsten einen Kristall bildenden Teilchen die Gestalt erhalten, welche von den vorhandenen Spaltungsflächen oder vorherrschenden Flächen gegeben ist. — Hauy erklärte die übrigen Flächen bei den Kristallen durch das Prinzip der Verringerung (Dekreszenz), so daß die abgeleiteten Flächen stets rationale einfache Indices bekommen. — Durch Messungen konnte Hauy das Grundgesetz der Kristalle, auch Hauysches Gesetz genannt (siehe § 42 und 133), bestätigen.

Wie man sieht, hatte Hauy das Grundgesetz der Kristalle für die Grundgestalten aufgestellt und durch die Mittelwerte der Messungen richtig gefunden, wiewohl die einzelnen Kristalle von denselben abweichen.

Chr. S. Weiß (1804) und J. J. Bernhardi haben dem Grundgesetz der Kristalle einen geometrischen Charakter gegeben, nämlich durch das Prinzip der Zonen, vergleiche § 29.

Das Weißsche Prinzip der Zonen besteht darin, daß eine Kristallfläche stets parallel zweier Zonen ist, sowie eine Zone stets zwei Flächen gemeinschaftlich sein muß.

F. E. Neumann (De lege zonarum principio evolutionis systematum crystallinorum, Berolini 1826) hatte später bewiesen, daß die geometrische Ableitung nach Chr. S. Weiß und die Verringerung nach R. J. Hauy ein und dasselbe ist. Später ist A. F. Möbius (1827) darauf zurückgekommen. — Man darf aber doch nicht vergessen, daß Hauy gewisse vorherrschende Flächen in jedem Kristall annahm, aus welchen durch einfache Verringerung andere, aber immerhin oft auftretende Kristallflächen abgeleitet werden. Mit Weiß fängt die Kristallgestalt an ein Polyeder zu sein, dessen Flächen durch das Prinzip der Zonen aus vier nicht in einer Zone liegenden Flächen abgeleitet werden.

In späterer Zeit ist das von Hauy aufgestellte Grundgesetz der Kristalle, nämlich der einfachen rationalen Indices, nicht immer vollkommen verstanden worden. So hatte A. Scacchi (Poliedria delle faccie dei cristalli. Napoli 1862) geglaubt, daß das Hauysche Gesetz nicht richtig sei, weil die meisten Kristalle, wie besonders Flußspat, Granat, Eisenkies usw., Flächen besitzen, die nicht einfache

rationale Indices haben. Er belegte solche Nebenflächen mit dem Namen Polyedrie der Flächen. Doch zeigte Scacchi, daß die Polyedrie der Flächen mit den Flächen und Zonen der Grundgestalt des Kristalles im Zusammenhang steht, was eine richtige Auffassung des Hauyschen Gesetzes bedeute. Solche Abweichungen bei den Gestalten der Kristalle hatten sogar früher Q. Sella (Quadro delle forme cristalline dell' argento rosso, del Quarzo e del Calcare. Torino 1859) und andere Naturforscher beobachtet. Q. Sella machte zugleich auf die Ähnlichkeit der Grundgestalten bei dem Quarz, Kalkspat und Rotgiltigerz aufmerksam. J. Strüver (Pirite del Piemonte e dell' Elba. Torino 1869) betonte die Verschiedenheit der Grundgestalten von den einzelnen Gestalten der Kristalle, und wies nach, daß die Kristallflächen nach ihrem Wahrscheinlichkeitsgrad geordnet werden müssen. Diese Beobachtungen Strüvers konnten erst in neuester Zeit fruchtbringend werden. M. Websky (Über die Streifung der Seitenflächen des Adulars, Berlin 1863) versuchte das Grundgesetz der Kristalle auf die ursprüngliche Bedeutung zurückzuführen, indem er betonte, daß das Grundgesetz auf die ideale, mittlere Gestalt, die Grundgestalt, wie *sie* hier genannt wird, zu beziehen ist, von welcher alle Kristallgestalten mehr oder weniger scharf abweichen und abweichen müssen. Alle kleinen Abweichungen nannte Websky Vizinalflächen, worauf wir später zurückkommen. Vergleiche Kap. V und VI.

Natürlich wurde mit dem Wort Vizinalflächen nicht viel gewonnen, denn der Begriff der einfachen rationalen Indices wurde damit nicht festgestellt.

Eine klare Einsicht in das Grundgesetz der Kristalle war erst der neuesten Zeit vorbehalten, und das Verdienst gebührt V. Goldschmidt (Über Entwicklung der Kristallformen. Leipzig 1897). Vergleiche Kap. IV und § 42.

Für die Literatur über Wachstum der Kristalle siehe § 69.

Kapitel III.

Abbildung der Kristalle.

§ 15. Stereographische Projektion.

Um Kristallgestalten, Kristalltrachten und Grundgestalten auf dem Papier darzustellen, bedient man sich der Projektionen. — Die bei der Kristallographie meist gebräuchlichen Projektionen sind die stereographische Projektion und die parallele Perspektive.

Unter stereographischer Projektion wird eine zentrale Projektion von Gebilden verstanden, welche auf einer Kugeloberfläche, der Grundkugel, liegen. Die Grundebene der Projektion geht durch den Mittelpunkt der Kugel, und das Projektionsauge liegt auf der Grundkugel, auf der höchsten Entfernung von der Grundebene. Eine solche Projektion ist in Fig. 23 schematisch dargestellt. GG ist darin der Grundkreis, wo die Grundebene die Grundkugel

schneidet, C ist das Auge, PQ ist ein Gebilde auf der Grundkugel und pq seine stereographische Projektion auf der Grundebene. Die stereographische Projektion ist also das von einem Punkt der Kugel aus gesehene Bild einer auf der Kugel liegenden Figur. Um das Bild zu finden, ziehe man durch alle Punkte des Gebildes Strahlen, welche durch das Auge C gehen; wo diese Strahlen die Grundebene treffen, sind die stereographischen Projektionen der betreffenden Punkte. Somit ist q die Projektion von Q, p die von P.

Fig. 23.

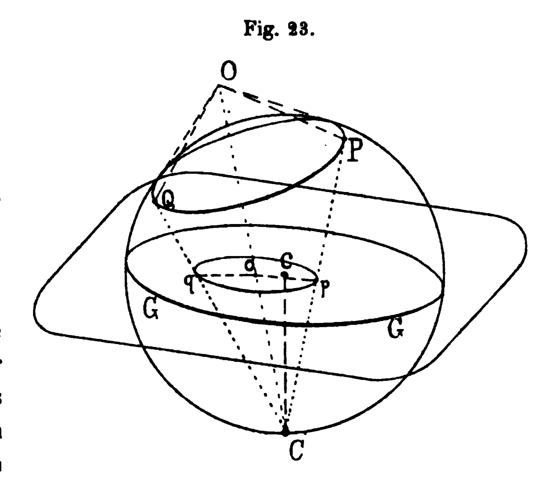
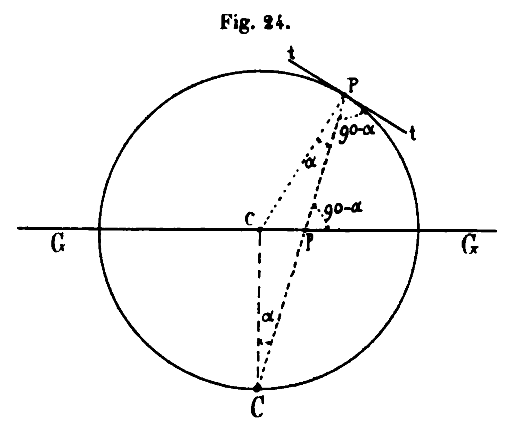


Fig. 24 stellt wieder die Grundebene GG senkrecht zur Zeichnungsebene, und C das Auge dar; c ist die Projektion von C und stimmt mit dem Zentrum der Kugel überein. P ist ein Punkt (Pol) auf der Kugel, und p ist seine stereographische Projektion.

Man betrachte die Tangentenebene auf der Kugel im Pol P, welche auf der Zeichnungsebene als die Gerade tt erscheint. Diese Tangentenebene schließt mit dem Strahl PC denselben Winkel $90^\circ - \alpha$ ein, wie die Grundebene mit demselben Strahl. Zeichnen wir also zwei Gerade auf der Tangentenebene, welche sich in P schneiden. In nächster Nähe von P liegen sie auch auf der Kugel; projizieren wir sie durch das Auge C auf der Grundebene, so werden ihre Projektionen durch p gehen.

Fig. 24.



Schließen sie z. B. einen Winkel φ ein, so müssen auch ihre Projektionen denselben Winkel φ einschließen, eben deshalb, weil Grundkreis und Tangentenebene gleich geneigt sind gegen den Strahl CpP. Was wir im Punkt P getan haben, können wir auf jedem andern Punkte der Kugeloberfläche ebenfalls tun, daher gilt die Regel:

1. Die auf der Grundkugel gezeichneten Winkel und die entsprechenden Winkel auf der stereographischen Projektion sind gleich.

PQ sei ein Kreis auf der Grundkugel, Fig. 23, und man suche seine stereographische Projektion pq. — Ziehen wir nun die Tangentenebenen auf der

Grundkugel durch alle Punkte des gegebenen Kreises QP, so umwickeln sie einen Rotationskegel, dessen Spitze der Punkt O ist. Ziehen wir den Strahl CO, den die Grundebene in O trifft, so ist o die zentrale Projektion von O. Alle Vektoren, welche durch O und durch die Punkte des gegebenen Kreises PQ gehen, werden in der Projektion auf der Grundebene Radien entsprechen, welche auch durch o gehen. Und wie die Vektoren, welche durch O gehen, den Kreis PQ rechtwinklig treffen, so müssen auch die entsprechenden Radien in der Projektion, welche durch o gehen, die Projektionskurve pq rechtwinklig treffen, eben wegen der Regel 1; daher ist die Kurve pq ebensogut ein Kreis, wie die Kurve PQ. Daraus folgt die Regel:

2. Kreise auf der Grundkugel projizieren sich auf der Grundebene als Kreise und umgekehrt.

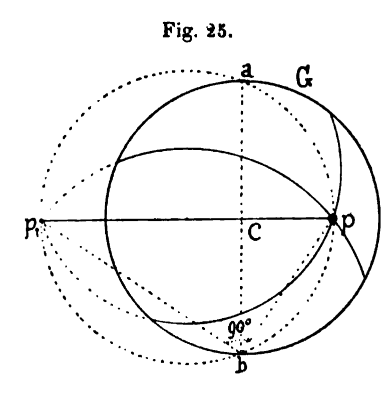
Die durch das Auge C gehenden Kreise entsprechen Geraden auf der Grundebene; und die Geraden auf der Projektion entsprechen umgekehrt den durch das Projektionsauge gehenden Kreisen.

Die Regel 2 folgert sich aus der Regel 1, und umgekehrt. Diese zwei Regeln drücken die Eigentümlichkeit der stereographischen Projektion aus. Aus denselben folgt, daß zwei Kreise auf der Grundkugel zwei Kreisen auf der Grundebene entsprechen, die sich unter demselben Winkel treffen, wie jene.

Da die großen Kreise auf der Grundkugel den Grundkreis auf zwei im Durchmesser gelegenen Punkten treffen, werden sie als Projektion solchen Kreisen entsprechen, welche ebenfalls den Grundkreis auf zwei im Durchmesser befindlichen Punkten treffen. Um in die stereographische Projektion bessere Einsicht zu bekommen, behandeln wir einige der für die Kristallographie wichtigsten Aufgaben.

1. Aufgabe: Durch einen gegebenen Punkt (Pol) p seien in stereographischer Projektion die größten Kreise zu ziehen.

Fig. 25.



Man ziehe den Durchmesser pc, Fig. 25, und den zu diesem senkrechten Durchmesser, welcher den Grundkreis in a und b trifft. Zeichnen wir einen Kreis durch p, a und b, so wird dieser einer der verlangten Kreise sein. Er trifft den Durchmesser pc auch im Punkte p_1; der Durchmesser pc trifft daher die Grundkugel auch im Punkte p_1. Daraus folgt, daß alle Kreise, welche durch die Punkte p und p_1 gehen, auch die verlangten größten Kreise darstellen werden. Es sei nebenbei bemerkt, daß die Geraden pb und $p_1 b$ aufeinander senkrecht stehen. Wir können daher sehr einfach den Pol p_1 finden.

2. Aufgabe: Durch zwei gegebene Punkte (Pole) p und q, Fig. 26, sei ein größter Kreis zu ziehen.

Man suche, wie in Aufgabe 1, auf dem Durchmesser pc den entsprechenden zweiten Pol p_1. Alle Kreise, welche durch p und p_1 gezogen werden, sind

größte Kreise; man konstruiere daher denjenigen Kreis, welcher durch q, p, p_1 geht, und die Aufgabe ist gelöst.

Wenn wir einen Durchmesser ziehen, welcher auf der Ebene eines auf der Grundkugel liegenden Kreises senkrecht steht, so heißen Pole des Kreises die zwei Punkte, wo der genannte Durchmesser die Kugel trifft. Also liegen die Pole eines größten Kreises um 90° entfernt von allen Punkten des größten Kreises.

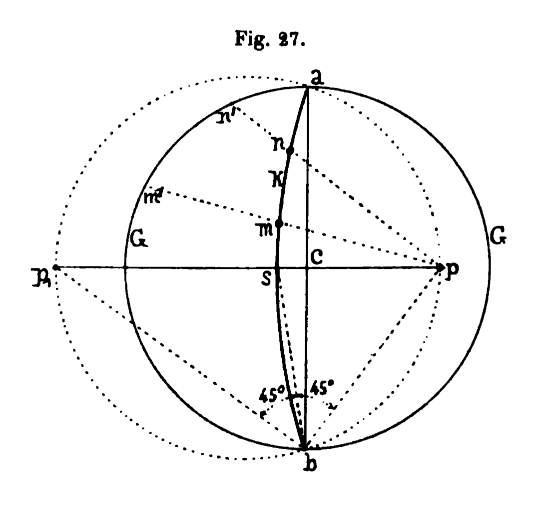
Fig. 26.

Der auf der Ebene eines Kreises senkrecht stehende Durchmesser heißt die Polare des Kreises. Das Auge der stereographischen Projektion ist ein dem Grundkreis angehöriger Pol.

3. Aufgabe: Ein größter Kreis K, Fig. 27, ist gegeben; man soll seine Pole finden.

Jeder größte Kreis, der den gegebenen größten Kreis K rechtwinklig trifft, geht offenbar durch die zwei gesuchten Pole. Der Durchmesser sc, welcher zu ab senkrecht steht, stellt einen durch das Projektionsauge gehenden größten Kreis dar, der den gegebenen Kreis senkrecht trifft. Die zwei gesuchten Pole müssen daher auf dem Durchmesser sc liegen. Wir ziehen einen größten Kreis durch die Punkte ab, welcher den gegebenen Kreis senkrecht trifft, was sehr leicht geschieht. Wo dieser Kreis den Durchmesser sc schneidet, liegen die Pole des gegebenen Kreises K. Also sind es die gesuchten Pole p und p_1. Man bemerke, daß die Geraden pb und $p_1 b$ aufeinander senkrecht stehen, und beide 45° mit der Geraden bs einschließen müssen. Dadurch ist die Konstruktion auf das Einfachste reduziert.

Fig. 27.



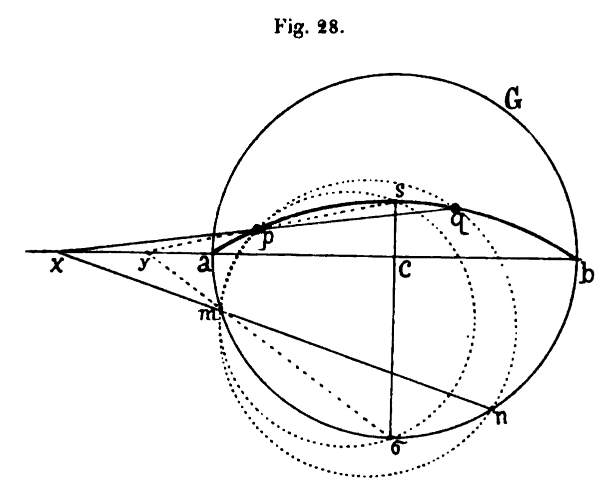
4. Aufgabe: Ein Pol ist gegeben; man soll seinen entsprechenden größten Kreis konstruieren.

Diese Aufgabe wird auf umgekehrtem Wege wie die Aufgabe 3 gelöst. — Man verbinde nämlich den gegebenen Pol p mit dem Zentrum c, Fig. 27, des Grundkreises; und auf diesem Durchmesser errichte man die Normale cb, welche den Grundkreis GG in a und b trifft. Verbindet man p mit b und zieht man die Gerade bs, welche mit der Geraden pb 45° einschließt, so wird der gesuchte Kreis durch die drei Punkte abs gehen.

5. Aufgabe: Zwei Pole sind gegeben p, q, Fig. 28; man soll den durch sie gehenden größten Kreis konstruieren.

Diese Aufgabe ist von der Aufgabe 2 insofern verschieden, als hier der größte Kreis einen sehr großen Durchmesser hat. In diesem Fall befindet sich der dem Pol p entsprechende Pol p_1 außerhalb der Zeichnungsebene, und man muß sich auf die Bestimmung von Punkten des gesuchten Kreises beschränken. Wir denken uns den gesuchten Kreis $apqb$ gezogen. Er schneidet den Grundkreis in den Punkten a, b. Wir fassen den Durchmesser ab ins Auge und ziehen durch pq irgend welchen Kreis, der den Grundkreis in den Punkten m und n trifft.

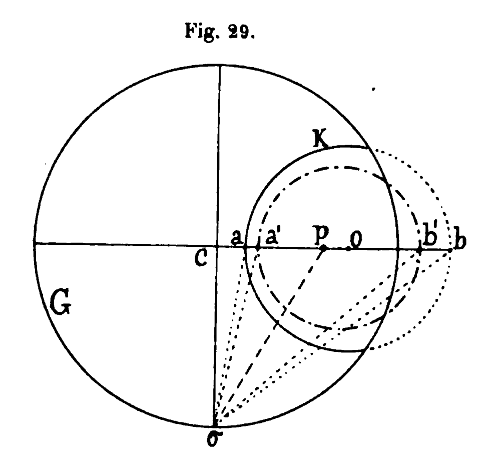
Fig. 28.



Die zwei Sehnen pq und mn schneiden sich in einem Punkt x, der auf dem Durchmesser ab liegen muß, und alle Kreise, welche durch p und q gehen, liefern Sehnen wie mn, welche durch x gehen müssen.

Nachdem der Punkt x gefunden ist, können wir den Durchmesser xc ziehen, und somit die zwei Punkte a und b des verlangten Kreises erhalten. Auch der Scheitel s dieses Kreises ist leicht anzugeben. In der Tat ziehen wir durch c die Normale zu xc, welche den Grundkreis in σ trifft. Zeichnen wir nun den durch σm und p gehenden Kreis, so bestimmt er auf $c\sigma$ den Punkt s. Die zwei Sehnen ps und $m\sigma$ müssen sich wieder auf einem Punkt y treffen, der in xc liegt. Um also s zu finden, brauchen wir nur $m\sigma$ zu ziehen, den Punkt y zu bestimmen und durch y die Sehne yp zu ziehen, welche in s die Normale $c\sigma$ schneidet.

Fig. 29.



Auf ähnliche Art sind so viele Punkte des gesuchten Kreises zu bestimmen, als man nur will.

6. Aufgabe: Ein Kreis in der Grundebene ist gegeben; man suche die zu ihm parallelen Kreise. Der Grundkreis ist G, Fig. 29, der gegebene Kreis ist K mit dem Zentrum o.

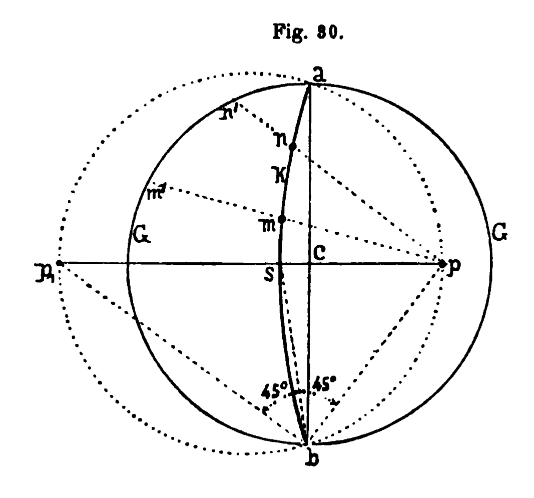
Wir konstruieren zuerst den zu dem Kreis K gehörigen Pol p. Derselbe muß auf dem Durchmesser co liegen. Wir ziehen den Durchmeser $c\sigma$, welcher zu co senkrecht steht; er schneidet den Grundkreis G in σ. Ferner ziehen wir σa und σb, und halbieren durch die Gerade σp den Winkel, welchen σa und σb einschließt, dann liegt in p der gesuchte Pol. Indem wir die Sehnen $\sigma a'$ und $\sigma b'$ so ziehen, daß sie gleiche Winkel mit σp einschließen, geht ein paralleler Kreis durch ab' und hat sein Zentrum auf co.

Der Beweis dieser Konstruktion stützt sich auf gleiche Prinzipien, welche wir zur Lösung der Aufgabe 3 angewendet haben.

7. Aufgabe: Zwei Pole m und n sind gegeben, Fig. 30; man soll den Winkel bestimmen, welcher sich auf der Grundkugel zwischen den zwei gegebenen Polen hinzieht.

Konstruieren wir vorerst durch m und n den größten Kreis nach der angegebenen Methode (Aufgabe 2), und bestimmen wir die zu diesem Kreis gehörigen Pole p und p_1. Ferner ziehen wir die Geraden pm und pn, welche den Grundkreis in m' und n' treffen. Diese zwei Geraden stellen zwei Kreise dar, welche durch das Projektionsauge gehen. Diese zwei Kreise gehen somit durch den Pol des Grundkreises und durch den Pol p des größten Kreises mn; sie werden daher auf beiden Kreisen denselben Bogen abschneiden, also muß Bogen mn und Bogen $m'n'$ gleich sein. Es ergibt sich daher folgende Regel: Um irgend einen Bogenwinkel eines größten Kreises abzumessen, haben wir die Endpunkte desselben durch einen der zwei Pole des größten Kreises nach dem Grundkreise zu projizieren und dort den Winkel abzulesen.

Fig. 30.



Denken wir uns ferner die Ebene des größten Kreises K um den Durchmesser ab so lange gedreht, bis sie in die Grundebene fällt, so wird m in m' fallen und n in n'. Die parallelen Kreise, welche zu dem Durchmesser ab senkrecht stehen, sind sowohl zu dem Kreis K als auch zu dem Grundkreis senkrecht; und folglich gehen diejenigen Kreise, welche beziehungsweise durch m' und n' gehen, auch durch m und n.

Anstatt den Pol p hätte man können den entgegengesetzten Pol p_1 benutzen.

§ 16. Stereographische Projektion der Kristalle. Gnomonische Projektion.

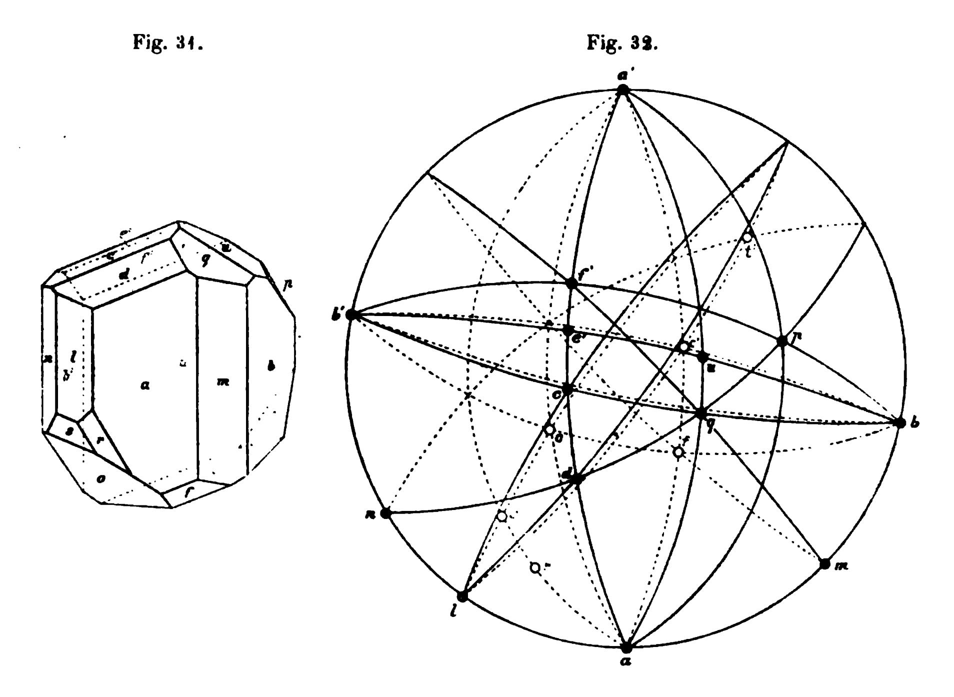
Um irgend welche Kristallgestalt stereographisch aufs Papier zu bekommen, benutzen wir die schon erwähnte Methode, die Kristallflächen durch die Lage

ihrer Normalen anzugeben. Durch das Zentrum der Grundkugel werden die Normalen der Kristallflächen gezogen und die entsprechenden Pole auf der Grundkugel bestimmt. Ist das Gebilde, die Polarfigur, auf der Grundkugel dargestellt, so projizieren wir es stereographisch auf der Grundebene. Wir erhalten also auf der Grundebene die Pole der Flächen. — Die Örter der Flächen sind daher durch Punkte (Pole) auf der Grundebene angegeben. Auch die rationalen Richtungen, die Richtungen der Kohäsionsminima werden durch Pole auf das Papier fixiert.

Flächen, welche eine Zone bilden, haben ihre Pole auf einem größten Kreis, dem Zonenkreis. — Zonenebenen, welche durch eine Richtung gehen, entsprechen auf der Grundebene Zonenkreisen, die zwei Pole gemeinschaftlich haben.

Die Polare eines Zonenkreises, welche durch die Pole desselben bestimmt ist, stellt die Achse der Zone dar.

Fig. 31. Fig. 32.



Alle Pole, welche auf einer Halbkugel liegen, kommen in stereographischer Projektion innerhalb des Grundkreises zu liegen. Jene Pole, welche auf der andern Halbkugel gelegen sind, fallen in der Projektion außerhalb des Grundkreises. Um alle Pole innerhalb des Grundkreises zu erhalten, bedient man sich des zweiten Projektionsauges, welches auf demselben Durchmesser liegt wie das erste. Die oberhalb gelegenen Pole werden gewöhnlich durch schwarze Punkte, die unterhalb gelegenen Pole durch kleine Ringe angegeben.

Die Fig. 32 gibt die stereographische Projektion des sauren rechtsweinsauren Strontium, dessen Gestalt perspektivisch in Fig. 31 nach Scacchi

dargestellt ist. Die hier bezeichneten Flächen entsprechen den dort mit denselben Buchstaben bezeichneten Polen. Die Zonenkreise korrespondieren mit den Zonen und stehen zur Kristallkante senkrecht. Die voll ausgezogenen Kreise liegen auf der obern, die punktierten Kreise auf der untern Halbkugel.

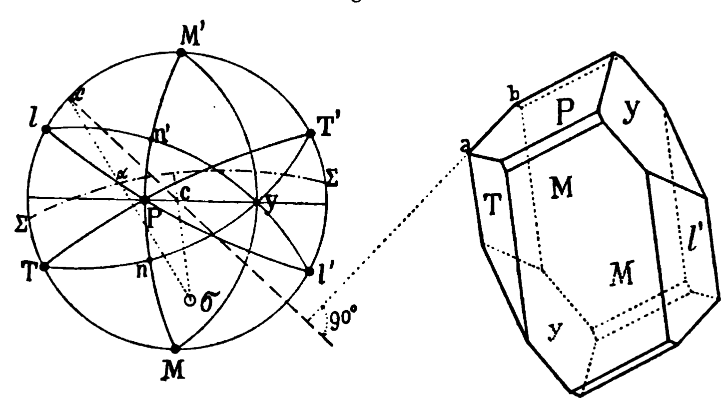
Über gnomonische Projektion wird in § 109 gesprochen.

§ 17. Parallele Perspektive der Kristalle.

Stellen wir uns ein Polyeder vor in der Zeichnungsebene, und fällen wir Normale auf die letztere von allen Ecken des Polyeders aus. Wo diese Normalen die Zeichnungsebene treffen, sind Punkte, welche parallele Perspektiven heißen oder auch normale Projektion der genannten Ecken. Verbindet man nachher die Perspektiven der Ecken durch Gerade, so bekommen wir ein Bild, welches parallele Perspektive des Polyeders heißt.

Wir wollen uns jetzt die Aufgabe stellen, die ideale Kristallgestalt des Orthoklas in paralleler Perspektive zu zeichnen, nachdem die stereographische Projektion der genannten Kristallgestalt gegeben ist, vgl. Fig. 33. — Die gegebenen Pole sind P, M, M', T, l, T', l', y, n und n'. Die größten Kreise, welche diese Pole verbinden, stellen die bezüglichen Zonen des Orthoklas dar.

Fig. 33.



Um unsere Aufgabe zu lösen, haben wir die Zeichnungsebene in bezug auf die Grundebene der stereographischen Projektion zu wählen, die Kristallgestalt darauf normal zu projizieren und nachher die Zeichnungsebene aufs Papier zu legen. Die Zeichnungsebene sei durch den größten Kreis $\Sigma\Sigma$ gegeben, dessen Pol σ sein soll, welcher nach Aufgabe 3 zu bestimmen ist. Wir wollen beispielsweise die Projektion derjenigen Kante zeichnen, welche durch den Zonenkreis lPl' gegeben ist. Dieser Kreis schneidet in α den Kreis $\Sigma\Sigma$ der Zeichnungsebene. Ziehen wir die Gerade $\sigma\alpha$, welche den Grundkreis in α' trifft. Wenn wir uns den Kreis $\Sigma\Sigma$ um den Durchmesser $\Sigma\Sigma$ so lange gedreht denken, bis er in den Grundkreis zu liegen kommt, so wird Punkt α mit dem Punkt α' zusammenfallen nach Aufgabe 7. Die

Kreise lPl' und $\Sigma\Sigma$ haben nun die zwei Punkte a' und c gemein, somit ist die Gerade $a'c$ die Spur der Kreisebene lPl' auf der Zeichnungsebene.

Die Kante, deren Perspektive gezeichnet werden soll, ist aber auf der Kreisebene lPl' senkrecht, folglich ist ihre parellele Perspektive auf der Zeichnungsebene senkrecht zur Spur $a'c$. Wir haben also ab senkrecht zu $a'c$ zu ziehen, wie die Fig. 33 rechts angibt, und diese wird die parallele Perspektive der verlangten Kante. Alle anderen Kanten werden auf dieselbe Weise konstruiert, und dadurch ergibt sich die in Fig. 33 rechts gezeichnete Orthoklasgestalt, welche der links gegebenen stereographischen Projektion entspricht.

Will man die parallele Perspektive eines Kristalls auf der Grundebene der stereographischen Projektion selbst erhalten, so haben wir folgendes zu bemerken: Der Schnittpunkt a, Fig. 33, fällt mit l resp. l' zusammen, folglich auch a'. Dann fällt der Radius $a'c$ mit ll' zusammen, und wird die Kante ab auf dem Durchmesser ll' senkrecht sein.

Fig. 34.

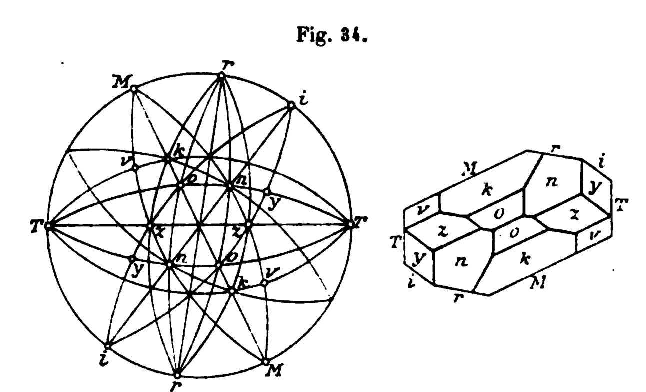


Fig. 34 rechts gibt, nach F. Stöber, die parallele Perspektive auf der Grundebene des Epidots, dessen stereographische Projektion in Fig. 34 links dargestellt ist, an.

§ 18. Anlegegoniometer.

Um die Lage oder den Ort einer Kristallfläche resp. eines Flächenelements zu bestimmen, bedient man sich der Goniometer.

Ein Goniometer ist ein Winkelinstrument, das die Winkel mit mehr oder weniger Genauigkeit angibt. Man kennt Anlegegoniometer, Grobgoniometer und Feingoniometer.

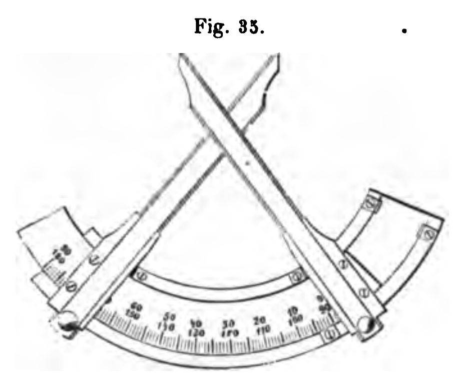
Für große Kristalle, welche nicht handlich sind, müssen Anlegegoniometer verwendet werden. Auch da wo keine genaue Messung verlangt wird, sind die Anlege- oder Grobgoniometer vorzuziehen; endlich bleibt auch dann, wenn die Kristallflächen kein deutliches Lichtbild reflektieren, zur Messung nur das Anlegegoniometer übrig.

Die Anlegegoniometer sind ein- oder zweiachsig.

Das einachsige Goniometer besteht aus Richtstäben, welche auf zwei ineinander gleitenden Halbkreisen befestigt sind, und von denen der eine (Limbus) in Grade geteilt ist und der andere (Alhidade) zwei Zeichen trägt, welche voneinander um 90° entfernt liegen, Fig. 35. Die über das Zentrum verlängerten Richtstäbe sind etwas geschärft und dienen zum Anlegen an die Kristallflächen. Beide Richtstäbe können verkürzt oder verlängert werden, je

nach der Größe des zu messenden Kristalles. Das Goniometer muß an den Kristall so angelegt werden, daß die Kante des zu messenden Winkels senkrecht zu den Kreisen steht. Der kleinste mit diesem Goniometer unvermeidliche Fehler beträgt ca. 1°.

Fig. 35.

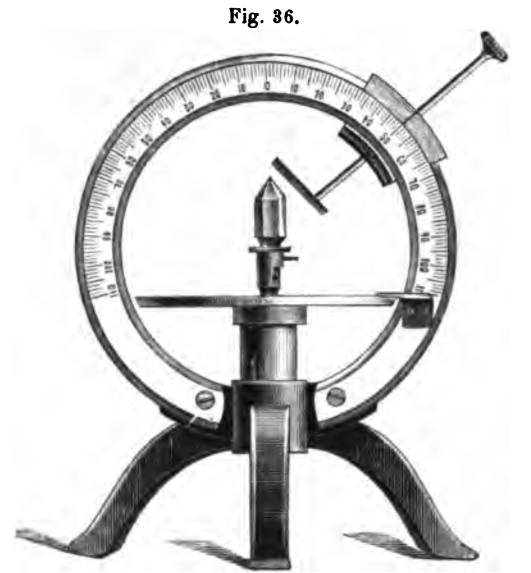


Nach R. Fueß.

Das zweiachsige Goniometer ist in Fig. 36 dargestellt. Es besteht aus einem Vertikalkreis (Meridiankreis), welcher in Grade eingeteilt ist und die auf ihm verschiebbare Anlegeplatte trägt; letztere steht auf dem Meridiankreis senkrecht und dreht sich somit um die Meridianachse, welche zu dem Meridiankreis normal steht. Die zweite Drehungsachse, die Polarachse, ist vertikal und liegt in der Meridianebene selbst, worauf der Kristall befestigt wird; sie trägt außerdem einen geteilten Horizontalkreis, den Äquator.

Wenn der Ort einer Kristallfläche gemessen werden soll, so dreht man den Kristall und gleichzeitig die Anlegeplatte so lange, bis letztere sich an die zu messende Fläche genau anlehnt. Dasselbe wird nach und nach an allen zu messenden Flächen vorgenommen. Soll eine zweite Kristallfläche, wie die erste Fläche, an die Anlegeplatte angepaßt werden, so ist der Äquatorkeis um den Winkel φ, den Oralwinkel, zu drehen, ebenso die Anlegeplatte um den Winkel ϱ, den Polarwinkel, bis sie sich an die Kristallfläche anlehnt. Dann sehen wir gleich, daß die Örter der zwei Flächen durch die zwei Winkel φ und ϱ resp. im Meridian und im Äquator voneinander abstehen. Der Oralwinkel φ kann von irgendwelchem ersten Meridian gezählt werden. Der Polarwinkel ϱ wird stets vom Pol des Instruments aus gezählt. Als Polare des Anlegegoniometers wird die Achse verstanden, um welche der Kristall sich dreht, und worauf er befestigt ist. Der Vertikalkreis ist so numeriert, daß die Polarachse genau durch den 0-Punkt (Pol des Goniometers) geht. Somit gibt die Anlegeplatte stets den

Fig. 36.



Nach V. Goldschmidt.

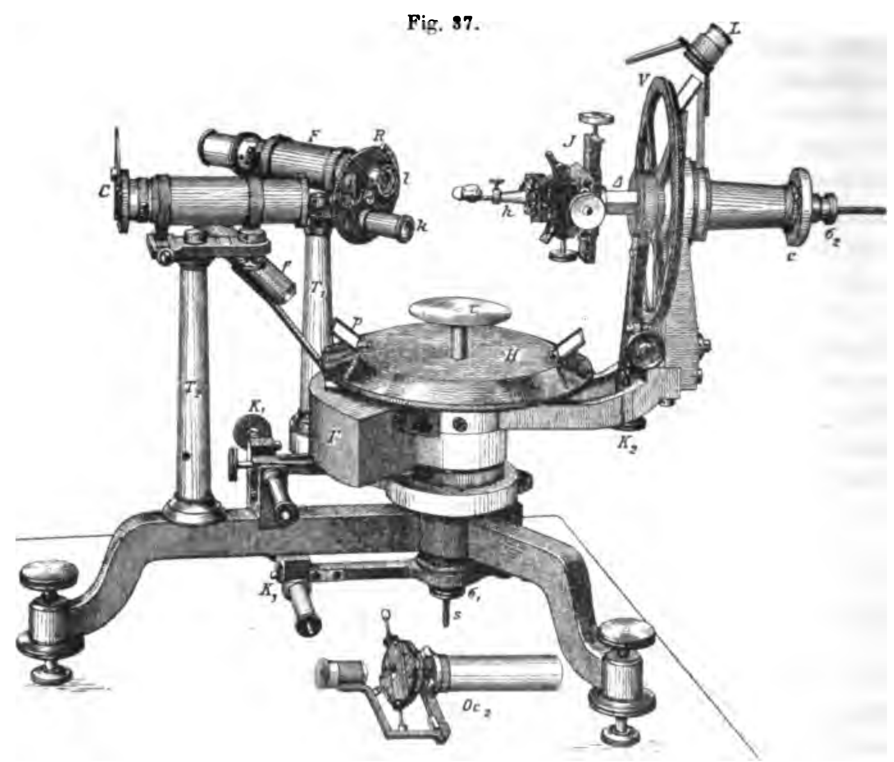
Winkel zwischen der Polare und der Normale der Fläche; wir nennen ihn eben den Polarwinkel.

Der kleinste Fehler in beiden Kreisen ist ca. 1°.

§ 19. Reflexionsgoniometer mit zwei Kreisen.

Nachdem die Beobachtungen immer mehr darauf hingewiesen haben, daß die Kristallgestalten nie die ideale Form erreichen, wie man sie sich als Kristallgrundgestalt oder als Kristalltracht vorstellt, ist man in der letzten Zeit darauf gekommen, die Kristalle mit Hilfe von zweikreisigen Goniometern zu studieren,

Fig. 37.



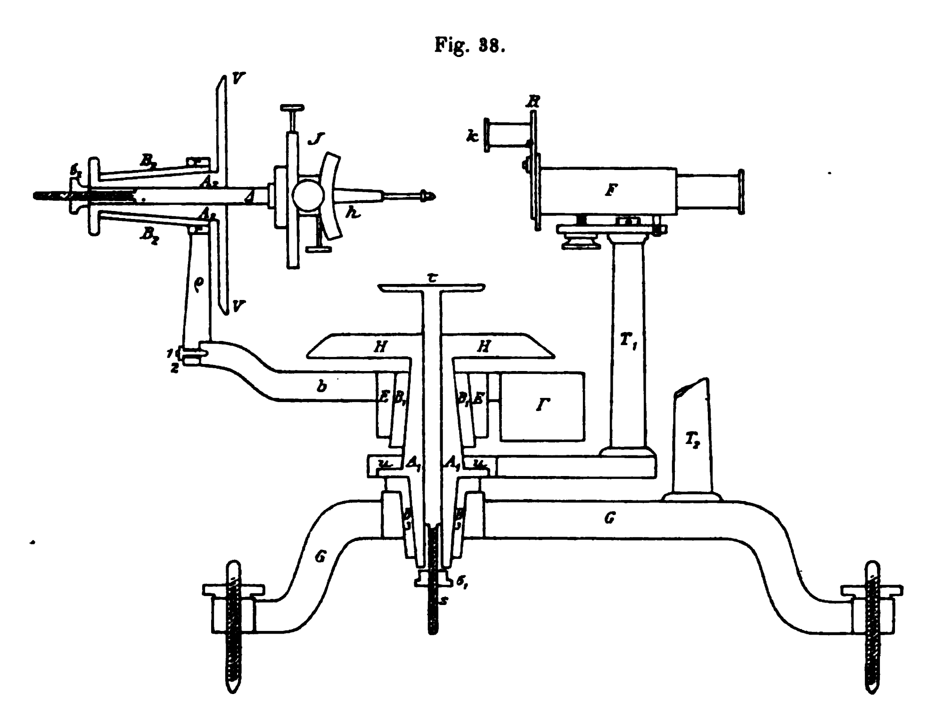
Nach V. Goldschmidt.

welch letztere ermöglichen, anstatt der Kantenwinkel die Örter der Flächenelemente mit Hilfe zweier Winkel, des Meridianwinkels (Polarwinkel) und des Äquatorialwinkels (Oralwinkel) zu bestimmen. Das Goniometer, wie es in Fig. 37 perspektivisch und in Fig. 38 schematisch gezeigt ist, besteht aus zwei Hauptteilen, dem Winkelmesser und dem Signalapparat.

Der eigentliche Winkelmesser ist zusammengesetzt aus zwei aufeinander senkrechten geteilten Kreisen, welche durch das dreifüßige Gestell *G G*, Fig. 38, getragen werden. Ein Kreis des Goniometers ist gewöhnlich horizontal *HH* und bewegt sich um die vertikale Drehachse *st*, welche fest bleibt. Der andere Kreis ist vertikal *VV*, dreht sich um die horizontale Achse Δ und kann mit seinem Träger ϱb um die vertikale Drehachse *st* gedreht werden.

Die Befestigung des Kristalls mit Hilfe des Justierapparats J geschieht auf einem dieser beiden Kreise. Derjenige Kreis, welcher direkt den Kristall trägt, ist der Äquatorkreis, der sich direkt um die Äquatorachse dreht, der andere der Meridiankreis, der sich direkt um die Meridianachse dreht.

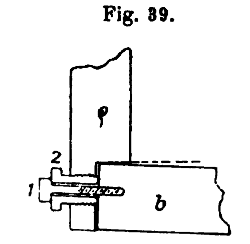
Fig. 38.



In den Figg. 37 und 38 steht der Äquatorkreis vertikal, während der Meridiankreis horizontal zu liegen kommt. In dem zweiachsigen Anlegegoniometer, Fig. 36, ist dagegen der Äquatorkreis horizontal, während der Meridiankreis vertikal steht und die Anlegeplatte trägt.

Der Beobachter muß immer in der Lage sein, die Äquatordrehachse zu justieren, damit sie senkrecht zur Meridiandrehachse wird. Zu diesem Zwecke ist der Träger ϱ mit Schraube und Gegenschraube 1, 2 versehen, welche in Fig. 39 (auch Fig. 38) veranschaulicht sind. — Zieht man die Gegenschraube 2 stärker an und lockert man die Schraube 1, so wird die Äquatordrehachse etwas gehoben, wird dagegen die Schraube 1 stärker angezogen und die Schraube 2 gelockert, so sinkt die Äquatordrehachse.

Fig. 39.



Der Zentrier- und Justierapparat J, auf dem der Kristall befestigt wird, besteht aus zwei rechtwinklig aufeinander stehenden, von Schrauben geführten Zylinderschlitten zum Justieren, und zwei aufeinander senkrecht stehenden, ebenfalls von Schrauben geführten Vertikalschlitten zum Zentrieren. Mit Hilfe der Schraube σ_2 und der beiden

Schrauben der Vertikalschlitten, Fig. 38, kann der Kristall in das Zentrum des Goniometers gebracht werden.

Der andere Hauptteil des Goniometers heißt der Signalapparat, der aus dem Kollimator C und dem Fernrohr F, Fig. 37 und 40, besteht. Der Kollimator Fig. 41 ist ein umgekehrtes Fernrohr, in dessen Brennpunkt das Signal

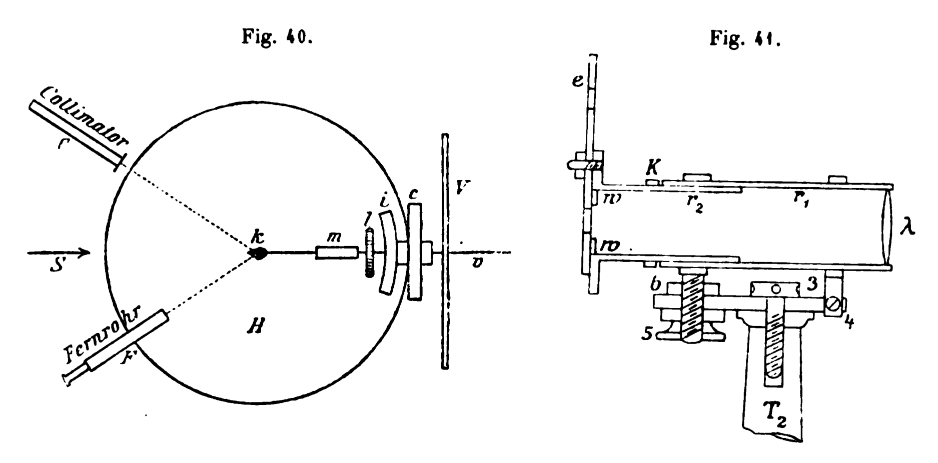


Fig. 40. Fig. 41.

liegt. Die Lichtstrahlen des durch eine Flamme beleuchteten Signals treten parallel aus dem Kollimator heraus und bewirken, daß das Signal im Unendlichen zu liegen scheint. Das Signal besteht aus einem beleuchteten Kreuz, Fig. 42, dessen Zentralpunkt die optische Achse des Kollimators fixiert.

Durch eine Platte, welche vor dem Signal exzentrisch gestellt ist, wie die Fig. 42 zeigt, hat man es in der Hand, das Signal zu öffnen oder bis auf einen beleuchteten Punkt abzublenden.

Das Fernrohr ist für das Unendliche eingerichtet, da das Signal mit Hilfe desselben entweder direkt oder reflektiert beobachtet werden muß. Durch eine Lupe, welche bald vor dem Okular, bald vor dem Objektiv angebracht wird, Fig. 44 u. 48, verwandelt sich das Fernrohr in ein Mikroskop zur Beobachtung des nahestehenden Kristalls. Im allgemeinen verfügt man über zwei verschiedene Vergrößerungen des Fernrohrs. Mit der einen ist die Genauigkeit 1′, mit der andern ist sie kleiner. Dagegen bietet die zweite Vergrößerung ein größeres Gesichtsfeld, die Lichtfigur der Kristallfläche kann daher besser überblickt werden. Das Fernrohr mit kleinerer Vergrößerung ist in Fig. 43 dargestellt.

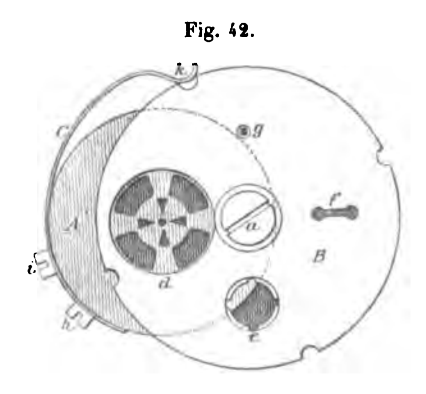
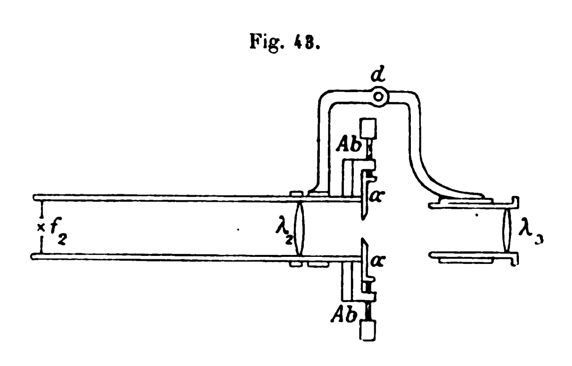


Fig. 42.

Das Bild des Signals entsteht im Fadenkreuz f_2, welches durch die Linse λ_3 beobachtet wird, dasjenige des nahestehenden Kristalls dagegen vorne

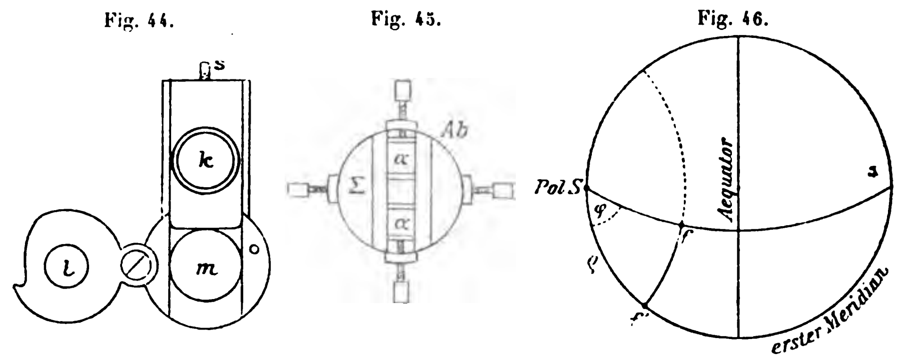
in $\alpha\alpha$. — Die Abblendung des Kristalls kann für sich selbst oder auch durch Abblendung seines Bildes geschehen. Die Vorrichtung für die letzte Methode, deren Prinzip **Abbe** und **Pulfrich** zu verdanken ist, zeigt Fig. 45, und entspricht Ab in Fig. 43. Um also das Bild des Kristalls beliebig abzublenden stellt man vor den Abblendeapparat die Lupe λ_3, welche wieder umgeschlagen werden muß, um das Bild des Signals beobachten zu können. Durch die Lupe λ_3 wird das Kristallbild stark vergrößert.

Fig. 43.



Es ist leicht begreiflich, wie mit dem zweikreisigen Goniometer die Örter der Kristallflächen bestimmt werden können. Die optische Achse des Kollimators C, Fig. 40, und die optische Achse des Fernrohrs F bestimmen die **Mittellinie** S, welche den diese beiden Achsen einschließenden Winkel halbiert. So oft eine Kristallfläche die von dem Kollimator empfangenen Lichtstrahlen nach dem Fernrohr zurückwirft und im Fadenkreuz vereinigt, so oft stimmt der Ort der Kristallfläche (d. h. ihre Normale) mit der Mittellinie S des Goniometers überein.

Fig. 44. Fig. 45. Fig. 46.



Also spielt die Mittellinie bei dem Reflexionsgoniometer, dieselbe Rolle wie die Normale der Anlegeplatte bei dem Anlegegoniometer.

Man bezeichnet mit φ den **Oralwinkel**, welcher auf dem Äquatorkreis und mit ϱ den **Polarwinkel**, Fig. 46, der auf dem Meridiankreis ersichtlich ist; es bestimmen somit die zwei Winkel φ und ϱ den Ort f der betrachteten Kristallfläche in bezug auf den Ort einer andern Fläche f' des Kristalls, von welcher aus die Zählung des Oralwinkels φ geschehen ist. Den Anfang der Zählung für den Polarwinkel bildet die Lage des Pols des Äquatorkreises.

Um mit Zuverlässigkeit die durch das Goniometer vorgenommenen Messungen beurteilen zu können muß man die Fehler kennen, welche durch dieses Instrument begangen werden. Wir werden sie in den folgenden Paragraphen studieren.

§ 20. Justieren des zweikreisigen Goniometers.

Die zwei aufeinander senkrechten Kreise sind in $^1/_2{}^\circ$ eingeteilt. 30 Teile des Nonius entsprechen 29 Teilen des Kreises; somit beträgt die Differenz zwischen diesen und jenen Teilen 1'; $^1/_2{}'$ läßt sich nach Augenmaß schätzen. Auf diesen Genauigkeitswert muß bei der Justierung des Goniometers Rücksicht genommen werden.

Da das Fernrohr für die Beobachtung ins Unendliche eingerichtet sein muß, so wird nach einem entfernten Gegenstand einvisiert und justiert. Ist das Fernrohr in dieser Weise gerichtet, so wird mit demselben das Signal beobachtet und letzteres justiert, bis sein Bild scharf ohne Parallaxe ins Fadenkreuz zu liegen kommt.

Daß das Okular dem Auge des Beobachters angepaßt werden muß, ist eine Vorsicht, welche hier wie bei jedem optischen Instrument zu beobachten ist.

Das Goniometer muß folgenden zwei Bedingungen genügen:

1. Die Mittellinie des Instruments muß normal zur Meridianachse liegen.
2. Die zwei Drehungsachsen müssen aufeinander senkrecht stehen.

1. Die erste Justierung kann entweder durch ein planparalleles Glas oder am besten auf folgende Weise vorgenommen werden:

Man bringt Kollimator und Fernrohr in eine gerade Linie, justiert das Fernrohr durch die Schraube 5, siehe Fig. 47, oder den Kollimator durch die

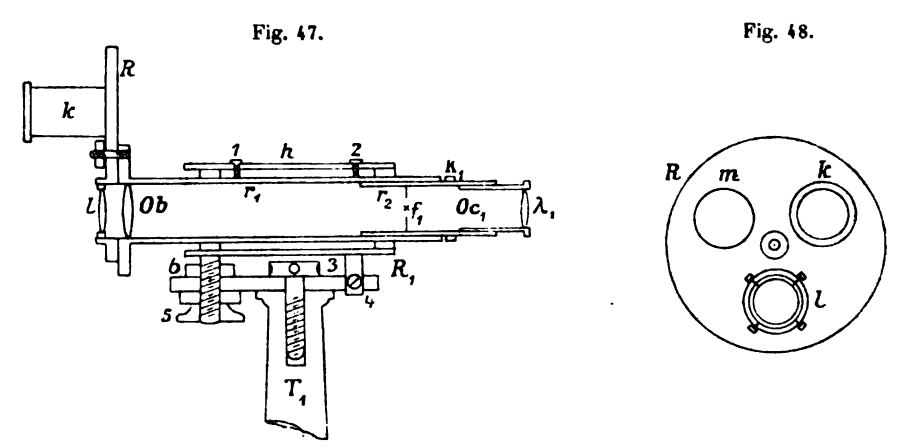


Fig. 47. Fig. 48.

Schraube 5, Fig. 41, solange bis das Signalbild genau ins Fadenkreuz einspielt; damit werden die optische Achse des Fernrohrs und die des Kollimators parallel, und somit werden beide denselben Winkel mit der Vertikalachse einschließen; nur in diesem Falle wird die Mittellinie stets senkrecht zur Vertikalachse stehen. Nachdem dies geschehen, soll in Ausführung der Bedingung

2. vorerst eine spiegelnde Ebene resp. eine gute Kristallfläche so justiert werden, daß ihr Ort, d. h. ihre Normale, genau parallel zur Äquatorachse steht, was nach Aufgabe 4 § 21 leicht geschieht, da dann das von ihr

reflektierte Bild des Signals immer unverändert stehen bleibt, wenn die Fläche um die Äquatorachse beliebig gedreht wird. Ist das erreicht, so justiert man den Träger des Äquatorkreises durch die Schrauben 1 und 2 Fig. 38, 39, bis das unverändert gebliebene Signalbild in das Fadenkreuz genau einspielt.

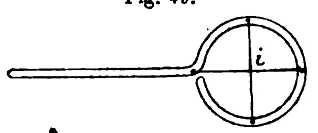
Diese zwei Justierungen sind die einzigen, welche durchaus erforderlich sind, um die Zuverlässigkeit der Messungen zu ergeben, und sie können auch jedesmal leicht vorgenommen werden. Aber um Unannehmlichkeiten bei der Beobachtung zu vermeiden, sind andere Justierungen erwünscht.

3. Die zwei Drehungsachsen des Goniometers müssen sich schneiden.

Wenn dies nicht der Fall wäre, so würde das Bild des Kristalles nicht im Zentrum des Gesichtsfeldes bleiben, wenn der Kristall um die Meridianachse und Äquatorachse gedreht wird. Um also eine weitere Justierung vorzunehmen, befestige man ein gespanntes Fädchen genau so, daß es die Äquatorachse schneidet, was leicht geschieht, da, wenn das Fädchen um die letztere um 180° gedreht wird, der Durchschnittspunkt unverändert bleibt. Stellt man dann das Fädchen parallel oder nahezu parallel zur Meridianachse, und dreht man es nachher um letztere, so verändert es seine Lage, wenn die beiden Drehungsachsen des Goniometers sich nicht schneiden. Ein Exzenter ist am Goniometer angebracht, um diesen Fehler wegzubringen.

Der Schnittpunkt der beiden Drehungsachsen heißt das Zentrum des Goniometers, das durch ein Fadenkreuz, Fig. 49, oder durch irgend welchen beleuchteten Punkt fixiert werden kann.

Fig. 49.



4. Durch das Zentrum des Goniometers muß sowohl die optische Achse des Fernrohrs als auch die des Kollimators gehen. Sollte dies nicht der Fall sein, so würden zwar die optischen Achsen des Fernrohrs und des Kollimators nach der früheren Justierung parallel sein, aber nicht übereinstimmen können, was zur Folge haben würde, daß das Signalbild verzerrt im Gesichtsfeld erschiene. Die hierauf bezügliche Justierung kann nur nach Augenmaß geschehen.

Man visiert das Signal direkt an, mit der kleineren Vergrößerung (Fernrohr der Fig. 43), und man sieht zu, ob das Bild unverzerrt in der Mitte des Gesichtsfeldes erscheint, der Seite und der Höhe nach. Man schlägt die Lupe vor dem Objektiv an, justiert das Fadenkreuz nach dem Zentrum des Goniometers, und wiederholt die vorige Justierung.

5. Man kann für andere Zwecke, denen das Goniometer dienen soll, verlangen, daß die optische Achse des Fernrohrs und die des Kollimators die vertikale Drehungsachse des Goniometers rechtwinklig schneide.

Die hierauf bezügliche Justierung kann nach zwei Methoden geschehen:

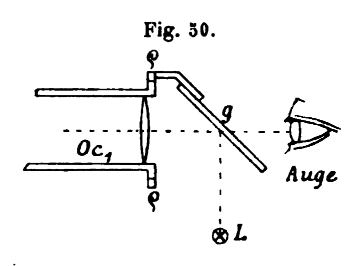
a) Durch die Autokollimation, oder

b) mit Anwendung eines kleinen Glasprisma.

Für die Autokollimation ist eine schöne ebene gut polierte Fläche nötig; oft eignen sich dazu Quarzflächen ausgezeichnet. Man stellt, nach Aufgabe 1,

§ 21, die Fläche parallel der Meridianachse durch Einvisierung des durch sie reflektierten Signals ins Fadenkreuz. Nun wird das Fadenkreuz von vorne durch eine kleine Lampe L, Fig. 50, und ein Gläschen g beleuchtet, und man dreht dann die benutzte Fläche so lange um die Meridianachse des Goniometers, bis sie das beleuchtete Fadenkreuz im Fernrohr zurückwirft und dessen Bild im Fadenkreuz selbst erzeugt. Das Fernrohr wird justiert, sodaß Fadenkreuzbild und Fadenkreuz sich vollständig decken. Das Bild des Fadenkreuzes kann nur dann deutlich gesehen werden, wenn das Fernrohr für das Unendliche eingerichtet ist.

Fig. 50.



Einfacher geschieht diese Justierung durch ein Glasprisma, wie oben bemerkt. Man stelle die Kante des Prisma parallel der Meridianachse nach Aufgabe 7, § 21, und beobachte das durch das Prisma abgelenkte gebrochene Bild, welches etwas unter- oder oberhalb des horizontalen Kreuzfadens erscheinen wird. Diese Differenz ist durch Justierung des Fernrohrs und des Kollimators um je die Hälfte zu entfernen.

6. Endlich ist es erwünscht, daß die zwei aufeinander rechtwinkligen Kreuzfäden des Fernrohrs so gerichtet seien, daß der eine parallel zur Meridianachse fällt. Auch will man, daß die eine der zwei rechtwinkligen Richtungen des Signals parallel der Meridianachse werde. Aus dieser Justierung folgt, daß, wenn das durch eine Fläche reflektierte Signalbild ins Gesichtsfeld des Fernrohrs fällt, die zwei Kreuzfäden den zwei bezüglichen Richtungen des Signalbildes parallel werden; desgleichen wenn das Signal direkt durch das Fernrohr beobachtet wird. Durch dieses Kennzeichen kann die hier in Betracht kommende Justierung vorgenommen werden.

Dreht man ferner den Kristall um die Meridianachse, so bewegt sich das Signalbild im Okular parallel dem Horizontalfaden, welcher darum Meridianfaden heißt. Dreht man dagegen den Kristall um die Äquatorachse, so bewegt sich das Signalbild parallel dem Vertikalfaden, der deshalb Äquatorfaden genannt wird.

§ 21. Das Arbeiten mit dem zweikreisigen Goniometer.

Um mit der Arbeit am zweikreisigen Goniometer vertraut zu werden, muß man sich in verschiedenen Aufgaben üben, die das Goniometer betreffen.

Damit der Kristall im Zentrum des Goniometers bleibt, ist es erforderlich, bei jeder Justierung den Kristall von Zeit zu Zeit durch die zwei geradlinigen Schlitten zu zentrieren.

1. Aufgabe: Einstellung einer Kristallfläche.

Man öffnet vollständig das Signal, damit die ganze Beleuchtung auf den Kristall fällt, schlägt die Lupe an und indem man mit einer Hand die zwei Kreise gleichzeitig dreht, wird der Reflex der genannten Fläche gesucht. Ist

das gelungen, wird die Lupe zurückgeschlagen und nun erscheint das Signalbild im Gesichtsfeld. Hierauf ist durch grobe, nachher durch feine Bewegungen das Zentrum des Bildes ins Fadenkreuz zu bringen. Die so eingestellte Kristallfläche ist parallel der Meridianachse und gegen die Äquatorachse geneigt.

2. Aufgabe: Die eingestellte Kristallfläche muß so justiert sein, daß ihr Ort einen bestimmten Winkel mit der Äquatorachse einschließt.

Wenn die Kristallfläche eingestellt ist, wird am Meridiankreis abgelesen. Nun dreht man die Kristallfläche um 180° um die Äquatorachse, bringt diese Fläche wieder zum Einstellen und liest am Meridiankreis ab. Das arithmetische Mittel der zwei Ablesungen gibt die Lage der Mittellinie an. Von dieser Lage aus wird der gegebene Winkel aufgetragen, und nun justiert man die Kristallfläche mit den beiden Zylinderschlitten bis zum Einstellen. Diese Aufgabe heißt: »das Einstellen im Parallelkreis«.

3. Aufgabe: Nachdem eine Fläche eingestellt ist, soll eine zweite Kristallfläche denselben Winkel mit der Äquatorachse einschließen.

Man vergewissert sich vorerst, ob der Ort der zweiten Fläche einen größern oder einen kleinern Winkel mit der Äquatorachse einschließt als der Ort der ersten Fläche. Hierauf wird wieder die erste Fläche eingestellt und nun die Schrauben der Zylinderschlitten in der Weise gedreht, daß das Signalbild den Äquatorfaden nicht verläßt. Dadurch bleibt die erste Fläche stets im Parallelkreis eingestellt, während die andere bald mehr bald weniger geneigt wird.

4. Aufgabe: Eine Fläche ist eingestellt; man soll sie senkrecht zur Äquatorachse bringen, oder wie man sagt »polar einstellen«:

Der Äquatorkreis wird gedreht, wodurch das Signalbild sich in einem Kreisbogen bewegt. Nun muß die Justierung mit dem Zylinderschlitten so ausgeführt werden, daß das Fadenkreuz gegen das Zentrum des Kreisbogens rückt, ohne daß das Signalbild den Meridianfaden verläßt. Durch diese Methode wird nach und nach erreicht, daß das Signalbild im Gesichtsfeld bleibt, wenn der Kristall um die Äquatorachse gedreht wird. Das Weitere folgt von selbst, indem man im Gesichtsfeld denjenigen Punkt ins Auge faßt, der beim Drehen um die Äquatorachse unverändert bleibt.

Die zur Äquatorachse senkrecht stehende Fläche hat den Polarwinkel Null. Von dieser Stelle aus wird der Polarwinkel gezählt. Sie heißt nicht nur »der Pol des Äquatorkreises«, sondern auch »der Pol des Instruments für die gegebene Lage des Kollimators«, und fällt in die Mittellinie S, Fig. 40.

5. Aufgabe: Eine Kristallfläche soll parallel der Äquatorachse justiert oder wie man sagt »im Äquator eingestellt« werden.

Diese Aufgabe wird ebenso gelöst wie Aufgabe 2.

6. Aufgabe: Eine durch zwei Kristallflächen gegebene Zone soll parallel zur Äquatorachse gestellt, d. h. im »Äquator eingestellt« werden.

Nachdem gemäß der Lösung bei Aufgabe 5 die erste Fläche genau im Äquator eingestellt wurde, ist die zweite Fläche parallel zu der Äquatorachse

zu stellen. Die Zylinderschlitten werden so bewegt, daß das Signalbild der ersten Fläche sich längs des Äquatorfadens verschiebt; dadurch bleibt die erste Fläche stets nahezu parallel der Äquatorachse, während die andere ihre Neigung verändert, bis diese Null wird. Man muß sich durch Einstellung der zweiten Fläche vergewissern, ob die Justierung nach dem richtigen Sinn geschieht, oder ob sie entgegengesetzt sein muß.

7. **Aufgabe**: Eine durch zwei Kristallflächen bestimmte Zone muß so justiert werden, daß sie senkrecht zur Äquatorachse zu liegen kommt, d. h. »sie soll im Meridian eingestellt werden«.

Eine Fläche wird eingestellt und die Zylinderschlitten werden so bewegt, daß das Signalbild sich längs des Meridianfadens verschiebt.

Während dieser Justierung muß von Zeit zu Zeit die zweite Fläche eingestellt werden, was durch gleichzeitige Drehung beider Drehungsachsen des Goniometers geschieht.

Die Justierung ist beendet, sobald die zweite Fläche durch Drehung um die Meridianachse eingestellt werden kann. Das wird nicht sofort erreicht; es muß vielmehr die feine Justierung vorgenommen werden. Man bringt zu diesem Zweck die Signalbilder beider gegebenen Flächen auf gleiche Entfernung von dem Meridianfaden, was durch gehöriges Drehen um die Äquatorachse erlangt wird. Darauf werden die Zylinderschlitten bewegt, bis beide Signalbilder auf den Meridianfaden zu liegen kommen; dadurch wird auch die gegebene Zone im Meridian eingestellt sein.

8. **Aufgabe**: Zahlreiche Flächenelemente bilden eine Zone; man soll diese Zone parallel der Äquatorachse oder im Äquator einstellen. Die Lösung wird nicht verschieden sein von der Lösung der Aufgabe 6. Vor der letzteren hat die Aufgabe 8 den Vorteil, daß die Zone hier durch eine Lichtschnur (§§ 22, 63) anstatt durch zwei Signalbilder scharf angegeben wird. Kommt letztere deutlich an zwei um 180° des Meridiankreises voneinander entfernt liegenden Stellen zum Vorschein, so genügt es, nur den halben Unterschied durch die Zylinderschlitten wegzuschaffen; damit werden dann Flächenelemente parallel zur Äquatorachse gebracht. Und nun folgt man weiter der in Aufgabe 6 angegebenen Erklärung. Sind noch andere um 180° auseinander liegende Stellen der Lichtschnur vorhanden, so wird der erwähnte Weg abermals eingeschlagen. Es wird möglich sein entweder die Lichtschnur genau in den Äquatorfaden, oder daneben zu bringen. Im letzten Fall liegen alle betrachteten Flächen nicht genau in einer Zone.

§ 22. Orientierung der Kristalle im Goniometer.

Die Kristalle lassen sich in drei große Gruppen einteilen. Sie sind entweder prismatisch, oder tafelförmig, oder wie man sagt, isometrisch gebaut. Sie unterscheiden sich nämlich dadurch, daß die prismatischen Kristalle eine ausgezeichnete Zone und die tafelförmigen Kristalle eine Fläche gut entwickelt haben; bei den isometrischen Kristallen sind mehrere Zonen und mehrere Flächen gut ausgebildet.

Da die prismatischen Kristalle eine Zone stark entwickelt haben, so werden sie stets im Goniometer so orientiert, daß diese Zone zur Drehungsachse des Goniometers, gewöhnlich zur Äquatorachse parallel zu liegen kommt. Eine durch zahlreiche Flächen ausgebildete Zone gibt im Goniometer zahlreiche Signale, welche eine Lichtschnur erzeugen. Es wird sehr leicht sein, nach Aufgabe 8, § 21, eine solche Lichtschnur in den Äquator zu bringen, da, wenn der Äquatorkreis um seine Achse gedreht wird, die Lichtschnur stets im Äquatorfaden bleiben wird. Sollte das nicht gelingen, so läßt man um ein wenig die Lichtschnur in der Nähe des Äquatorfadens vorbei laufen. Dann gibt die Äquatorachse die ideale Lage der Kristallzone an.

Die tafelförmigen Kristalle haben eine Fläche gut entwickelt; sie zeigen im Goniometer, entgegen den prismatischen Kristallen, keine deutliche Lichtschnur. Das Signalbild erscheint vielmehr wie ein Stern, § 63, dessen Mittelpunkt die ideale Lage der beiden parallelen Flächen des Kristalls, welche die tafelartige Form bedingen, angibt. In diesem Fall wird man die Kristalle so zu orientieren haben, daß der Mittelpunkt des Lichtsterns in den Pol der Äquatorebene zu liegen kommt, oder wie man sagt, daß die meist entwickelten Flächen des Kristalls polar eingestellt sind.

Ist der Kristall isometrisch, d. h. mit mehreren Zonen und mehreren Flächen gleichmäßig ausgebildet, so muß für seine Orientierung entweder die beste Zone oder die beste Fläche herausgesucht und wie oben angegeben verfahren werden. Es kann aber auch vorkommen, daß mehrere Flächen fast gleichmäßig entwickelt sind und gleichmäßig erscheinen; man wird in diesem Fall sie gleich geneigt bringen gegen die Äquatorachse.

Diese erste Orientierung, Polareinstellen einer Zone oder einer Fläche, bezweckt den Anfangspunkt der Polarwinkel festzustellen. Nach dieser Orientierung, welche Hauptorientierung heißt, folgt die zweite Orientierung, welche darin besteht, eine zweite Zone oder eine zweite Fläche, die auch gut ausgebildet sein muß, im Goniometer einzustellen, sodaß die Oralwinkel ihren Anfangspunkt erhalten.

Oft trifft es sich, daß die Spaltungsflächen Signalbilder zeigen. Diese Orientierung wird eine natürliche genannt, da man dann an gut ausgebildete Flächen oder Zonen nicht künstlich gebunden ist.

Wie man sieht, richtet sich die Orientierung des Kristalls im Goniometer nach den gut fixierbaren und entwickelten Zonen und Flächen. Die Zone ist gut fixiert durch ihre Lichtschnur, die Fläche durch ihren Lichtstern. Zeigen die Kristalle keine deutlichen und genauen Lichtschnüre oder Lichtsterne, so sind ihre Zonen und ihre Flächen physikalisch unbekannt. In diesem Falle muß der Kristall geätzt werden und ist durch die künstliche Ätzung das hervorzurufen, was durch die natürliche Entwicklung des Kristalls versäumt worden ist. Vergleiche Kap. V. Manchmal wird es nötig sein durch verschiedene Mittel den Kristall zu ätzen, um mittlere Ergebnisse zu erhalten.

Den zwei genauen Orientierungen des Kristalles im Goniometer wird im allgemeinen eine dritte Orientierung folgen, welche den Zweck hat den Sinn

anzugeben, nach welchem die Oralwinkel resp. Polarwinkel gezählt werden müssen. Siehe § 108 und folgende.

Diese dritte Orientierung ist allerdings in den meisten Fällen grob, da man mit unbewaffnetem Auge unterscheiden kann, nach welchem Sinn gewisse Flächen des Kristalls gerichtet sein werden.

§ 23. Abbildung der Kristalle.

Der Äquatorkreis des Goniometers wird Grundkreis der stereographischen Projektion. Infolgedessen fällt der Pol des Goniometers in das Zentrum der Projektion. Die Oralwinkel werden natürlich auf dem Grundkreis aufgetragen, die Polarwinkel auf die Meridiane vom Pole ab. Die Zählung der Oralwinkel wird konventionell nach dem Sinne des Uhrzeigers vorgenommen und fängt rechts an. Die Zählung des Äquatorkreises vom Goniometer geht in umgekehrtem Sinn. Auf diese Weise gibt das Bild in stereographischer Projektion sofort die treue Polarabbildung des Kristalls ohne irgendwelche Änderung.

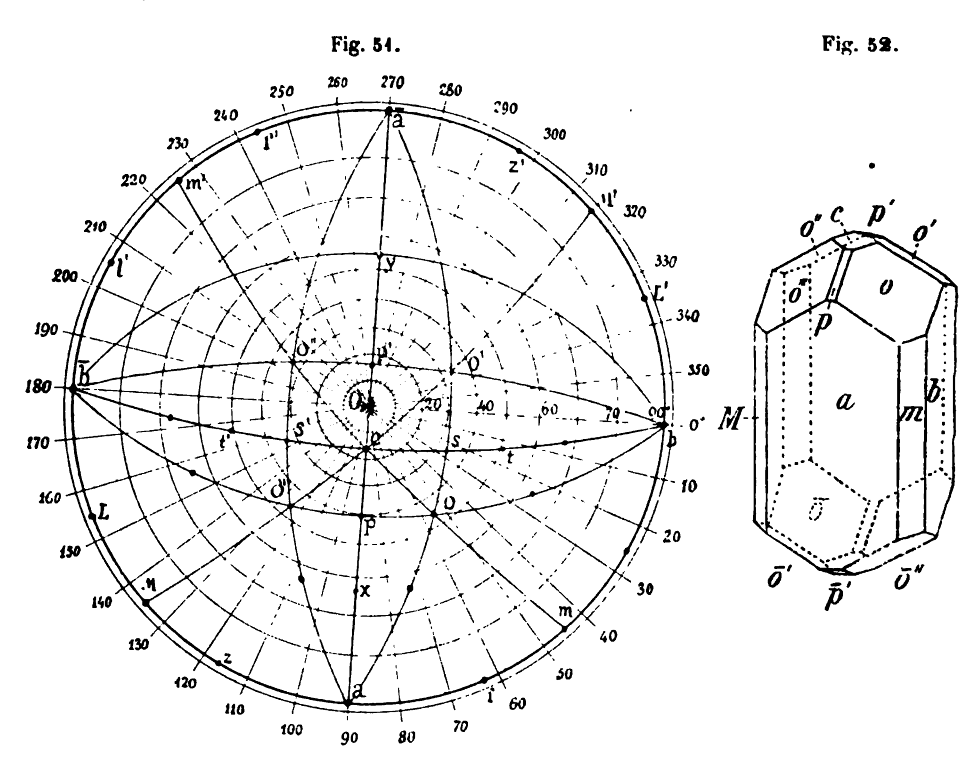


Fig. 51. Fig. 52.

Ist der Polarwinkel $= 0^{\circ}$, so liegt die Fläche im Pol, d. h. ihre Normale steht zum Äquator senkrecht; ist derselbe 90°, so sagen wir, die entsprechenden Flächen liegen im Äquator, d. h. ihre Normalen sind dem Äquator parallel. Es ist zweckmäßig, daß die Ablesung am Meridiankreis sofort die Polarwinkel angibt. Zu diesem Zweck stellt man eine spiegelnde Ebene

polar ein. Es mag z. B. die Ablesung am Meridiankreis 10°20′ betragen; diese Ablesung entspricht also der Lage der Mittellinie des Goniometers. Die Aufgabe liegt nun darin, die Mittellinie um 10°20′ zurückzudrehen, bis die Ablesung 0° ist. Da der Nonius mit dem Fernrohr verbunden ist, so muß man ersteren um 20°40′ zurückdrehen. Das Instrument ist immer so eingerichtet, daß nur für einen bestimmten Inzidenzwinkel zwischen Kollimator und Fernrohr diese Einstellung möglich ist. Will man über einen anderen Inzidenzwinkel verfügen, so ist dafür zu sorgen, daß die Differenz zwischen Ablesung am Meridiankreis und Polarwinkel eine runde Zahl betrage, z. B. 10°, 20°, . . . Hat man z. B. bei der Polareinstellung 30°16′ abgelesen und wünscht 20° zu haben, so ist der Nonius um 2 × 10°16′ zurückzudrehen.

Die Figur 51 gibt die sterographische Abbildung der wichtigsten Flächen des in Fig. 52 dargestellten Diopsidkristalls. Der Grundkreis ist in 360° eingeteilt. Die konzentrischen Kreise geben die Polarwinkel an, vom Zentrum 0 aus gezählt. Die beifolgende Tabelle zeigt die Oralwinkel φ und Polarwinkel ϱ derjenigen Pole an, welche in der Projektion der Fig. 51 aufgetragen sind. Ferner werden in der Tabelle mit Buchstaben die Pole und mit Symbolen die Flächen bezeichnet, worüber in dem Kapitel IV die Erklärung sich finden wird.

Winkeltabelle für den Diopsid.

Buchstaben Pole	Symbole der Flächen	Oralwinkel φ	Polarwinkel ϱ
a	100	90° 0	90° 0
b	010	0 0	90 0
c	001	90 0	15 51
l	120	25 25	90 0
m	110	43 33	90 0
f	210	62 15	90 0
s	011	25 43	33 11
t	021	13 32	50 29
p	101	90 0	40 10
p′	$\bar{1}01$	270 0	15 27
x	301	90 0	63 1
y	$\bar{2}01$	270 0	39 55
o	111	55 4	45 50
o′	$\bar{1}11$	304 56	33 4

§ 24. Genauigkeit der Bestimmungen mit dem Goniometer.

Die Genauigkeit der Messung richtet sich nach der Genauigkeit der Einstellung und der Ablesung. Anderweitige Fehler kommen nicht in Betracht. Nun gibt sowohl der Äquatorkreis als auch der Meridiankreis 1′. Die Genauigkeit der Einstellung wird also durch 1′ gemessen, d. h. die optische Einrichtung des Goniometers braucht nicht genauer sein als 1′.

Bei dieser gleichmäßigen Genauigkeit der Einstellung ändert sich der Fehler des Oralwinkels je nach der Größe des Polarwinkels. Wir haben in der Tat die Beziehung:

$$\varepsilon = \frac{1'}{\sin \varrho},$$

wo eben ε den Fehler des Oralwinkels φ ausdrückt und ϱ der Polarwinkel ist. Wir haben für die verschiedenen Werte:

ϱ	ε
90°	1′ 0″
60	1 10
45	1 25
30	2 0
20	3 0
10	5 46
5	11 30
0	∞

Also wächst der Fehler des Oralwinkels schnell mit dem Abnehmen des Polarwinkels und er wird ∞ für $\varrho = 0$, was wohl verständlich ist.

Untersuchen wir, welchen Einfluß dieser Fehler auf die Lage, Abbildung und Kenntnis des Kristalls haben wird.

Angenommen, es seien irgend zwei Pole mit folgenden Oral- und Polarwinkeln beobachtet worden:

Erster Pol φ_1 und ϱ_1,
Zweiter » φ_2 » ϱ_2.

Wir benutzen folgende aus der Trigonometrie bekannte Beziehung:

$$\cos \delta = \cos \varrho_1 \cos \varrho_2 + \sin \varrho_1 \sin \varrho_2 \cos (\varphi_2 - \varphi_1),$$

wobei δ den Winkel bedeutet, den der erste mit dem zweiten Pol einschließt.

Als erster Fall sei $\varrho_1 = \varrho_2$, so haben wir:

$$\cos \delta = \cos^2 \varrho_1 + \sin^2 \varrho_1 \cos (\varphi_2 - \varphi_1).$$

Wir können aber leicht diese Gleichung folgendermaßen vereinfachen:

$$\sin \frac{\delta}{2} = \sin \varrho_1 \sin \frac{\varphi}{2}; \quad \varphi = \varphi_2 - \varphi_1.$$

Wenn $\varkappa$ der Fehler ist, von welchem δ behaftet ist, so folgt:

$$\varkappa = \frac{\sin \varrho_1 \cos \frac{\varphi}{2}}{\cos \frac{\delta}{2}} \cdot \varepsilon,$$

und da

$$\varepsilon \sin \varrho_1 = 1'$$

ist, so erhält man:

$$\varkappa = \frac{\cos \frac{\varphi}{2}}{\cos \frac{\delta}{2}}.$$

Da $\delta < \varphi$ ist und folglich $\cos\frac{\delta}{2} > \cos\frac{\varphi}{2}$, so ist immer

$$\varkappa < 1'.$$

Also für Flächen, welche gleich geneigt sind gegen die Polarachse des Instruments, ist der Fehler bei Messung ihrer einschließenden Winkel stets kleiner als $1'$; für $\varrho_1 = 0$ kann er sogar Null sein, während für $\varrho_1 = 90^\circ$, $\varkappa = 1'$ ist.

Als zweiter Fall sei $\varrho_2 = 90^\circ$ in Betracht gezogen. Es ist also:

$$\cos\delta = \sin\varrho_1 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_1);$$

somit wie früher:

$$\varkappa = \frac{\sin\varrho_1 \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_1)}{\sin\delta} \cdot \varepsilon;$$

oder, da $\varepsilon \sin\varrho_1 = 1'$,

$$\varkappa = \frac{\sin(\varphi_2 - \varphi_1)}{\sin\delta} \cdot 1'.$$

Es besteht immer

$$\delta > \varphi_2 - \varphi_1,$$

also auch:

$$\sin\delta > \sin(\varphi_2 - \varphi_1),$$

folglich:

$$\varkappa < 1'.$$

Nur für $\varphi_2 - \varphi_1 = 90^\circ$ ist $\varkappa = 1'$.

Sei es also, daß

$$\varphi_2 - \varphi_1 > \delta \text{ oder } < \delta,$$

so zeigt die Methode, daß stets

$$\varkappa < 1'$$

ist.

Der Fehler, mit welchem der Oralwinkel gemessen wird, sei noch so groß, so hat er infolgedessen doch keinen Einfluß auf die reziproke Lage der Kristallflächen.

Wir können somit mit dem zweikreisigen Goniometer ebenso genau einen Kristall erkennen, mögen seine Flächen in der Nähe des Pols des Goniometers oder mögen sie am Äquator liegen.

§ 25. Geschichtliches. Literatur.

Die Kristallflächen durch ihre Normalen anzugeben und die Polfiguren für die Abbildung der Kristalle anzuwenden, sind die fruchtbaren Ideen F. E. Neumanns (Beiträge zur Kristallonomie, Berlin 1823).

Neumann hat dann auch die Polfiguren der Kristalle durch die stereographische Projektion dargestellt. Mit der stereographischen Projektion der Kristalle ist die gnomonische Projektion gleichzeitig zur Ausbildung gekommen. Wir werden von der letzteren später, § 169, sprechen.

W. H. Miller (1859) hat am meisten zur Ausbildung und Verbreitung der Neumannschen Methoden beigetragen.

Die stereographische Projektion wurde häufig dazu benutzt (so von Miller, A. Beer, J. Grailich, V. v. Lang, P. v. Groth usw.), die Beziehungen zwischen den geometrischen und den physikalischen Eigenschaften des Kristalles zur Anschauung zu bringen.

E. Reusch (Die stereographische Projektion, 1881) gab das Verfahren an, beide Hälften des Kristalles darzustellen, da die stereographische Projektion direkt nur eine Hälfte der Polfigur angibt.

Eine sehr gebräuchliche Projektion für die Kristallographie war die lineare, welche von F. E. Neumann (1823) ersonnen und von G. Rose (1828) angewendet wurde. Fr. A. Quenstedt (1835, 1840, 1855) hat diese Projektion ausführlich entwickelt; sie kommt aber jetzt kaum mehr in Anwendung.

Die parallele Perspektive war schon bei R. J. Haüy in Gebrauch. Sie wurde vornehmlich von Fr. Mohr, W. Haidinger, Fr. Naumann und G. Rose angewendet. Einfache Methoden, um die axonometrische Projektion für die Kristallzeichnung nutzbar zu machen, gaben F. Naumann, V. v. Lang, J. Weisbach und andere.

Die Methode, aus der gnomonischen Projektion die parallele Perspektive abzuleiten, rührt von V. Goldschmidt (Projektion auf die Polarform usw., Leipzig 1894) her. Dieselbe wurde hier für die stereographische Polfigur umgestaltet, wie auch G. F. Stöber (1899) gezeigt hat.

Der erste Meßapparat der Kristalle war das Anlegegoniometer mit einer Achse, das zuerst durch den Mechaniker Vinçard auf Zeichnung von Carangeot (1780) konstruiert worden ist. Das Anlegegoniometer wurde nachher von Haüy, später von Adelmann (1824), Baumgarten, Breithaupt, Rinne, Rudberg, Fuess usw. verbessert. In allerletzter Zeit hat V. Goldschmidt (durch R. Stoë in Heidelberg) das Anlegegoniometer (1895) (auch Grobgoniometer genannt) mit zwei Achsen eingeführt.

Wirkliche Einsicht in das Wesen der Kristalle konnte mit dem Anlegegoniometer allein nicht erreicht werden. Das erste Reflexionsgoniometer wurde von Wollaston (Phil. Trans. 1809) eingeführt. Als Signal dient bei diesem Goniometer ein entfernter Gegenstand. Durch Einführung eines Kollimators, welcher parallele Lichtstrahlen von dem Signal auf den Kristall wirft, konnte das Goniometer immer weitere Verbesserungen erreichen, bei denen die Namen von Adelmann (1824), Kupfer, Neumann, Malus, J. Babinet, Websky und Groth in den Vordergrund zu stellen sind.

Alle die hier erwähnten Verbesserungen sind an dem einachsigen Goniometer angebracht. Die Flächenwinkel des Kristalles konnten immer nur so gemessen werden, daß für jede andere Zone der Kristall aufs neue aufgestellt und justiert werden mußte.

Die ersten Reflexionsgoniometer hatten die Drehungsachse horizontal, so die von Wollaston, Mitscherlich usw.

Eine bequemere, einfachere und solidere Einrichtung wurde von J. Babinet erreicht durch vertikale Aufstellung der Drehungsachse.

Das Goniometer mit zwei zueinander senkrechten Drehungsachsen ist in die Kristallographie erst in allerneuester Zeit eingeführt worden, und zwar durch V. Goldschmidt (Das zweikreisige Reflexgoniometer, Leipzig 1892), E. von Fedorow (1889—1892) und S. Czapski (1893). Allerdings hatte schon Miller (1874) mit einem zweikreisigen Meßapparat gearbeitet. Das zweiachsige Goniometer von Goldschmidt und Fedorow ist so eingerichtet, daß die Meridianachse vertikal und die Äquatorachse, worauf der Kristall befestigt ist, horizontal steht.

Mit Hilfe dieser zwei Drehungsachsen erhält der Kristall zwei Drehungsbewegungen. Die Mittellinie des Goniometers ist dabei horizontal und fest während der Messung.

Bei dem Czapskischen Goniometer ist die Äquatorachse, worauf der Kristall befestigt ist, vertikal. Die Meridianachse dieses Goniometers steht horitontal und trägt die Mittellinie, welche um erstere drehbar ist.

Durch die Czapskische Einrichtung erreicht man den Zweck, den Kristall immer vertikal zu halten, was bei den anderen zweiachsigen Goniometern nicht der Fall sein kann. Aber das zweiachsige Goniometer mit unbeweglicher Mittellinie während der Messung hat einen unvergleichlichen Vorteil über das Czapskische Goniometer, da damit beide Drehbewegungen mit einer Hand gleichzeitig ausführbar sind. Überdies kann das Signal, welches mit dem Kollimator fest bleibt, leicht mit monochromatischem Licht beleuchtet werden, was bei dem Czapskischen Goniometer schwer und unbequem zu erreichen ist (Wulffsche Einrichtung und Verbesserung).

Man hat für gewisse kristallographische Arbeiten bequem gefunden, das Goniometer mit drei Kreisen zu versehen. Das erste Goniometer dieser Art wurde von Herbert Smith (Das dreikreisige Goniometer, Leipzig 1900) konstruiert. Das dreikreisige Goniometer von C. Klein (Das Kristallpolymeter, Berlin 1900) erfüllt noch besser die an diese Apparate gestellte Aufgabe, als der Apparat von H. Smith.

Für die Literatur, betreffend dieses Kapitels, seien noch erwähnt:

J. Y. Buchanan. Über die Anwendung des Globus in der Krystallographie. Ztschr. f. Krystall. **28**, **223**.

V. Goldschmidt. Das zweikreisige Goniometer (Modell 1896) und seine Justierung. Ztschr. f. Krystall. **29**, 333.

—— Über Grobgoniometer. Ztschr. f. Krystall. **29**, 589.

—— Über stereographische Projektion. Ztschr. f. Krystall. **30**, 260 mit Literatur.

E. von Fedorow. Über Krystallzeichnen. Ztsch. f. Krystall. **30**, 9.

C. Leiß. Theodolitgoniometer nach Czapski mit gewöhnlicher Signalgebung. Ztschr. f. Krystall. **31**, 49.

E. von Fedorow. Zur Theorie der krystallographischen Projektionen. Ztschr. f. Krystall. **33**, 589.

S. L. Penfield. Contactgoniometer und Transporteur einfacher Construction. Ztschr. f. Krystall. **33**, 548.

—— Über die Anwendung der stereographischen Projektion. Amer. Journ. of Science. 1901, 4 ser. **11**.

G. Wulff. Über den Gang der Rechnung in der Theodolitmethode. Ztschr. f. Krystall. **36**, 29.
—— Ein Beitrag zur Theodolitmethode. Ztschr. f. Krystall. **37**, 50.
E. von Fedorow. Das Universalgoniometer. Ztschr. f. Krystall. **32**, 464.
K. Stöckl. Das Fedorowsche Universalgoniometer in der Construction von Fueß. Ztschr. f. Krystall. **39**, 23.

Kapitel IV.

Die Grundgestalten der Kristalle.

a) Die geometrischen Eigenschaften.

§ 26. Hauptflächen, Einheitsflächen, Kristallkonstanten.

Im II. Kapitel haben wir hervorgehoben, daß die Kohäsion in Kristallen Minimal- und Maximalwerte besitzt, und daß die Kohäsionsminima einem bestimmten Grundgesetz folgen, nämlich: daß alle möglichen Minima der Kohäsion aus nur drei Minima, den kleinsten, dadurch abgeleitet werden, daß man die drei Minima auf ihren Richtungen aufträgt, ein Vielfaches davon nimmt und sie zusammensetzt nach der Methode der Zusammensetzung der Kräfte. Es hat sich ferner herausgestellt, daß das Vielfache nicht höher als 3 sein darf, und daß die Ableitung sogar bei dem Einfachen oder Zweifachen stehen bleiben muß.

Aus dieser geometrischen Beziehung geht hervor, daß zur Kenntnis aller Minima und Maxima der Kohäsion die drei kleinsten Minima hinreichen, welche nicht in einer Ebene gelegen sind.

Die drei kleinsten Minima heißen darum Hauptminima. Alle Minima der Kohäsion, welche aus den Hauptminima einfach entstehen, heißen Einheitsminima; in letztern sind auch die Hauptminima inbegriffen.

Die Flächen der Grundgestalt stehen zu den Kohäsionsminima senkrecht oder, da wir die Örter der Flächen durch ihre Normalen angeben, heißt es, daß die Flächenörter der Grundgestalt mit den Kohäsionsminima zusammenfallen. Wir werden daher mit denselben Buchstaben sowohl die Kohäsionsminima als auch die zu denselben senkrechten Flächen bezeichnen.

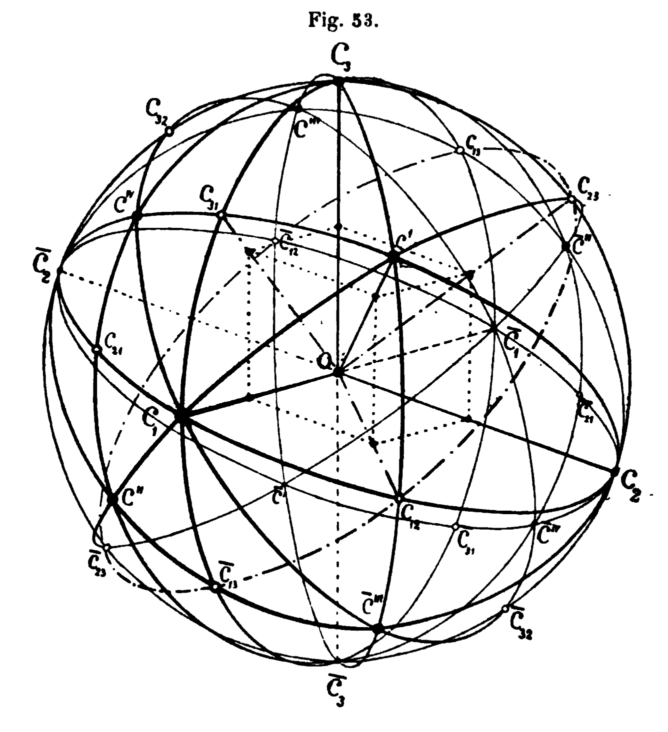
Die Flächen, welche zu den Hauptminima senkrecht stehen, heißen die Hauptflächen; sie dominieren über alle Flächen des Kristalls, und auf diese Weise werden sie erkannt. Diejenigen Flächen, welche zu den Einheitsminima senkrecht stehen, heißen Einheitsflächen. Auch sie dominieren im Kristall, aber weniger als die Hauptflächen.

Mit c_1, c_2, c_3 werden wir die Hauptminima der Kohäsion, der Größe und der Richtung nach bezeichnen. Sie geben auch die Lagen oder die Örter der Hauptflächen an.

Wie die Kohäsion nach beiden Sinnen einer Richtung denselben Wert besitzt, so tritt auch jede Fläche der Grundgestalt stets paarweise auf, oder mit andern Worten, jede Fläche hat ihre parallele Fläche und beide sind gleich ausgebildet. Man sagt darum auch, daß die Grundgestalt mit dem Symmetriezentrum versehen ist.

Werden mit $c_1, c_2, c_3, \dots$ Flächen der Grundgestalt oder Kohäsionsminima bezeichnet, so erhalten die entsprechenden entgegengesetzten parallelen Flächen, resp. Kohäsionsminima die Zeichen $\bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{c}_3, \dots$ Wird der durch c_1, c_2, c_3 bezeichnete Sinn positiv genannt, so ist natürlich der entgegengesetzte Sinn $\bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{c}_3, \dots$ negativ, aber von gleichem Werte wie der positive Sinn; darum ist jede Richtung bei der Grundgestalt einwertig.

Fig. 53.



Aus der Erforschung der Kristalle müssen die Einheitsminima herausspringen, und für jede kristallisierte Substanz müssen alle Maxima und Minima der Kohäsion zum Vorschein kommen.

In Fig. 53 sind in paralleler Perspektive alle Einheitsminima vom Mittelpunkt einer Kugel aus eingetragen; die durch diese Richtungen auf die Kugeloberfläche bestimmten Schnittpunkte bedeuten die Pole der zu diesen Richtungen senkrechten Flächen der Grundgestalt. Für jede Richtung, resp. für jede Fläche hat man natürlich zwei Pole. Daher stellt die Fig. 53 das Polarbild einer Grundgestalt dar. Dabei sind vorerst die Hauptminima der Größe und der Richtung nach durch c_1, c_2, c_3, resp. $\bar{c}_1, \bar{c}_2, \bar{c}_3$ angegeben.

Durch Zusammensetzung dieser Kräfte entstehen die Minima der I. Ableitung, d. h.:

Aus c_1, c_2 das Einheitsminimum c_{12} resp. $\bar{c}_{12}$,
» c_2, c_3 » » c_{23} » $\bar{c}_{23}$,
» c_3, c_1 » » c_{31} » $\bar{c}_{31}$,

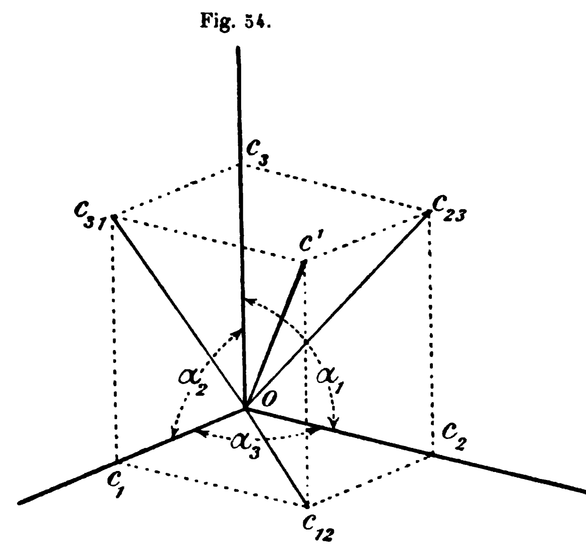
Aus	c_1, c_2, c_3	das	Einheitsminimum	c'	resp.	$\bar{c}'$,
»	$c_2, \bar{c}_1$	»	»	$\bar{c}_{21}$	»	c_{21},
»	$\bar{c}_1, c_3$	»	»	$\bar{c}_{13}$	»	c_{13},
»	c_3, c_2	»	»	c_{23}	»	$\bar{c}_{23}$,
»	$\bar{c}_1, c_2, c_3$	»	»	c''	»	$\bar{c}''$,
»	$\bar{c}_1, \bar{c}_2, c_3$	»	»	c'''	»	$\bar{c}'''$,
»	$c_1, \bar{c}_2, c_3$	»	»	c^{IV}	»	$\bar{c}^{IV}$.

Will man die Minima der II. Ableitung erhalten, so wird man zweimal die Hauptminima zu nehmen haben und sie mit einemmal der Hauptminima zusammensetzen. Auf ähnliche Art werden die Richtungen der III. Ableitung gewonnen.

Die größten Kreise $\widehat{c_2c_3}$, $\widehat{c_3c_1}$, $\widehat{c_1c_2}$ teilen die Kugeloberfläche in acht Oktanten.

Die Pole, deren Kohäsionsminima aus Vielfachen von c_1, c_2, c_3 entstehen, liegen im I. Oktanten. Die Pole, deren Kohäsionsminima aus Vielfachen von $\bar{c}_1, c_2, c_3$ entstehen, liegen im II. Oktanten. Die Pole des dritten Oktanten sind enthalten zwischen den Kreisbogen $\widehat{c_1c_2}$, $\widehat{\bar{c}_2c_3}$ und $\widehat{\bar{c}_1c_3}$. Der IV. Oktant wird begrenzt durch die Kreisbogen $\widehat{c_1\bar{c}_2}$, $\widehat{\bar{c}_2c_3}$ und $\widehat{c_1c_3}$. Das Dreieck $\widehat{c_1c_2}$, $\widehat{c_2\bar{c}_3}$ und $\widehat{c_1\bar{c}_3}$ ist das Gebiet des V. Oktanten usf.; so werden die übrigen Oktanten nach demselben Sinne gerechnet. Wir werden auch von den Flächen der Grundgestalt konventionell aussprechen, daß sie dem I., II., III., ... Oktanten angehören, wenn ihre bezüglichen Pole im I., II., III., ... Oktanten gelegen sind.

Fig. 54.



Die Kohäsionseigenschaften eines Kristalls sind bekannt, wenn sechs Größen bestimmt sein werden, nämlich die drei Hauptminima c_1, c_2, c_3 und die drei Winkel α_1, α_2, α_3 (Fig. 54), welche die Hauptminima miteinander einschließen.

Der Winkel, welchen zwei Kristallflächen einschließen, wird durch denjenigen, welchen ihre bezüglichen positiv nach außen gerechneten Normalen bilden, angegeben und heißt Flächenwinkel. Die Hauptflächen c_1, c_2, c_3 schließen also miteinander die Winkel α_1, α_2, α_3 ein, d. h. c_1 und c_2 schließen den Winkel α_3 ein, c_2 und c_3 den Winkel α_1, sowie c_3 und c_1 den Winkel α_2.

In den meisten Fällen reichen die Beobachtungen und die Hilfsmittel der Untersuchung nicht hin, um die drei Hauptminima der Richtung und der Größe nach zu bestimmen. Man begnügt sich darum, die Verhältnisse derselben allein anzugeben.

Als geometrische Konstanten des Kristalls wird man deshalb die fünf unabhängigen Größen bezeichnen:

$$\frac{c_1}{c_2}, \frac{c_2}{c_3} \text{ resp. } c_1 : c_2 : c_3 \text{ und } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 .$$

Infolgedessen beziehen sich die fünf Konstanten des Kristalls lediglich auf die Flächenwinkel der Grundgestalt; ist letztere erforscht, so sind auch die ersteren bestimmt. Wir werden nämlich die Verhältnisse

$$c_1 : c_2 : c_3$$

berechnen aus den Winkeln, welche die Fläche c' oder die Fläche c'' oder c''' oder c^{IV} mit den drei Hauptflächen c_1, c_2, c_3 einschließt.

Anstatt c', c'', c''', c^{IV} können andere Flächen gegeben sein, z. B. c_{12}, c_{23} usw. Wir haben nämlich:

$$\text{(1)} \qquad \frac{c_1}{c_2} = \frac{\sin \widehat{c_{12} c_2}}{\sin \widehat{c_{12} c_1}}; \quad \frac{c_2}{c_3} = \frac{\sin \widehat{c_{23} c_3}}{\sin \widehat{c_{23} c_2}}.$$

Auch andere Kombinationen können aufgestellt werden.

Um also die 5 geometrischen Kristallkonstanten zu bestimmen, müssen wenigstens 4 Flächen der Grundgestalt bekannt sein, deren 3 nicht parallel zu einer Geraden sind.

Aus den 5 Konstanten können alle Flächen der Grundgestalt ihrer Lage nach abgeleitet werden, welche möglich sind. — Das heißt: Alle nach der angegebenen Methode abgeleiteten Flächen sind nicht notwendig Flächen der Grundgestalt; aber alle Flächen der Grundgestalt können nur unter die abgeleiteten gerechnet werden.

Zur Orientierung der 6 Konstanten

$$c_1, c_2, c_3; \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3,$$

sei folgendes erwähnt:

Die Richtungen c_1 und c_2 positiv werden beliebig angenommen. Man nimmt konventionell für c_2 den kleinsten der drei Werte c_1, c_2, c_3. Danach denke man sich in O auf der Ebene $c_1 O c_2$ zu stehen, und drehe dann nach dem umgekehrten Sinn eines Uhrzeigers die Ebene $c_1 O c_2$ in sich selbst, bis der positive Sinn von c_1 nach dem positiven Sinn von c_2 zu liegen kommt, ohne den negativen Sinn von c_2 zu überschreiten. Der positive Sinn von c_3 geht dann nach oben, das heißt dahin, wo man gestanden ist. Auf gleiche Weise stehe man auf der Ebene $c_1 O c_3$, und drehe diese Ebene in sich selbst nach demselben Sinn, bis der positive Sinn von c_2 mit dem positiven Sinn von c_3 zusammenfällt ohne den negativen Sinn von c_3 zu überschreiten; ist das möglich, so geht der positive Sinn von c_1 nach oben, d. h. wo man gestanden

ist usf. Die Winkel α_1, α_2, α_3 werden von den positiven Richtungen c_1, c_2, c_3 gebildet.

§ 27. Indizes und Symbole der Kristallflächen.

Ein Kohäsionsminimum ist bestimmt, sobald das Vielfache der Hauptminima bekannt ist, welche das genannte Minimum znsammensetzen. Wir bezeichnen also mit $h_1 c_1$ das Vielfache von c_1, mit $h_2 c_2$ das Vielfache von c_2 und mit $h_3 c_3$ das Vielfache von c_3, die alle ein gewisses Minimum zusammensetzen.

Aus der Art und Weise wie die Kohäsionsminima abgeleitet werden, geht hervor, daß die Zahlen h_1, h_2, h_3, welche das Vielfache von c_1, c_2, c_3 angeben, relative Primzahlen sein müssen, d. h. sie sind durch keine Zahl gemeinschaftlich teilbar. Sie bestimmen das betreffende Kohäsionsminimum der Richtung und zugleich der relativen Größe nach, angenommen, daß sie relative Primzahlen sind und sich auf bestimmte Hauptminima in dieser Ordnung c_1, c_2, c_3 beziehen.

Wir dürfen also nicht sagen, daß ein Kohäsionsminimum zusammengesetzt sei z. B. aus $2 c_1$, $4 c_2$ und $6 c_3$, sondern aus c_1, $2 c_2$ und $3 c_3$. Die ersten drei Komponenten bringen dieselbe Richtung hervor, wie die letzten drei; allein das aus den ersten Komponenten sich ergebende Kohäsionsminimum ist zweimal gleich dem aus den letzten Komponenten sich ergebenden Minimum.

Wiewohl die absoluten Größen von c_1, c_2, c_3 nicht bekannt sind, so müssen wir an den relativen Größen der Kohäsionsminima festhalten; und das ist nur dadurch möglich, daß die Zahlen, welche das Vielfache von c_1, c_2, c_3 angeben, relative Primzahlen sind.

Die wichtigsten ganzen Zahlen h_1, h_2, h_3, welche nie höher als 3 sein können, heißen die Indizes eines Kohäsionsminimums. Sie sind auch die Indizes der Fläche der Grundgestalt, welche auf dem Kohäsionsminimum senkrecht steht. Mit

$$(h_1 h_2 h_3)$$

wird das Symbol der genannten Fläche bezeichnet.

Dnrch das Symbol $(h_1 h_2 h_3)$ ist der Ort der Fläche im Kristall vollständig gegeben, da man konventionell die erste Zahl auf die Richtung c_1, die zweite auf die Richtung c_2, und die dritte auf die Richtung c_3 bezieht. Bilden wir nun die Komponenten $h_1 c_1$, $h_2 c_2$, $h_3 c_3$; setzt man sie zusammen nach der Methode der Zusammensetzung der Kräfte, so ist die Resultante die Normale der gesuchten Fläche, deren Symbol $(h_1 h_2 h_3)$ ist. Die Resultante ist auch der relative Wert der Kohäsion, welche auf die genannte Fläche senkrecht wirkt. Will man andeuten, daß das Vielfache auf dem negativen Sinn der Hauptminima aufzutragen ist, so setzt man das negative Zeichen oberhalb des betreffenden Index; also z. B.:

$$(h_1 h_2 \bar{h}_3).$$

Mit diesem Symbol will man feststellen, daß man h_1-fach c_1, h_2-fach c_2 und h_3-fach $(-c_3)$ zu bilden hat, und diese Komponenten dann zusammensetzt.

Der daraus entstehende Ort der Fläche liegt im V. Oktanten. Die durch das Symbol $(\bar{h}_1 h_2 \bar{h}_3)$ bezeichnete Fläche liegt im VI. Oktanten, u. s. f.

Ein Ort, resp. eine Fläche, deren Indizes h_1, h_2, h_3 wie rationale Zahlen sich verhalten und nie größer als 3 sind, heißt ein rationaler Ort, resp. eine rationale Fläche.

Rationale Örter, resp. rationale Flächen sind mögliche Örter resp. Flächen der Grundgestalt.

28. Zonen, Zonenebenen, Zonenkreise, Zonenbüschel.

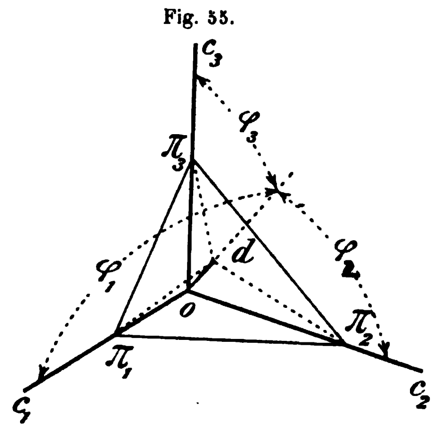
Alle Flächen der Grundgestalt, welche einer Geraden (d. h. Kante) parallel sind, bilden eine Zone. Die Ebene, welche zur Zone senkrecht steht, heißt Zonenebene. Die zur Zonenebene senkrechte Gerade heißt Zonenachse. Die Zonenebene enthält die Örter der Flächen, welche zur Zone gehören.

Die durch den Mittelpunkt der Kugel (Fig. 53) geführte Zonenebene schneidet die Kugel in einem größten Kreis, dem Zonenkreis. Die Pole derjenigen Flächen, welche in einer Zone liegen, liegen in dem entsprechenden Zonenkreis. So liegen z. B. die Pole c_3, $\bar{c}_3$, c_{31}, $\bar{c}_{31}$, c_1, $\bar{c}_1$, $\bar{c}_{13}$, c_{13}, Fig. 53, auf einem größten Kreis; also bilden die Örter Oc_3, $O\bar{c}_3$, Oc_{31}, $O\bar{c}_{31}$, Oc_1, $O\bar{c}_1$, Oc_{13}, $O\bar{c}_{13}$ eine Zonenebene.

Alle jene Zonenebenen, welche durch eine Richtung, d. h. durch einen rationalen Ort gehen, bilden einen Zonenbüschel. Die Zonenkreise eines Zonenbüschels gehen durch zwei Pole. Daher stimmt der Ort eines Zonenbüschels mit dem Ort einer Kristallfläche überein.

So wie eine Fläche durch die Lage ihrer Normalen im Raume individualisiert wird, so wird auch die Lage einer Zone durch die Lage der Zonenebene festgestellt.

Fig. 55.



Wir haben eine Fläche der Grundgestalt auf die drei Hauptflächen, d.h. auf die drei Örter der Hauptflächen bezogen. In gleicher Weise wird verfahren, um die Lage der Zonenebene festzustellen.

Schneidet die Zonenebene die drei Hauptrichtungen c_1, c_2, c_3 auf Punkten, welche von O in den resp. Entfernungen π_1, π_2, π_3 liegen, Fig. 55, so ist die Lage der Zonenebene im Kristall durch die Verhältnisse:

$$\pi_1 : \pi_2 : \pi_3$$

vollständig gegeben.

Die Zonenachse schließe mit den Richtungen c_1, c_2, c_3 resp. die Winkel φ_1, φ_2, φ_3 ein, so gelten folgende Verhältnisse:

$$\pi_1 : \pi_2 : \pi_3 = \frac{1}{\cos \varphi_1} : \frac{1}{\cos \varphi_2} : \frac{1}{\cos \varphi_3}. \tag{2}$$

§ 29. Beziehung zwischen Zonen und Flächen der Grundgestalt.

Zwei Kristallflächen sind durch ihre Symbole gegeben, nämlich:

$$(h_1' h_2' h_3') \text{ und } (h_1'' h_2'' h_3'').$$

Es handelt sich darum, die Lage der ihnen gemeinschaftlichen Zonenachse, resp. Zonenebene zu bestimmen.

Die Normalen auf die gegebenen Kristallflächen seien gezogen, Fig. 56. Ihre Längen Ol_1 und Ol_2 vom Anfangspunkt O (in der Figur nicht angegeben), bedeuten die Kohäsionsminima, welche senkrecht zur gegebenen Kristallfläche wirken.

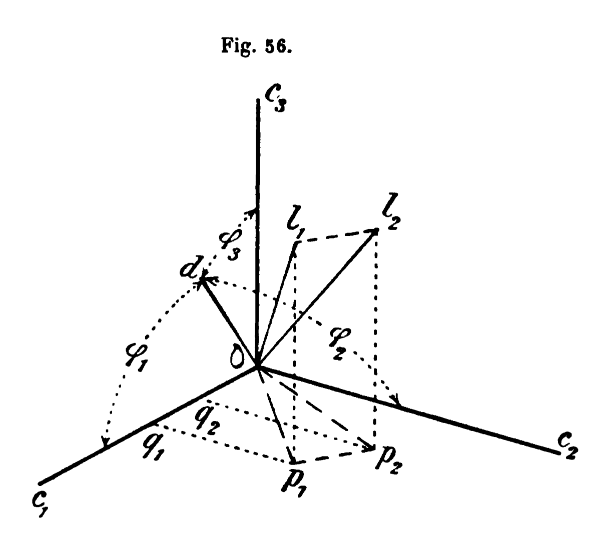
Wir erhalten die Komponenten der Strecken Ol_1 und Ol_2, indem wir durch die Endpunkte l_1 und l_2 die Parallelen zu Oc_3 führen, welche in p_1 und p_2 die Ebene $c_1 c_2$ treffen und durch p_1 und p_2 die Parallelen zu Oc_2 führen, welche die Richtung Oc_1 in q_1 und q_2 treffen. Somit setzt sich

$$Ol_1 \text{ aus } h_1'c_1 = \overline{Oq_1}, \quad h_2'c_2 = \overline{p_1 q_1} \text{ und } h_3'c_3 = \overline{l_1 p_1},$$
$$Ol_2 \text{ aus } h_1''c_1 = \overline{Oq_2}, \quad h_2''c_2 = \overline{p_2 q_2} \text{ und } h_3''c_3 = \overline{l_2 p_2}$$

zusammen.

Die Zonenachse Od, d. h. die Normale zur Zonenebene $Ol_1 l_2$, ist sowohl zu Ol_1 als auch zu Ol_2 senkrecht. Wenn man daher die Länge Ol_1 auf die Zonenachse senkrecht projiziert, so erhalten wir Null. Es muß also auch Null sein, wenn man die sämtlichen Komponenten von Ol_1, d. h. $h_1'c_1$, $h_2'c_2$, $h_3'c_3$ auf die Zonenachse senkrecht projiziert und sämtliche Projektionen zusammensummiert. Schließt also die Zonenachse Od mit c_1, c_2, c_3 resp. die Winkel $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ ein, so müssen wir haben:

Fig. 56.



$$h_1'c_1 \cos \varphi_1 + h_2'c_2 \cos \varphi_2 + h_3'c_3 \cos \varphi_3 = 0$$

oder nach (2) auch so:

$$(3) \qquad \frac{h_1'c_1}{\pi_1} + \frac{h_2'c_2}{\pi_2} + \frac{h_3'c_3}{\pi_3} = 0.$$

Man bezeichnet die ganzen relativen Primzahlen r_1, r_2, r_3, welche sich verhalten:

$$(4) \qquad r_1 : r_2 : r_3 = \frac{c_1}{\pi_1} : \frac{c_2}{\pi_2} : \frac{c_3}{\pi_3},$$

als Indizes der Zone, zu welcher die Fläche (h_1', h_2', h_3') gehört.

Indem man diese Indizes in (2) substituiert, erhält man:

$$h_1' r_1 + h_2' r_2 + h_3' r_3 = 0 . \tag{5}$$

Diese Beziehung zwischen den Indizes einer Zone und denjenigen einer Fläche drückt aus, daß die Fläche in der Zone liegt, oder daß die Fläche zur Zone gehört, oder endlich daß Fläche und Zone dieselbe Lage haben, indem die Lage einer Fläche durch ihre Normale und die Lage einer Zone durch die zu derselben senkrechte Ebene bezeichnet wird.

Da auch die Fläche $(h_1'' h_2'' h_3'')$ derselben Zone angehört, der Annahme nach, so gilt dieselbe Beziehung:

$$h_1'' r_1 + h_2'' r_2 + h_3'' r_3 = 0 . \tag{5a}$$

Indem man nun aus (5) und (5a) zuerst r_1, dann r_2 und r_3 eliminiert, erhält man die Verhältnisse:

$$r_1 : r_2 : r_3 = h_3' h_2'' - h_3'' h_2' : h_1' h_3'' - h_1'' h_3' : h_2' h_1'' - h_2'' h_1' , \tag{6}$$

welche die Lage der Zonenebene im Kristall bestimmen, wenn zwei Flächen durch ihre Indizes gegeben sind, die in der Zone liegen oder der Zone angehören.

Wären anstatt zwei Flächen zwei Zonen durch ihre Indizes gegeben, nämlich:

$$r_1' r_2' r_3' \text{ und } r_1'' r_2'' r_3'' ,$$

und es läge die Aufgabe darin, den Ort der ihnen gemeinschaftlichen Fläche $(h_1 h_2 h_3)$ su suchen, so wäre diese Aufgabe und ihre Lösung genau analog mit der soeben behandelten. Also wir können gleich hinschreiben:

$$h_1 : h_2 : h_3 = r_3' r_2'' - r_3'' r_2' : r_1' r_3'' - r_1'' r_3' : r_2' r_1'' - r_2'' r_1' . \tag{7}$$

Als Symbol einer Zone schreiben wir analog mit demjenigen einer Fläche:

$$[r_1 r_2 r_3] .$$

Sind die Indizes negativ, so wird das negative Zeichen auf die betreffenden Indizes gesetzt; so z. B.

$$[r_1 r_2 \bar{r}_3] .$$

Es seien z. B. zwei Flächen durch ihre Symbole (211) und $(0\bar{2}3)$ gegeben. Um die Indizes der zu den zwei Flächen gehörenden Zone zu finden, lassen sich die Beziehungen (6) sehr einfach praktisch ausführen. Man schreibt die Indizes einer Fläche zweimal hintereinander und setzt darunter die der andern ebenfalls zweimal, sodann läßt man die erste und die letzte Kolonne weg, wie folgt:

$$\begin{array}{c|cccc|c} 2 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ & \times & \times & \times & & \\ 0 & \bar{2} & 3 & 0 & \bar{2} & 3 \end{array} \tag{8}$$

und nun multipliziert man bei dem Rest der 4 untern und der 4 obern Indizes den ersten obern Index mit dem zweiten untern, darauf den zweiten obern mit dem ersten untern, und zieht alsdann die beiden Produkte voneinander ab, deren Differenz den ersten Index r_1 der gesuchten Zone liefert:

$$r_1 = (1 \times 3) - (1 \times \bar{2}) = 3 + 2 = 5 .$$

Durch entsprechende Fortsetzung des Verfahrens dieser kreuzweisen Multiplikation erhält man auch die beiden andern Indizes r_2 und r_3 derselben:

$$r_2 = (1 \times 0) - (2 \times 3) = 0 - 6 = \bar{6}$$
$$r_3 = (2 \times \bar{2}) - (1 \times 0) = -4 - 0 = \bar{4}.$$

Das Symbol der den Flächen (211) und (0$\bar{2}$3) angehörenden Zone ist daher [5$\bar{6}\bar{4}$].

Die Gleichung (5) kann benutzt werden für die Kontrolle, ob die Flächen (211) und (0$\bar{2}$3) wirklich zur Zone [5$\bar{6}\bar{4}$] gehören. Wir haben nämlich:

$$(2 \times 5) + (1 \times \bar{6}) + (1 \times \bar{4}) = 10 - 6 - 4 = 0 \text{ usf.}$$

Genau so wird auch die Beziehung (7) praktisch ausgeführt.

Man versteht unter Indizes einer Zone diejenigen Zahlen r_1, r_2, r_3, welche durch keine Zahl teilbar sind. Nachdem man also nach der angegebenen Methode die Zahlen r_1, r_2, r_3 berechnet hat, müssen sie auf relative Primzahlen reduziert werden.

§ 30. Beispiele von rationalen Flächen und Zonen.

Die wichtigsten rationalen Flächen sind die Einheitsflächen. Die dazu gehörigen Symbole sind folgende (Fig. 57):

von	c_1 (100)	resp.	($\bar{1}$00)	Symbole der Hauptflächen	
»	c_2 (010)	»	(0$\bar{1}$0)		
»	c_3 (001)	»	(00$\bar{1}$)		
»	c_{12} (110)	»	($\bar{1}\bar{1}$0)		
»	$\bar{c}_{21}$ ($\bar{1}$10)	»	(1$\bar{1}$0)		
»	c_{23} (011)	»	(0$\bar{1}\bar{1}$)		
»	$\bar{c}_{32}$ (0$\bar{1}$1)	»	(01$\bar{1}$)		
»	c_{31} (101)	»	($\bar{1}$0$\bar{1}$)		
»	$\bar{c}_{31}$ (10$\bar{1}$)	»	($\bar{1}$01)		
»	c' (111)	»	($\bar{1}\bar{1}\bar{1}$)	im I. resp. VII.	Oktanten
»	c'' ($\bar{1}$11)	»	(1$\bar{1}\bar{1}$)	» II. » VIII.	»
»	c''' ($\bar{1}\bar{1}$1)	»	(11$\bar{1}$)	» III. » V.	»
»	c^{IV} (1$\bar{1}$1)	»	($\bar{1}$1$\bar{1}$)	» IV. » VI.	»

im Ganzen sind es 13 Paar Einheitsflächen.

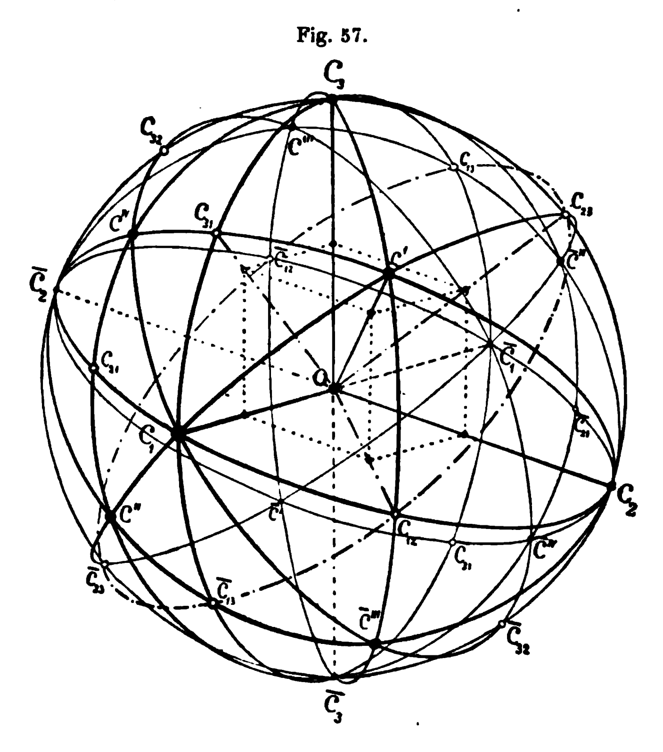
Die wichtigsten rationalen Zonen sind die Einheitszonen mit folgenden Symbolen:

von	$\widehat{c_2 c_3}$ [100]	resp.	[$\bar{1}$00]	Symbole der Hauptzonen.
»	$\widehat{c_3 c_1}$ [010]	»	[0$\bar{1}$0]	
»	$\widehat{c_1 c_2}$ [001]	»	[00$\bar{1}$]	
»	$\widehat{c_3 c_{21}}$ [110]	»	[$\bar{1}\bar{1}$0]	
»	$\widehat{c_3 c_{12}}$ [$\bar{1}$10]	»	[1$\bar{1}$0]	

von $\widehat{c_1 c_{32}}$ [011] resp. [0$\bar{1}\bar{1}$]
» $\widehat{c_1 c_{23}}$ [0$\bar{1}$1] » [01$\bar{1}$]
» $\widehat{c_2 c_{13}}$ [101] » [$\bar{1}$0$\bar{1}$]
» $\widehat{c_2 c_{31}}$ [10$\bar{1}$] » [$\bar{1}$01]
» $\widehat{c_{13} c_{32}}$ [111] » [$\bar{1}\bar{1}\bar{1}$]
» $\widehat{c_{31} c_{32}}$ [$\bar{1}$11] » [1$\bar{1}\bar{1}$]
» $\widehat{c_{23} c_{31}}$ [$\bar{1}\bar{1}$1] » [11$\bar{1}$]
» $\widehat{c_{13} c_{23}}$ [1$\bar{1}$1] » [$\bar{1}$1$\bar{1}$]

total 13 Einheitszonen.

Fig. 57.



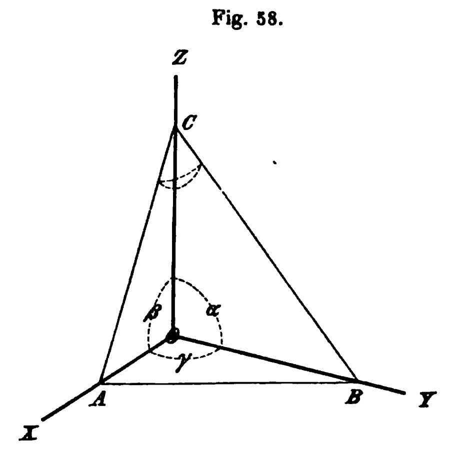
Die Zonen der II. Ableitung haben wie die Flächen der letztern, Symbole, deren Indizes 2 sind; die Zonen III. Ableitung Symbole mit den Indizes 3, usw.

§ 31. Übliche kristallographische Konstanten.

Anstatt eine Kristallfläche mit Hilfe ihrer Normalen auf die drei Hauptflächen zu beziehen, ist es in der Kristallographie üblich geworden, dieselben auf die drei Hauptzonen zu beziehen. Man hat darum die drei Hauptzonen **Kristallachsen** genannt. Es mögen nun *OX*, *OY* und *OZ*, Fig. 58, die gewählten Kristallachsen sein und α, β, γ die Winkel, welche sie miteinander einschließen. Dann bedeutet *OXZ* die Fläche (010), *OYZ* die Fläche (100) und *OXY* die Fläche (001).

Die Fläche, welche wir mit (111) bezeichnet haben, soll die Achsen X, Y, Z in den Punkten ABC schneiden, da sie nicht durch den Ursprung O geführt ist. Man hat die Parameter OA, OB, OC die Achsenlängen genannt und mit a, b, c bezeichnet. Als kristallographische Konstanten oder geometrische Elemente des Kristalls stellt man

Fig. 58.



$$a : b : c \quad \text{und} \quad \alpha,\ \beta,\ \gamma$$

auf, wobei $a : b : c$ das Achsenverhältnis heißt. Sie entsprechen vollständig den fünf Konstanten

$$c_1 : c_2 : c_3 \quad \text{und} \quad \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3.$$

Während sich aber letztere auf die Normalen der Kristallflächen beziehen, führen die ersteren sich auf die Hauptzonen oder Hauptkanten der Grundgestalt zurück.

§ 32. Beziehung zwischen den alten und den neuen kristallographischen Konstanten.

Sie lassen sich leicht die einen in die andern überführen.

Setzt man

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2s,$$

so lassen sich folgende trigonometrische Relationen aufstellen:

$$(9)\qquad \begin{cases} \sin\dfrac{\alpha'}{2} = \sqrt{\dfrac{\sin(s-\alpha_2)\sin(s-\alpha_3)}{\sin\alpha_2 \sin\alpha_3}}, \\ \sin\dfrac{\beta'}{2} = \sqrt{\dfrac{\sin(s-\alpha_3)\sin(s-\alpha_1)}{\sin\alpha_3 \sin\alpha_1}}, \\ \sin\dfrac{\gamma'}{2} = \sqrt{\dfrac{\sin(s-\alpha_1)\sin(s-\alpha_2)}{\sin\alpha_1 \sin\alpha_2}}. \end{cases}$$

Man versteht dann in der Kristallographie unter α, β, γ folgende Winkel:

$$(10)\qquad \begin{cases} \alpha = 180^\circ - \alpha' \\ \beta = 180 \ - \beta' \\ \gamma = 180 \ - \gamma'. \end{cases}$$

Und sie bedeuten offenbar die Winkel, welche die positiven Richtungen der betreffenden Zonen [001], [010], [001] miteinander einschließen.

In der Fig. 59 sind die Pole der Flächen

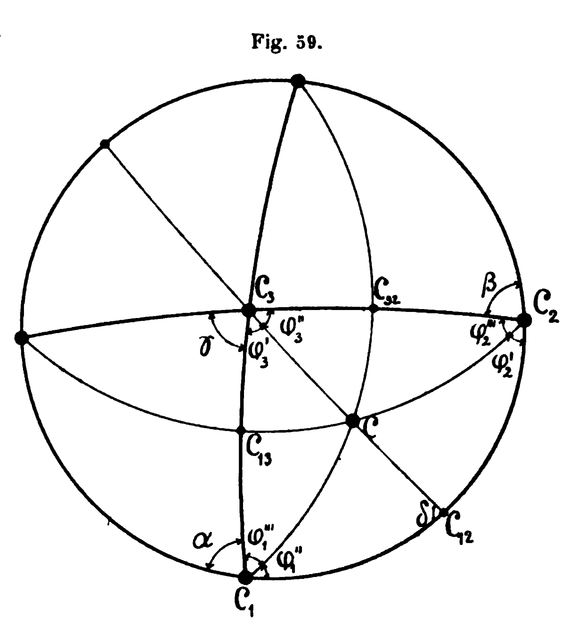
$$c_1 = (100),\ c_2 = (010),\ c_3 = (001),$$
$$c_{12} = (110),\ c_{13} = (101),\ c_{32} = (011),$$
$$c = (111)$$

stereographisch angegeben. Die größten Kreise $\widehat{c_3 c_2}$, $\widehat{c_3 c_1}$, $\widehat{c_1 c_2}$ bedeuten bzw. die Zonen [100], [010], [001], welche die Winkel α, β, γ einschließen.

Aus der früheren Angabe, § 26, haben wir die Verhältnisse der Konstanten c_1, c_2, c_3 wie folgt zu berechnen:

$$(11)\begin{cases} \dfrac{c_1}{c_2} = \dfrac{\sin \widehat{c_2 c_{12}}}{\sin \widehat{c_1 c_{12}}}; \quad \dfrac{c_2}{c_3} = \dfrac{\sin \widehat{c_3 c_{32}}}{\sin \widehat{c_2 c_{32}}}; \\ \dfrac{c_3}{c_1} = \dfrac{\sin \widehat{c_1 c_{13}}}{\sin \widehat{c_3 c_{13}}}; \end{cases}$$

Fig. 59.



Ferner folgt aus der Fig. 59:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin \varphi_3'}{\sin \varphi_3''}; \quad \frac{b}{c} = \frac{\sin \varphi_1''}{\sin \varphi_1'''};$$

$$\frac{c}{a} = \frac{\sin \varphi_2'''}{\sin \varphi_2'}.$$

Nun bestehen aber folgende Beziehungen:

$$\frac{\sin \varphi_3'}{\sin \widehat{c_1 c_{12}}} = \frac{\sin \delta}{\sin \alpha_2};$$

$$\frac{\sin \varphi_3''}{\sin \widehat{c_2 c_{12}}} = \frac{\sin \delta}{\sin \alpha_1}.$$

Infolgedessen wird sein:

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} \cdot \frac{b}{a}$$

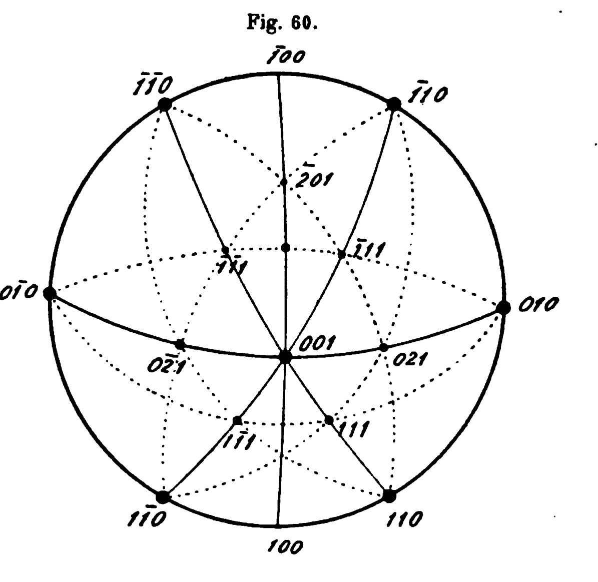
oder anders geschrieben:

$$c_1 : c_2 = \frac{\sin \alpha_1}{a} : \frac{\sin \alpha_2}{b}.$$

Also im allgemeinen:

$$(12)\begin{cases} c_1 : c_2 : c_3 \\ = \dfrac{\sin \alpha_1}{a} : \dfrac{\sin \alpha_2}{b} : \dfrac{\sin \alpha_3}{c}. \end{cases}$$

Fig. 60.



Aus der Trigonometrie hat man noch:

$$\sin \alpha_1 : \sin \alpha_2 : \sin \alpha_3$$
$$= \sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma,$$

und daher folgt ferner die Beziehung:

$$(13) \qquad c_1 : c_2 : c_3 = \frac{\sin \alpha}{a} : \frac{\sin \beta}{b} : \frac{\sin \gamma}{c}.$$

Ganz analog wird sein:

$$(14) \qquad a : b : c = \frac{\sin \alpha_1}{c_1} : \frac{\sin \alpha_2}{c_2} : \frac{\sin \alpha_3}{c_3}.$$

Als Beispiel wollen wir die gemessenen und ausgeglichenen Winkel des Anorthits (Beob. C. Klein) benutzen, Fig. 60:

$$\alpha_1 = \widehat{c_3 c_2} = (001\widehat{\ }010) = 85°50'$$
$$\alpha_2 = \widehat{c_1 c_3} = (100\widehat{\ }001) = 63°56'\,20\tfrac{1}{2}''$$
$$\alpha_3 = \widehat{c_2 c_1} = (010\widehat{\ }100) = 87\quad 5\quad 33 \quad ^{1)}$$
$$(100\widehat{\ }110) = 29°1'\,33''$$
$$(010\widehat{\ }110) = 58°4'$$
$$(001\widehat{\ }021) = 42°38'\,30''$$
$$(0\bar{2}1\widehat{\ }010) = 43\quad 11\quad 30\ .$$

Man hat zuerst (Gleichung 11):

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{\sin(58°4')}{\sin(29°1'\,33'')} = \frac{1{,}74909}{1},$$
$$\frac{2c_2}{c_3} = \frac{\sin(42°38'\,30'')}{\sin(43°11'\,30'')} = \frac{1}{1{,}01038},$$

also:

$$\frac{c_2}{c_3} = \frac{1}{2{,}02076}.$$

Die drei Verhältnisse sind daher:

$$c_1 : c_2 : c_3 = 1{,}74909 : 1 : 2{,}02076.$$

Aus der Beziehung (14):

$$a : b : c = \frac{\sin\alpha_1}{c_1} : \frac{\sin\alpha_2}{c_2} : \frac{\sin\alpha_3}{c_3}$$

folgt:

$$a : b : c = 0{,}63474 : 1 : 0{,}55016.$$

§ 33. Beziehung zwischen Flächen, welche in einer Zone liegen.

Wir wollen Flächen ableiten, welche in einer beliebigen Zone liegen. Die Ableitung muß in irgendwelcher Zone von zwei Flächen ausgehen, deren Kohäsionsminima die kleinsten sind.

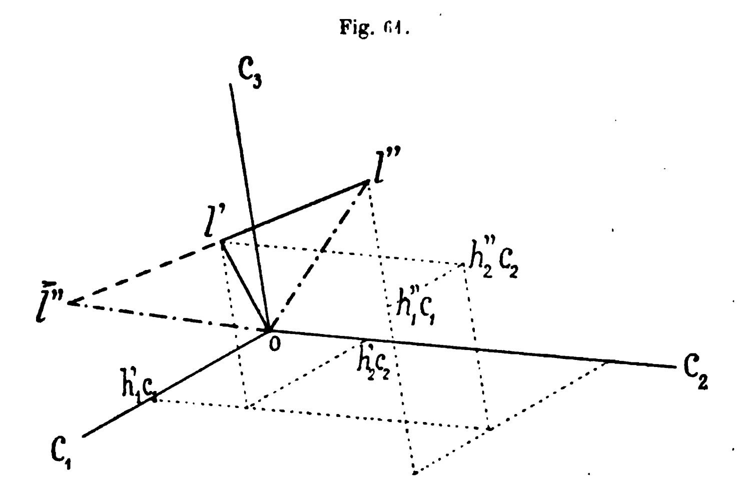
Wenn $(h_1' h_2' h_3')$ und $(h_1'' h_2'' h_3'')$ die Symbole der zwei Flächen sind, so bedeuten $h_1'c_1$, $h_2'c_2$, $h_3'c_3$ die Komponenten des Kohäsionsminimums OI', Fig. 61, welches zur ersten Fläche gehört. Die Komponenten des Kohäsionsminimums, welches zur zweiten Fläche gehört, sind analog $h_1''c_1$, $h_2''c_2$, $h_3''c_3$. — Für den Zweck, welchen wir erreichen wollen, wird dieses zweite Kohäsionsminimum nicht vom Anfangspunkt O, sondern vom Punkt I' aus aufgetragen, dasselbe hat die wirkliche Größe $I'I''$.

---

1) Der gemessene Winkel ist zwar nur $(001\widehat{\ }010)$. Der Winkel $(100\widehat{\ }010)$ geht aus den zwei Winkeln $(110\widehat{\ }010) = 58°4'$ und $(1\bar{1}0\widehat{\ }0\bar{1}0) = 62°27'$ hervor, wovon ein Beispiel in § 35 gegeben wird. Der Winkel $(001\widehat{\ }100)$ ist aus den Winkeln $(110\widehat{\ }1\bar{1}0) = 59°29'$, $(001\widehat{\ }110) = 65°59'$ und $(001\widehat{\ }021) = 42°38\tfrac{1}{2}'$ berechnet worden, aus den in Fig. 60 angegebenen Dreiecken.

Gleichzeitig wird vom Punkt l' die Größe $l'l''$ im entgegengesetzten Sinn nach $l'\bar{l}''$ aufgetragen. Es bedeuten offenbar die Diagonalen Ol'' und $O\bar{l}''$ die

Fig. 61.



Kohäsionsminima der I. Ableitung; und die Flächen der ersten Ableitung, welche zu derselben Zone gehören, sind bzw. zu Ol'' und $O\bar{l}''$ senkrecht.

Nun sind die schiefen Projektionen auf c_1, c_2, c_3 von Ol'' resp.:

$$(h_1' + h_1'')c_1, \quad (h_2' + h_2'')c_2, \quad (h_3' + h_3'')c_3$$

und analog von $O\bar{l}''$:

$$(h_1' - h_1'')c_1, \quad (h_2' - h_2'')c_2, \quad (h_3' - h_3'')c_3.$$

Infolgedessen sind die Indizes der Flächen, welche der gegebenen Zone angehören und aus den gegebenen Flächen $(h_1'h_2'h_3')$ und $(h_1''h_2''h_3'')$ durch die I. Ableitung entstehen, folgende:

$$(\mathrm{I}_1) \qquad (h_1' + h_1''), \quad (h_2' + h_2''), \quad (h_3' + h_3''),$$

$$(\mathrm{I}_2) \qquad (h_1' - h_1''), \quad (h_2' - h_2''), \quad (h_3' - h_3'');$$

d. h. wir bekommen sie, indem wir die betreffenden Indizes der zwei Flächen addieren oder subtrahieren.

Gehen wir zur II. Ableitung über.

Zwischen je zwei der vorhergehenden Flächen liegt eine der II. Ableitung. Um dieselbe zu finden, brauchen wir nur die vorhergehende Methode anzuwenden, also die betreffenden Indizes zu addieren oder abzuziehen.

Zwischen Fläche (I_1) und Fläche $(h_1'h_2'h_3')$ wird eine Fläche der II. Ableitung liegen, welche folgende Indizes haben wird:

$$(\mathrm{II}_1) \qquad \begin{cases} h_1' + h_1'' + h_1' = 2h_1' + h_1'', \\ h_2' + h_2'' + h_2' = 2h_2' + h_2'', \\ h_3' + h_3'' + h_3' = 2h_3' + h_3''. \end{cases}$$

Zwischen Fläche (I_1) und Fläche $(h_1''h_2''h_3'')$ wird eine Fläche der II. Ableitung liegen, welche folgende Indizes haben wird:

$$(\mathrm{II}_2) \qquad (h_1' + 2h_1''), \quad (h_2' + 2h_2''), \quad (h_3' + 2h_3'').$$

Ferner zwischen Fläche (I_2) und Fläche $(h_1' h_2' h_3')$ wird eine Fläche der II. Ableitung liegen mit folgenden Indizes:

$$(II_3) \qquad (2h_1' - h_1''), \quad (2h_2' - h_2''), \quad (2h_3' - h_3''),$$

und endlich zwischen Fläche (I_2) und Fläche $(h_1'' h_2'' h_3'')$ die Fläche der II. Ableitung mit folgenden Indizes:

$$(II_4) \qquad (h_1' - 2h_1''), \quad (h_2' - 2h_2''), \quad (h_3' - 2h_3'').$$

Zwischen je zwei aufeinander folgenden Flächen der I. und II. Ableitung liegt eine Fläche der III. Ableitung; also entstehen durch letztere Ableitung im ganzen 8 Paar Flächen. Dieselben werden erhalten, indem die vorhergehende Methode wieder angewendet wird, d. h. die betreffenden Indizes addiert oder subtrahiert werden. Also liegt zwischen den Flächen (I_1) und (II_2) eine Fläche der III. Ableitung, deren Indizes folgende sind:

$$(h_1' + 3h_1''), \quad (h_2' + 3h_2''), \quad (h_3' + 3h_3''), \text{ usw.}$$

Wir wollen durch ein Beispiel die hier entwickelte Regel zur Anschauung bringen.

Es handelt sich darum, aus (123) und (211) die Flächen der I., II. und III. Ableitung zu gewinnen. Wir addieren oder subtrahieren die resp. Indizes der beiden gegebenen Flächen:

$$\binom{123}{211} = \frac{(1+2,\ 2+1,\ 3+1)}{(1-2,\ 2-1,\ 3-1)} = \frac{(334)}{(\bar{1}12)}$$

$\bar{1}\bar{2}\bar{3}$

$\bar{3}\bar{3}\bar{4}$ $\quad$ $1\bar{1}\bar{2}$

$\bar{2}\bar{1}\bar{1}$ $\quad$ 211

$\bar{1}12$ $\quad$ 334

123

Aus diesen Flächen der I. Ableitung werden auf analoge Weise diejenigen der II. Ableitung gewonnen:

$$\binom{123}{334} = (1+3,\ 2+3,\ 3+4) = (457),$$

$$\binom{334}{211} = (3+2,\ 3+1,\ 4+1) = (545),$$

$$\binom{211}{1\bar{1}\bar{2}} = (2+1,\ 1-1,\ 1-2) = (30\bar{1}),$$

$$\binom{1\bar{2}\bar{2}}{\bar{1}\bar{2}\bar{3}} = (1-1,\ -2-2,\ -2-3) = (0\bar{4}\bar{5}).$$

Ebenso verhält es sich mit denjenigen der III. Ableitung, wovon nur eine Fläche als Beispiel anzuführen vollständig genügen dürfte:

$$\binom{123}{457} = (1 + 4,\ 2 + 5,\ 3 + 7) = (5.7.10) \text{ usw.}$$

Wenn wir durch aufeinander folgende Ableitung fortwährend neue Flächen bestimmen, so kommen wir immer wieder zu Indizes, welche der gleichen Form angehören werden, nämlich:

$$(15) \qquad \begin{cases} h_1 = N_1 h_1' + N_2 h_1'', \\ h_2 = N_1 h_2' + N_2 h_2'', \\ h_3 = N_1 h_3' + N_2 h_3'', \end{cases}$$

worin N_1 und N_2 ganze relative Primzahlen sind. In diesen Ausdrücken ist nicht allein die Addition, sondern auch die Subtraktion inbegriffen, wenn nur die Indizes h_1', h_2', h_3' oder h_1'', h_2'', h_3'' negativ genommen werden.

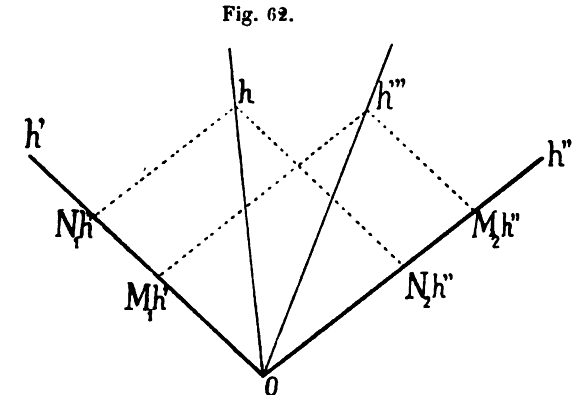
Wenn wir mit h' und h'' die Größen der Kohäsionsminima bezeichnen, welche auf die resp. Flächen $(h_1' h_2' h_3')$ und $(h_1'' h_2'' h_3'')$ senkrecht wirken, so wird die Größe des Kohäsionsminimums auf die Richtung $(h_1 h_2 h_3)$ bestimmt, indem man die Komponenten

$$N_1 h' \text{ und } N_2 h''$$

zusammensetzt.

Es bedeuten also die Koeffizienten N_1 und N_2 die Indizes der Fläche $h = (h_1 h_2 h_3)$, Fig. 62, bezogen auf die Hauptminima h' und h''.

Fig. 62.



Wir können aus den Gleichungen (15) eine sehr interessante Beziehung für die Kristalle ableiten.

Wir können nämlich die Zahlen N_1 und N_2 so wählen, daß $h_1 = 0$ wird, d. h.

$$N_1 h_1' + N_2 h_1'' = 0$$

oder

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{h_1''}{h_1'}.$$

Das bedeutet, daß die durch die Flächen $(h_1' h_2' h_3')$, $(h_1'' h_2'' h_3'')$ bestimmte Zone die Hauptzone [100] in $(o h_2 h_3)$ trifft.

Wenn wir nun voraussetzen, daß die Indizes der zwei gegebenen Flächen den Bedingungen genügen:

$$h_1' + h_2' + h_3' = 0 \text{ und } h_1'' + h_2'' + h_3'' = 0,$$

so wird auch folgen, daß jede andere Fläche derselben Zone der Bedingung

$$h_1 + h_2 + h_3 = 0$$

genügen wird, wie durch Addition der 3 Gleichungen (15) zu entnehmen ist.

Man kann nun N_1 und N_2 so wählen, daß $h_1 = 0$ wird, also $h_2 = -h_3$. Das Symbol $(o h_2 \bar{h}_2)$ reduziert sich aber auf $(01\bar{1})$.

Man kann ebenfalls N_1 und N_2 so wählen, daß $h_2 = 0$, also $h_1 = -h_3$, und daher die Fläche $(10\bar{1})$ erhalten; oder, daß $h_3 = 0$, also $h_1 = -h_2$, und daher die Fläche $(1\bar{1}0)$ erhalten.

Daraus folgt, daß die einzige Zone des Kristalles, für welche jede Fläche der Bedingung genügt,

$$h_1 + h_2 + h_3 = 0,$$

diejenige ist, welche durch die Flächen

$$(1\bar{1}0)\ (\bar{1}01)\ (01\bar{1})$$

gegeben ist; sie hat das Symbol $[111]$.

In jeder andern Zone kommt nur eine Fläche vor, welche der obigen Bedingung genügt; es ist nämlich diejenige Fläche, welche auch der Zone $[111]$ gehört. Eine analoge Beziehung gilt auch für die Fläche (111) und für die dieser Fläche gehörenden Zonen.

§ 34. Beziehung zwischen vier in einer Zone liegenden Flächen. Beispiel.

Die 4 gegebenen Flächen haben folgende Symbole:

$$(h_1 h_2 h_3), \qquad (h_1' h_2' h_3'),$$
$$(h_1''' h_2''' h_3'''), \qquad (h_1'' h_2'' h_3'').$$

Wenn sie in derselben Zone liegen sollen, so bestehen folgende Beziehungen:

$$(16) \qquad \begin{cases} h_1 = N_1 h_1' + N_2 h_1'', \\ h_2 = N_1 h_2' + N_2 h_2'', \\ h_3 = N_1 h_3' + N_2 h_3'', \end{cases}$$

$$(17) \qquad \begin{cases} h_1''' = M_1 h_1' + M_2 h_1'', \\ h_2''' = M_1 h_2' + M_2 h_2'', \\ h_3''' = M_1 h_3' + M_2 h_3'', \end{cases}$$

wobei sowohl N_1 und N_2 als M_1 und M_2 rationale relative Primzahlen sind.

Aus (16) läßt sich folgendes ableiten, indem man zuerst N_2 dann N_1 eliminiert:

$$(18) \qquad \begin{cases} h_1 h_2'' - h_2 h_1'' = (h_1' h_2'' - h_2' h_1'') N_1, \\ h_2 h_1' - h_1 h_2' = (h_1' h_2'' - h_2' h_1'') N_2. \end{cases}$$

Und gleichfalls aus (17):

$$(19) \qquad \begin{cases} h_1''' h_2'' - h_2''' h_1'' = (h_1' h_2'' - h_2' h_1'') M_1, \\ h_2''' h_1' - h_1''' h_2' = (h_1' h_2'' - h_2' h_1'') M_2. \end{cases}$$

Man nennt:

$$(20) \qquad \frac{N_1}{N_2} : \frac{M_1}{M_2}$$

das **Doppelverhältnis** der vier in einer Zone liegenden Flächen, und in dieser Reihenfolge h, h', h'', h'''; es wird abgekürzt so symbolisiert:

$$|\, h h' h'' h''' \,| .$$

Das Doppelverhältnis von 4 in einer Zone liegenden Flächen entspricht somit dem Doppelverhältnis der 4 Indizes von 2 der gegebenen Flächen, welche auf die zwei anderen bezogen werden.

Indem man in (20) die aus (18) und (19) sich ergebenden Werte von N_1, N_2, M_1, M_2 einsetzt, erhält man

$$(21) \qquad |\, h h' h'' h''' \,| = \frac{h_1 h_2'' - h_2 h_1''}{h_2 h_1' - h_1 h_2'} : \frac{h_1''' h_2'' - h_2''' h_1''}{h_2''' h_1' - h_1''' h_2'} .$$

Die Geometrie gibt ferner folgende Beziehung:

$$(21\,a) \qquad |\, h h' h'' h''' \,| = \frac{\sin \widehat{h h''}}{\sin \widehat{h h'}} : \frac{\sin \widehat{h''' h''}}{\sin \widehat{h''' h'}} ,$$

daraus folgt der Satz:

Das Doppelverhältnis von vier in einer Zone liegenden Flächen wird linear durch die Indizes der 4 Flächen ausgedrückt. Man nennt dies das **Gauß-Millersche** Gesetz. Dasselbe gilt auch für vier zu einem Zonenbüschel gehörende Zonen, es sind komplanare Zonen.

Wenn das Doppelverhältnis von 4 in einer Zone liegenden Flächen oder von 4 zu einer Fläche parallelen Zonen den Wert -1 erhält, so nennt man die 4 Flächen resp. die 4 Zonen **harmonisch** gelegen.

Soll

$$(22) \qquad \frac{N_1}{N_2} : \frac{M_1}{M_2} = -1$$

sein, so muß gelten

$$(22\,a) \qquad \frac{N_1}{N_2} = -\frac{M_1}{M_2} .$$

Und da sowohl N_1 und N_2 wie M_1 und M_2 relative Primzahlen sind, so muß im Falle des harmonischen Verhältnisses dem absoluten Werte nach

$$N_1 = M_1 \text{ und } N_2 = M_2$$

sein.

Fig. 63.

Es mögen (100) resp. ($\bar{1}00$) und (010), Fig. 63, zwei Richtungen sein, z. B. senkrecht zu den Hauptflächen einer Zone. Ziehe man die Gerade pp parallel zu (100), welche die Gerade (010) in m schneidet. Wenn nun die zwei Richtungen h und h' von den zwei Richtungen (100) und (010) harmonisch

getrennt sein sollen, so muß die Strecke hh' durch m halbiert werden. Genügen dieser Bedingung auch die Richtungen h_1' und h_1, so sind sie ebenfalls von (010) und (100) harmonisch getrennt. Und wenn eine Anzahl von Richtungen beständig durch zwei gegebene Richtungen harmonisch getrennt werden, wie (010) und (100) in Fig. 63, so heißen letztere **Harmonierichtungen**. Die ganze Figur, welche aus hh', $h_1 h_1'$ in Fig. 63 besteht, heißt **harmonische Figur**.

Die Richtungen (110) und $(1\bar{1}0)$ sowie (120) und $(1\bar{2}0)$, oder (210) und $(2\bar{1}0)$ oder (310) und $(3\bar{1}0)$ usw. sind von den genannten Harmonierichtungen (100) und (010) harmonisch getrennt und bilden somit eine harmonische Figur.

§ 35. Beispiel zum Gauß-Millerschen Gesetz.

Die Formel (21), welche das Gauß-Millersche Gesetz ausdrückt, findet eine große Anwendung in der Kristallographie. Als Beispiel wollen wir eine Zone des Albits ($NaAlSi^3O^8$) berechnen. Der Kristall ist in Fig. 64 perspektivisch abgebildet; die Zone, um welche es sich handelt, besteht aus den Flächen M, Z, Z', T, T'. Man hat sie vertikale Zone genannt, weil man sie vertikal zu orientieren pflegt. Die üblichen Symbole der Flächen sind

Fig. 64.

$$\begin{array}{lll} M\,(010) & \text{resp.} & (0\bar{1}0) \\ T\,(110) & \text{»} & (\bar{1}\bar{1}0) \\ T'\,(1\bar{1}0) & \text{»} & (\bar{1}10) \\ Z\,(130) & \text{»} & (\bar{1}\bar{3}0) \\ Z'\,(1\bar{3}0) & \text{»} & (\bar{1}30). \end{array}$$

In der Fig. 64 sind noch die Flächen P (001) und $x\,(10\bar{1})$ ausgesprochen.

Die häufigsten und vorherrschendsten Flächen in der betrachteten Zone sind M, T, T'. Sie bilden ein hexagonales Prisma, dessen Winkel folgende sind:

$$\left.\begin{array}{l} (010):(110) = 60^\circ 26' \\ (0\bar{1}0):(1\bar{1}0) = 60\ \ 20 \\ (1\bar{1}0):(110) = 59\ \ 14 \end{array}\right\} 180^\circ.$$

Eine ziemlich häufige Fläche beim Albit ist die mit x in Fig. 64 bezeichnete Fläche, welche das Symbol $(\bar{1}01)$ erhält.

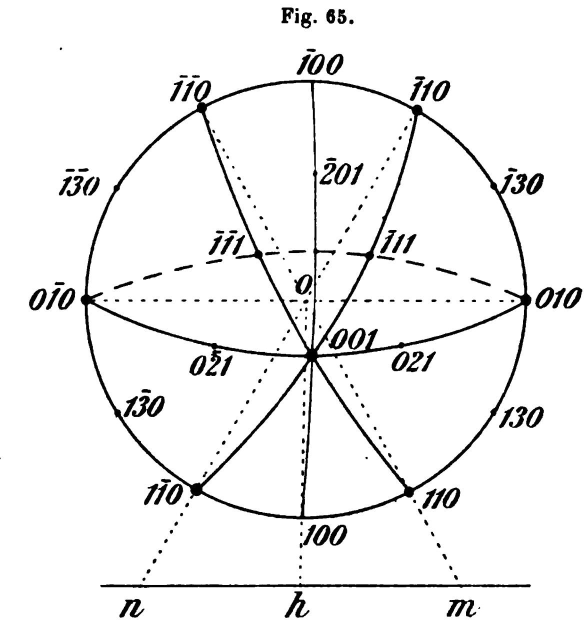
Um eine klare Vorstellung dieser Grundgestalt zu haben, sei in Fig. 65 ihre stereographische Abbildung gegeben, wo die vertikale Zone durch den Grundkreis dargestellt ist. Es sei noch bemerkt, daß die vollkommenen Spaltungen des Albits in $M\,(010)$ und in $P\,(001)$ fallen. Andere undeutliche Spaltungen fallen mit $T\,(110)$ und T' $(1\bar{1}0)$ zusammen.

Die Zone MT und T' ist nicht ein reguläres hexagonales Prisma; es liegt ein Unterschied von wenigen Minuten vor, wie oben zu sehen ist, daß dieses Prisma vom regulären abweicht. Die Flächen Z (130) und Z' $(1\bar{3}0)$ werden häufig beobachtet. Dagegen ist die Fläche (100) sehr selten.

Es handelt sich nun darum, die Lage von Fläche (100) zu berechnen.

Wir haben vor uns eine harmonische Figur, denn sowohl (110) und ($1\bar{1}0$) als (130) und ($1\bar{3}0$) sind von den zwei Flächen (100) und (010) harmonisch getrennt.

Fig. 65.



Ziehen wir folgende 4 harmonisch gelegenen Flächen in Betracht:

($0\bar{1}0$) (100) 010

($1\bar{1}0$) (110).

Von diesen 4 Flächen (da ($0\bar{1}0$) und (010) für eine gelten) ist nur die Lage von einer unbekannt.

Aus dem Gauß-Millerschen Gesetz folgt nun:

$$\frac{\sin(\widehat{0\bar{1}0\;1\bar{1}0})}{\sin(\widehat{010\;110})} : \frac{\sin(\widehat{1\bar{1}0\;100})}{\sin(\widehat{100\;110})} = -1,$$

d. h.

$$\frac{\sin(\widehat{0\bar{1}0\;1\bar{1}0})}{\sin(\widehat{010\;110})} = \frac{\sin(\widehat{1\bar{1}0\;100})}{\sin(\widehat{110\;100})}.$$

Wir haben vorerst

$$\log\sin(60^\circ 20') - \log\sin(60^\circ 26') = 9{,}99957.$$

Es sind nun die betreffenden Winkel so zu wählen, daß

$$\log\frac{\sin(\widehat{1\bar{1}0\;100})}{\sin(\widehat{110\;100})} = 9{,}99957$$

wird, indem die Summe

$$(\widehat{1\bar{1}0\;100}) + (\widehat{110\;100}) = 59^\circ 14'$$

bekannt ist.

Machen wir folgende Annahme

$$\begin{aligned}(\widehat{1\bar{1}0\;100}) &= 29^\circ 35'\\ \widehat{110\;100} &= \underline{29\;\;39}\\ \text{Summe}\; &59^\circ 14'\end{aligned}$$

und führen die Rechnung durch, so ist

$$\log\sin(29^\circ 35) - \log\sin(29^\circ 39') = 9{,}99911.$$

Da nun dieser Unterschied 9,99957 betragen muß, und da die Differenz der Sinusse in der log. Tabelle 23 und 22 pro 1′ beträgt, so brauchen wir zu setzen:

$$\left.\begin{aligned}(1\bar{1}0\widehat{\ }\bar{1}00) &= 29^\circ 36' \\ (110\widehat{\ }\bar{1}00) &= 29\ \ 38\end{aligned}\right\} 59^\circ 14',$$

indem

$$9{,}99957 - 9{,}99911 = 0{,}00046, \text{ also } 23 \times 2 = 46 \text{ ist.}$$

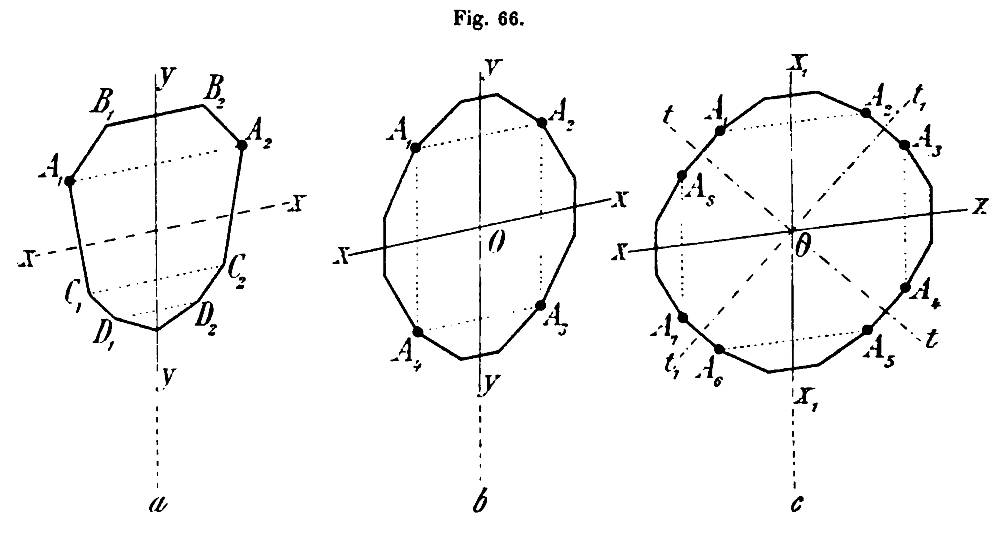
Diese Rechnung kann auch direkt aber umständlich geschehen; viel einfacher geschieht sie graphisch. Man braucht zu diesem Zwecke nur eine Parallele mn, Fig. 65, zu dem Durchmesser (010) (0$\bar{1}$0) zu ziehen; dann die Halbmesser O(110) und O($\bar{1}\bar{1}$0) zu verlängern, bis sie die Parallele in m und n treffen. Dann bestimme man den Mittelpunkt h von der Strecke mn; so wird Oh der Radius sein, wo der Pol (100) resp. ($\bar{1}$00) liegen muß. Genau die gleiche Konstruktion wird ausgeführt, um (0$\bar{2}$1) zu bestimmen, wenn in der Zone (010) (001) der Pol (021) gegeben ist, oder (130), wenn (110), (1$\bar{1}$0) resp. ($\bar{1}$10) und (010) gegeben sind; usw. Siehe auch § 110.

§ 36. Über Harmonie und harmonische Figuren.

Die Bedeutung der Harmonie, welche aus dem harmonischen Verhältnis hervorgeht, darf auf Punkte und Bilder in der Ebene und im Raume ausgedehnt werden.

Es sind zwei Richtungen xx und yy, Fig. 66 a, gegeben. Wir ziehen Parallelen zu xx, und nehmen Punkte auf diesen Parallelen, welche paarweise gleich

Fig. 66.



weit abstehen von der Geraden yy. Alle so konstruierten Punkte sind paarweise harmonisch gelegen in bezug auf die Gerade yy, welche **Harmonierichtung** heißt.

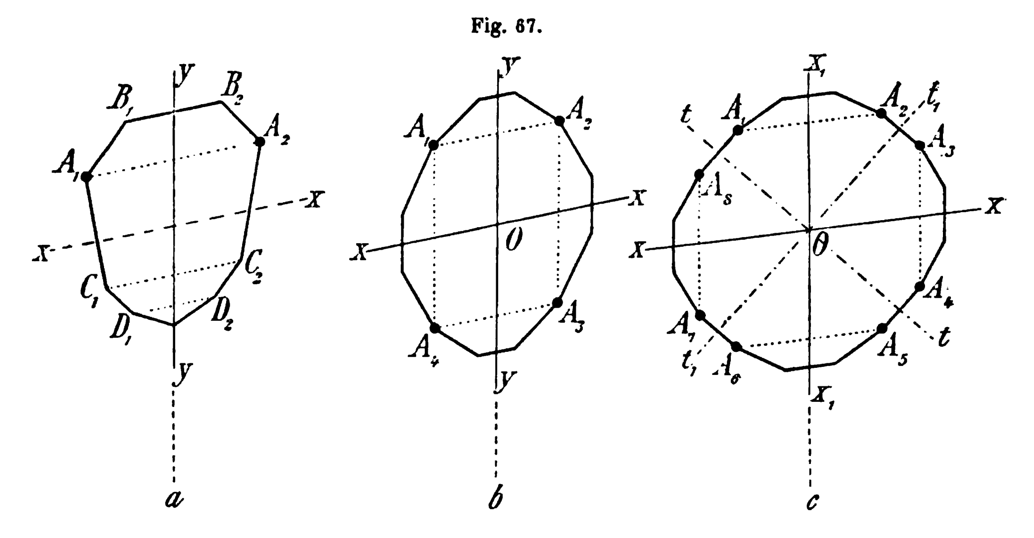
Auch die polygonale Figur $A_1 A_2$, $B_1 B_2$, $C_1 C_2$, ... ist harmonisch in bezug auf yy.

Sollen Punkte harmonisch liegen in bezug auf zwei Richtungen xx, yy, so entspricht jeder Punkt vier Punkten, wie $A_1 A_2 A_3 A_4$, Fig. 67 b, worin A_1 und A_2 auf der Parallelen zu xx und gleich weit von yy liegen, sowie A_2 und A_3 auf der Parallelen zu yy und gleich weit von xx sich befinden.

Somit ist die polygonale Figur der Fig. 67b eine harmonische Figur in bezug auf die zwei schon genannten Harmonierichtungen xx und yy.

Ziehen wir jetzt durch O, Fig. 67c, vier Richtungen xx, $x_1 x_1$, tt, $t_1 t_1$ und konstruieren wir eine Figur, welche in bezug auf dieselben harmonisch sein soll. Von A_1 wird die Parallele zu xx gezogen und darauf A_2 ebensoweit von $x_1 x_1$ entfernt genommen als A_1 liegt. Ferner wird von A_2 die Parallele zu tt gezogen und darauf A_3 in gleicher Distanz wie A_2 von $t_1 t_1$ aus entfernt

Fig. 67.



liegt, aufgetragen; ferner wird von A_3 eine Parallele zu $x_1 x_1$ gezogen und darauf A_4 ebensoweit von xx entfernt genommen als A_3 liegt. Es wird so fortgefahren, bis alle Punkte A_5, A_6, A_7, A_8 konstruiert sind. Die polygonale Figur A_1, A_2, A_3, A_4, ... A_8 wird harmonisch genannt in bezug auf die vier als »Harmonierichtungen« bezeichheten Richtungen xx, $x_1 x_1$, tt, $t_1 t_1$.

Es ist dabei einleuchtend, daß die zwei Richtungen tt und $t_1 t_1$ nicht beliebig gewählt werden können, wenn xx und $x_1 x_1$ gegeben sind, da sie von den letzteren harmonisch getrennt werden müssen.

Wir wollen jetzt eine Figur im Raume konstruieren, welche in bezug auf eine Ebene harmonisch beschaffen sei.

Es mag die Ebene gegeben und durch die Spur yy in Fig. 67 a dargestellt sein. Außerdem ist die Richtung xx gegeben. Von A_1 wird eine Parallele zu xx im Raume gezogen und A_2 auf dieselbe ebensoweit von der gegebenen Ebene entfernt genommen, als der Punkt A_1 liegt. Die gleiche

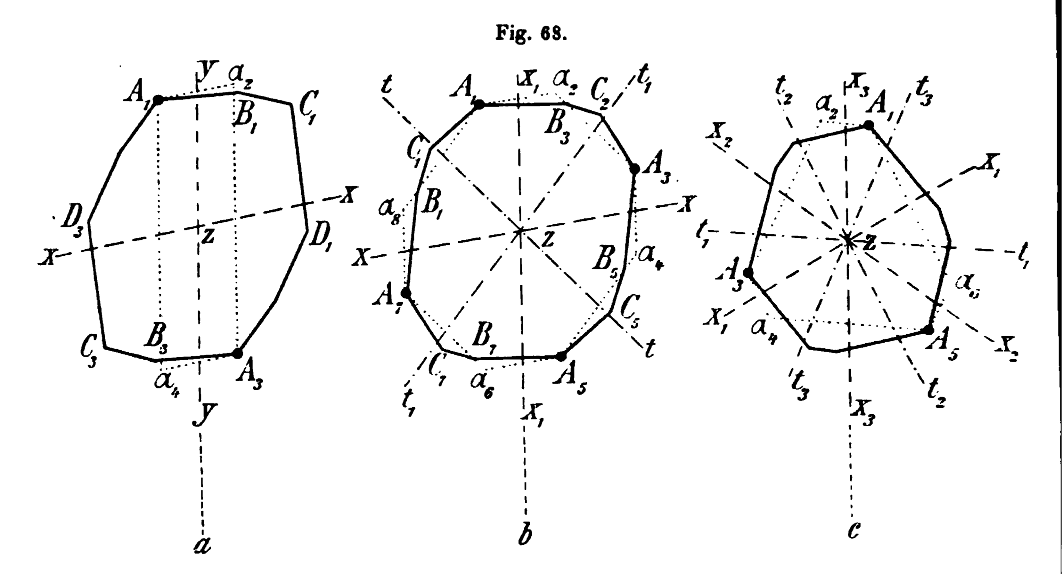
Operation wird für alle andern im Raume befindlichen Punkte B_1, C_1, D_1, ... ausgeführt. Auf diese Weise entsteht im Raume eine Figur $A_1 A_2$, $B_1 B_2$, $C_1 C_2$, ..., von welcher jeder Punkt mit einem Punkt korrespondiert, der auf einer zu xx Parallelen liegt und gleich weit von der gegebenen Ebene entfernt ist.

Eine so entstandene Figur heißt harmonisch in bezug auf eine Ebene, die Harmonieebene genannt wird.

Man kann sich vorstellen, daß eine Figur im Raume harmonisch sei in bezug auf 2, 3, ... Ebenen, wie eine Figur in der Ebene harmonisch sein kann in Bezug auf 2, 3, ... Richtungen.

Eine Figur im Raume kann auch harmonisch sein in bezug auf eine Achse. Wir wollen diese Richtung im Raume zz nennen, deren Spur der Punkt Z der Fig. 68a selbst sein soll. Außer dieser Richtung zz ist eine Ebene gegeben, in der zwei Richtungen xx und yy liegen; die gegebene Ebene

Fig. 68.



ist die Zeichnungsebene selbst. Wenn die Richtungen xx und yy gegeben sind, so sind auch die Ebenen xz und yz gegeben, die durch die Richtung zz gehen.

Wir ziehen nun durch den im Raume befindlichen Punkt A_1 eine Parallele zu xx und nehmen den Punkt a_2 auf derselben ebensoweit von der Ebene zy entfernt, als der Punkt A_1 liegt. In gleicher Weise verfahren wir mit dem Punkt a_2; durch denselben wird eine Parallele zu yy gezogen und auf der letzteren der Punkt A_3 ebensoweit von der Ebene zx entfernt genommen, wie der Punkt a_2.

Dann heißt es, daß die zwei Punkte A_1 und A_3 harmonisch liegen in bezug auf die im Raume gelegene Richtung zz. Ebenso werden die Punkte B_1 und B_3, C_1 und C_3 bestimmt, sie liegen paarweise harmonisch in bezug auf die Richtung zz. Und die ganze im Raume befindliche Figur $A_1 B_1 C_1 \ldots A_3 B_3 C_3 \ldots$

ist harmonisch beschaffen in bezug auf die Richtung zz, welche Harmonieachse genannt wird.

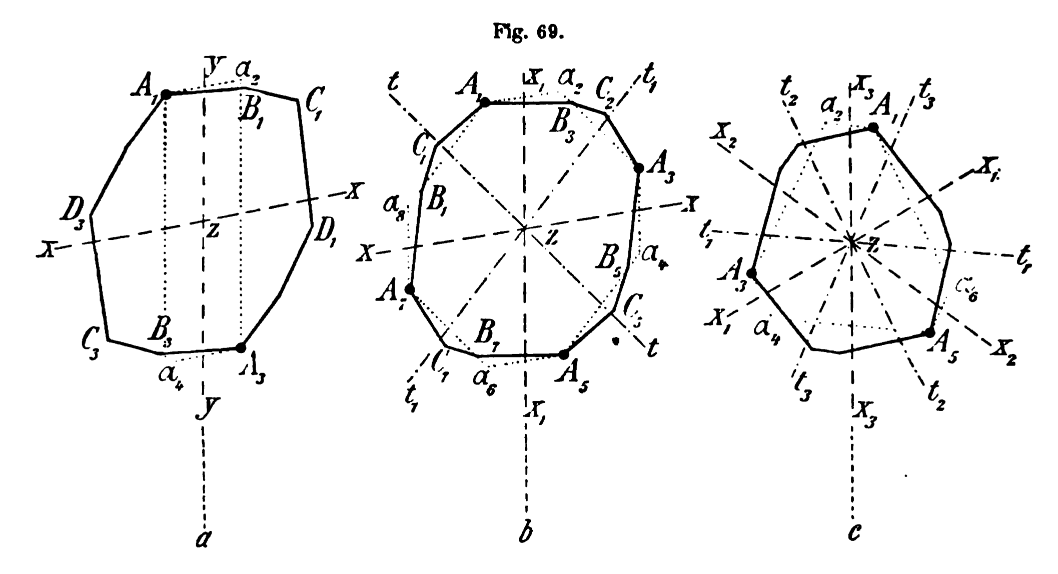
Zur Harmonieachse zz gehört die Ebene xy, ohne welche die Harmonie undenkbar ist.

Wir können in dieser Ebene ebensogut wie 2 auch 4 Richtungen ziehen, nämlich xx, x_1x_1, tt, t_1t_1, die untereinander harmonisch beschaffen sein sollen, Fig. 69b. Mit denselben sind die Ebenen xz, x_1z, tz, t_1z gegeben, welche durch die Richtung zz gehen.

Konstruieren wir eine Figur im Raume auf folgende Art:

Durch A_1 wird eine Parallele zu xx gezogen und α_2 auf derselben ebensoweit von der Ebene x_1z entfernt genommen als A_1 liegt. Ferner wird von α_2 eine Parallele zu tt gezogen und der Punkt A_3 ebensoweit von der Ebene t_1z entfernt genommen als der Punkt α_2 liegt. Das Verfahren wird so

Fig. 69.



fortgesetzt bis auch der letzte Punkt α_8 gefunden ist. Dann heißt es, daß die 4 Punkte A_1, A_3, A_5 und A_7 harmonisch liegen in bezug auf die Richtung zz. Desgleichen liegen harmonisch hinsichtlich dieser Richtung auch die Punkte α_2, α_4, α_6, α_8, sowie die Punkte B_1, B_3, B_5, B_7, oder die Punkte C_1, C_3, C_5, C_7 usw.

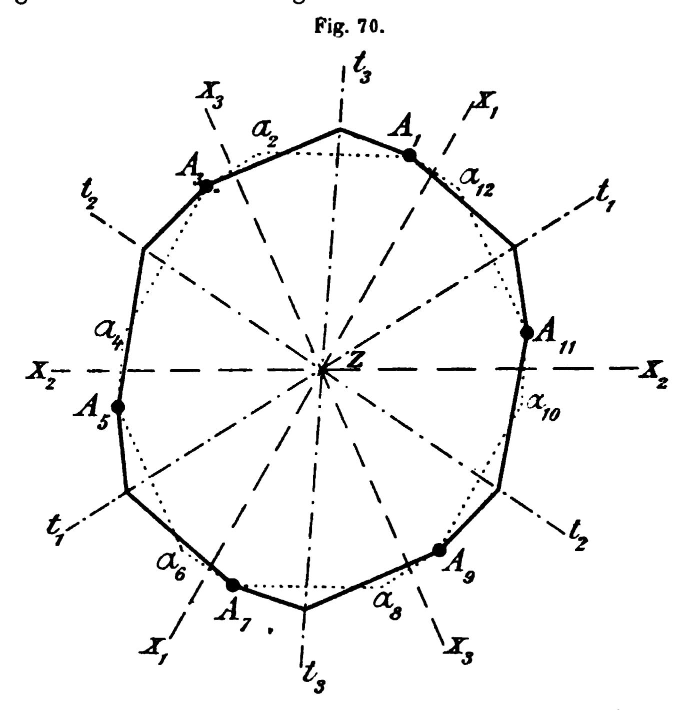
Es gibt in diesem Fall für jeden Punkt stets 4 Punkte oder 2 Paar Punkte, welche in bezug auf die Richtung zz harmonisch liegen.

Man wird deshalb die Harmonierichtung zz in diesem Fall Diharmonieachse nennen, während die Harmonierichtung zz der Fig. 69a monoharmonisch ist.

In Fig. 69c ist die Harmonieachse zz, welche durch den Punkt z geht, triharmonisch, weil es für jeden Punkt, wie A_1, drei Punkte gibt, wie A_1, A_2, A_3, die in bezug auf jene Richtung harmonisch gelegen sind. Desgleichen ist die Harmonieachse zz in der Fig. 70 hexaharmonisch usw.

Wird durch einen im Raume gelegenen Punkt A_1 und den festen Punkt Z ein Radius gezogen, und auf demselben ein zweiter Punkt ebensoweit von Z entfernt genommen als A_1 liegt, A_3 in Fig. 69a, A_5 in Fig. 69b, so heißt Punkt Z Harmoniezentrum (auch Symmetriezentrum, siehe § 26) und die zwei Punkte liegen harmonisch in bezug auf denselben.

Fig. 70.



Man hat daher im Raume drei Harmonieelemente: das Harmoniezentrum, die Harmonieachsen, die Harmonieebenen.

Man kann sich nun überzeugen, daß verschiedene Harmonieelemente zusammenhängen, indem man die soeben dargelegten Bedingungen miteinander verbindet.

Wir können nun ohne weiteres folgende Regel über Harmonie aufstellen. Es bedingen:

1. zwei Harmonieebenen das Vorhandensein einer Monoharmonieachse, welche mit der gemeinschaftlichen Geraden zusammenfällt;
2. vier Harmonieebenen, welche durch eine Gerade gehen, das Vorhandensein einer Diharmonieachse;
3. drei Harmonieebenen, die durch eine Gerade gehen, eine Triharmonieachse;
4. sechs Harmonieebenen, die durch eine Gerade gehen, eine Hexaharmonieachse;
5. drei durch eine Gerade nicht gehende Harmonieebenen ein Harmoniezentrum;
6. eine Harmonieebene und ein Harmoniezentrum, wie unter 1. oben, eine Monoharmonieachse.

Diese harmonischen Beziehungen können leicht durch die Indizes ausgedrückt werden. Zwei Pole liegen harmonisch in bezug auf ein Harmoniezentrum, wenn ihre Symbole folgende sind:

$$(h_1 h_2 h_3) \quad \text{und} \quad (\bar{h}_1 \bar{h}_2 \bar{h}_3).$$

Zwei Pole liegen harmonisch in Hinsicht auf die Hauptfläche (010), welche Harmonieebene ist, wenn ihre Indizes folgende sind:

$$(h_1 h_2 h_3) \quad \text{und} \quad (h_1 \bar{h}_2 h_3).$$

Zwei Pole werden monoharmonisch liegen in bezug auf die Achse [001]‘ wenn ihre Symbole sein werden:

$$(h_1 h_2 h_3) \quad \text{und} \quad (\bar{h}_1 \bar{h}_2 h_3).$$

Vier Pole liegen diharmonisch hinsichtlich der Achse [001], wenn ihre Symbole sein werden, bez.:

$$(h_1 h_2 h_3), \ (\bar{h}_2 h_1 h_3), \ (\bar{h}_1 \bar{h}_2 h_3), \ (h_2 \bar{h}_1 h_3).$$

§ 37. Harmonische Ausbildung der Zonen.

Bis dahin haben wir die streng geometrischen Beziehungen zwischen Flächen und Zonen kennen gelernt. Sie gelten entweder für jedes Polyeder, oder für solche rationale Polyeder, deren Flächen kleine Indizes haben. Wir müssen ferner die geometrischen Beziehungen studieren, welche lediglich der Grundgestalt der Kristalle eigen sind, das heißt die Eigentümlichkeit der Grundgestalt kennen lernen.

Beginnen wir mit der Eigentümlichkeit einer Zone, da ja die Grundgestalt als ein Verband von Zonen aufzufassen ist.

In jeder Zone herrschen einige Flächen vor. Diejenigen Flächen müssen darin vorherrschen, auf welche die kleinsten Kohäsionsminima wirken.

Die Eigentümlichkeit einer Zone muß offenbar hervorgehen aus dem Verhältnis der zwei kleinsten Kohäsionsminima und aus dem Winkel α, welchen sie einschließen.

Wir wollen zuerst die äußersten Fälle hervorheben und dann sehen, wie die naheliegenden Fälle sich damit verbinden lassen.

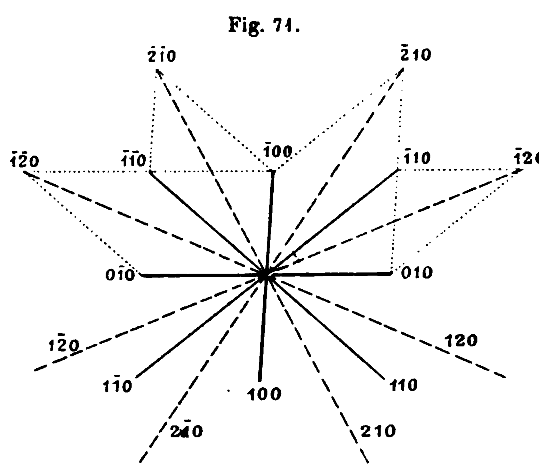
1. Die zwei Hauptflächen, welche wir mit (100) und (010) bezeichnen, sind genau gleich ausgebildet; also sind die zu denselben senkrechten Kohäsionsminima genau gleich.

Wir haben hier zwei Fälle zu unterscheiden, nämlich entweder ist $\alpha = 90^\circ$ oder $\alpha = 60^\circ$.

a) Wenn $\alpha = 90^\circ$ ist, werden die Flächen der I. Ableitung (110) und $(1\bar{1}0)$ genau gleich ausgebildet sein und 90° miteinander einschließen. Die II. Ableitung liefert die Kohäsionsminima (210), $(\bar{2}10)$, $(\bar{1}20)$, (120). Diese sind ebenfalls untereinander gleich. Die Kohäsionsminima der III. Ableitung, nämlich $(1\bar{3}0)$, $(2\bar{3}0)$, $(3\bar{2}0)$, $(3\bar{1}0)$ usw. sind auch unter sich übereinstimmend. Ferner teilen die 4 Richtungen (010), (100), (110) und $(1\bar{1}0)$ die übrigen der II. und III. Ableitung harmonisch ein.

Die hierher gehörende Zone ist somit diharmonisch, da 4 Flächen die Zone diharmonisch teilen. Diese Eigentümlichkeit der diharmonischen Zone bleibt erhalten, auch wenn der Winkel α wenig von 90° differiert nud die zwei Flächen (100) und (010) nicht vollkommen gleich sind. Man sieht dies in Fig. 71 und Fig. 72a.

Fig. 71.



Beispiele einer diharmonischen Zone geben in Fig. 73 das Pentabromäthan C^2HBr^3, nach B. Goßner, und in Fig. 74 die Amidoisobuttersäure $CH^3{}_2 \cdot C(NH^2) \cdot CO\,OH$, nach K. Haushofer. Letztere diharmonische Zone ist durch die Flächen *papb* ... gegeben.

Eine deutliche diharmonische Zone liefert der Krenneritkristall der Fig. 75. Die diese Zone bildenden Flächen sind $a = (100)$, $b = (010)$, $m = (110)$ und $(1\bar{1}0)$, $n = (120)$ und $(1\bar{2}0)$, $l = (210)$ und $(2\bar{1}0)$.

Fig. 72.

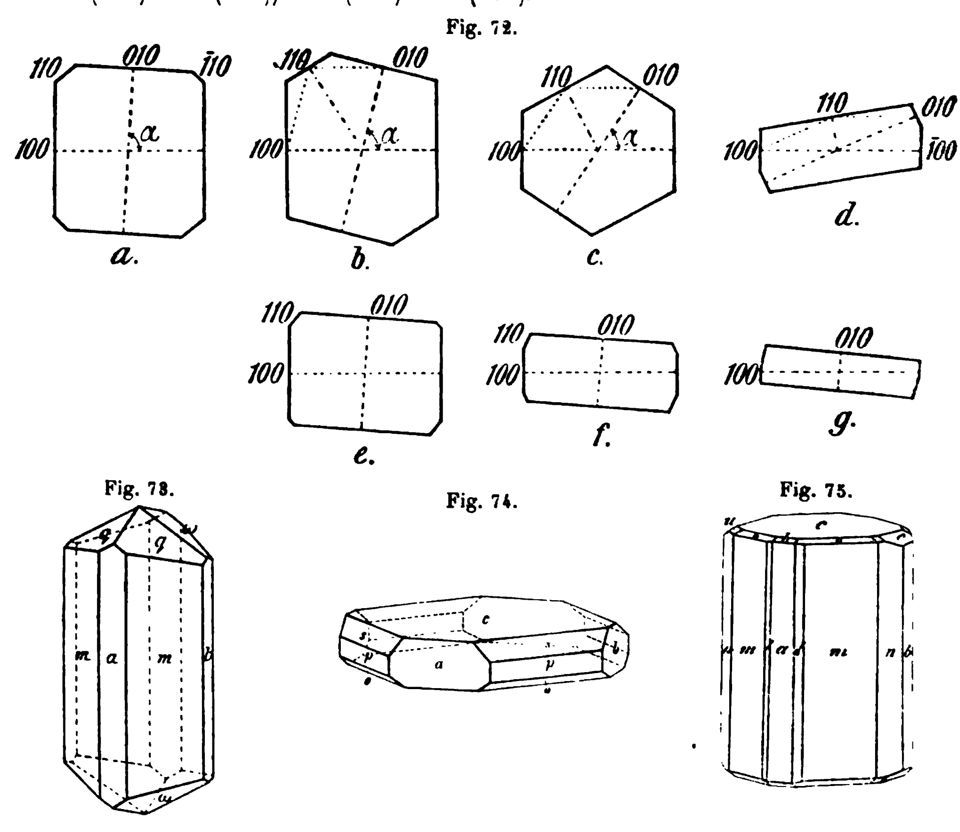


Fig. 73. Fig. 74. Fig. 75.

b) Der zweite zu behandelnde Fall trifft zu, wenn $\alpha = 60^\circ$ resp. 120° ist. Hieraus folgt, daß das Kohäsionsminimum (110) ebenso groß sein wird wie (100), (010). Also werden in dieser Zone drei Paar Flächen gleich vorherrschen, nämlich (100), (010) und (110). Wir wollen diese drei Flächen, da sie gleichbedeutend sind, so symbolisieren $(1\bar{1}0)$, $(\bar{1}01)$ und $(0\bar{1}1)$. Eine jede dieser Flächen geht aus den zwei anderen durch Ableitung hervor nämlich:

$$\begin{pmatrix}1\bar{1}0\\ \bar{1}01\end{pmatrix} = (1+\bar{1},\ \bar{1}+0,\ 0+1) = (0\bar{1}1) \text{ usw.}$$

Wir können alle drei als Hauptflächen bezeichnen, da keine vor der anderen einen Vorzug hat.

Die Flächen der I. Ableitung, die in derselben Zone liegen, werden sein

$$\begin{array}{lcl}(1\bar{2}1) & \text{und} & (\bar{1}2\bar{1})\\ (\bar{1}\bar{1}2) & \text{»} & (11\bar{2})\\ (2\bar{1}\bar{1}) & \text{»} & (\bar{2}11).\end{array}$$

Jedes dieser Flächenpaare wird durch die drei übrigen $(1\bar{1}0)$, $(\bar{1}01)$ und $(0\bar{1}1)$ harmonisch getrennt; oder jedes Flächenpaar der letzteren trennt diejenigen der I. Ableitung harmonisch.

So z. B. werden $(1\bar{2}1)$, $(\bar{1}\bar{1}2)$, $(\bar{2}11)$ von $(\bar{1}01)$ harmonisch getrennt. In der Tat ist

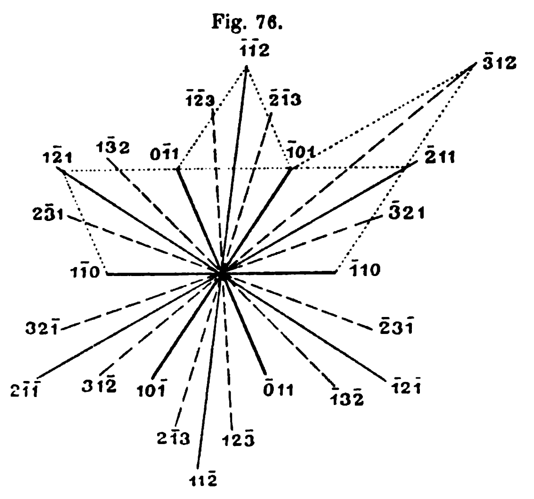
$$\begin{aligned} N_1 &= (\bar{1}\times\bar{1} - 0\times\bar{1}) = 1\\ N_2 &= (0\times\bar{2} - \bar{1}\times 1) = 1\\ M_1 &= (1\times\bar{1} - \bar{2}\times\bar{1}) = -3\\ M_2 &= (\bar{2}\times\bar{2} - 1\times 1) = +3, \end{aligned}$$

somit nach Gleichung 22):

$$\frac{N_1}{N_2} : \frac{M_1}{M_2} = \frac{1}{1} : \frac{-3}{3} = -1.$$

Die Flächen der II. Ableitung sind folgende: $(2\bar{3}1)$, $(1\bar{3}2)$, $(\bar{1}\bar{2}3)$, $(\bar{2}\bar{1}3)$, $(\bar{3}12)$ und $(\bar{3}21)$. Sie sind ebenfalls gleich und verhalten sich harmonisch zu den vorhergehenden. In der Tat werden je 2 Flächenpaare der letzteren von einem Flächenpaar der $(1\bar{1}0)$, $(\bar{1}01)$ und $(0\bar{1}1)$ und einem Flächenpaar der $(1\bar{2}1)$, $(11\bar{2})$ und $(\bar{2}11)$ harmonisch getrennt.

Fig. 76.



In der vorliegenden Zone haben wir also eine dreifache harmonische Teilung, welche sich für jede Ableitung wiederholt; als Harmonieebenen figurieren die Flächen $(1\bar{1}0)$, $(\bar{1}01)$, $(0\bar{1}1)$ und $(1\bar{2}1)$, $(11\bar{2})$, $(\bar{2}11)$.

Die vorliegende Zone ist daher triharmonisch, oder wenn wir die Flächen paarweise betrachten, hexaharmonisch.

Dieselben Verhältnisse bleiben nahezu bestehen, auch wenn der Winkel α nicht vollkommen 60° resp. 120° beträgt und die zwei Flächen (100) und (010) nicht vollkommen gleich sind. Oder mit anderen Worten: Es liegt eine triharmonische resp. hexaharmonische Zone vor, wenn die drei Flächenpaare $(1\bar{1}0)$, $(10\bar{1})$ und $(0\bar{1}1)$ nahezu gleich vorherrschen, wie in Fig. 76 schematisch veranschaulicht ist.

Eine triharmonische Zone sieht im Querschnitt aus wie ein Sechseck, siehe Fig. 72 c.

Wenn wir dem Winkel α alle möglichen Werte zulassen von 90° bis 60° (120°), so erhalten wir Zonen, welche von den diharmonischen zu den triharmonischen übergehen; Fig. 72 b gibt z. B. eine Zwischenzone wieder.

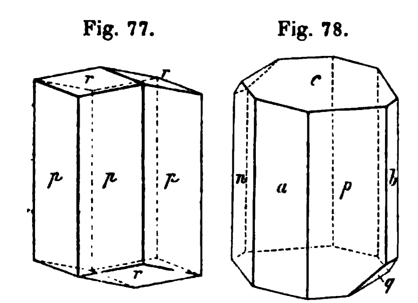


Fig. 77. Fig. 78.

Die Figg. 77 und 78 geben Beispiele von triharmonischen Zonen. In der ersten derselben ist das Antipyrin, nach E. Winkler, und in der zweiten das Triphenylmethan, nach K. Haushofer, dargestellt.

Die vertikale Zone des Albits, Figg. 79 und 80, und des Feldspats im allgemeinen ist triharmonisch, wobei die drei Flächenpaare M (010), T (110) und T' $(1\bar{1}0$

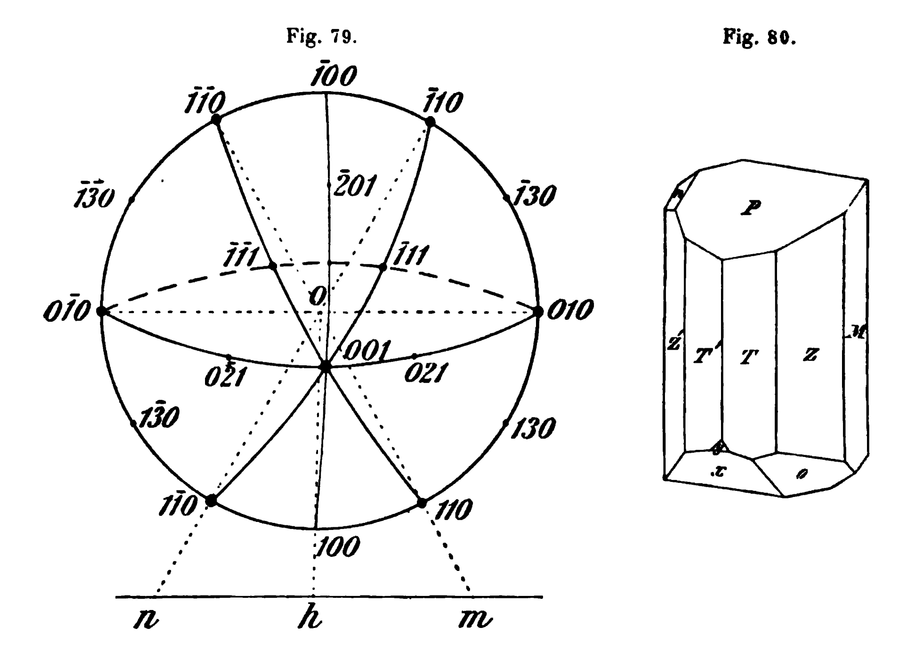


Fig. 79. Fig. 80.

Hauptflächen sind. Die Flächen der ersten Ableitung sind dann z(130), z' $(1\bar{3}0)$ und h (100). Die Bezeichnung, welche sich auf eine diharmonische Zone

bezieht, ist offenbar nicht passend. Es wäre daher wünschenswert, daß man folgende neue Bezeichnung für den Feldspat einführte:

alte Bezeichnung	neue Bezeichnung
M (010)	$(\bar{1}10)$ resp. $(1\bar{1}0)$
T (110)	$(10\bar{1})$ » $(\bar{1}01)$
T' $(1\bar{1}0)$	$(01\bar{1})$ » $(0\bar{1}1)$

und daher für die erste Ableitung:

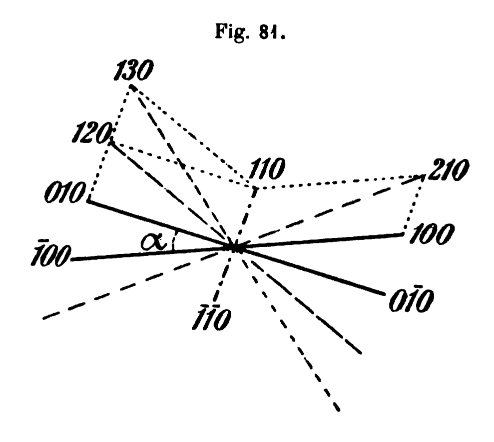
alte Bezeichnung	neue Bezeichnung
z (130)	$(1\bar{2}1)$ resp. $(\bar{1}2\bar{1})$
z' $(1\bar{3}0)$	$(\bar{2}11)$ » $(2\bar{1}\bar{1})$
h (100)	$(11\bar{2})$ » $(\bar{1}\bar{1}2)$.

Siehe § 47.

c) Außer diesen zweierlei Arten von Zonen, bei denen entweder 2 Paar oder 3 Paar Flächen gleichmäßig vorherrschen, ist eine Zone möglich, wo nur ein Flächenpaar prädominiert. Wir erhalten diesen Fall, wenn der Winkel α sehr klein ist. Erreicht er 45°, so kommt wieder die diharmonische Zone zum Vorschein, wovon man sich sehr leicht überzeugen kann.

Wenn aber der Winkel α bedeutend unter 45° sinkt, so entstehen zwei kleinste Kohäsionsminima, von denen aber das eine Minimum bedeutend kleiner ist als das andere, vgl. Fig. 81.

Fig. 81.



Aus den Kohäsionsminima (100) und (010) werden abgeleitet (110) und $(1\bar{1}0)$, von denen $(1\bar{1}0)$ bedeutend größer als (110) und letzteres zugleich viel kleiner als (100) und (010) ist. Es wird also in der betrachteten Zone nur jenes Flächenpaar vorherrschen, dessen Flächen zu (110) senkrecht stehen. Die Flächen, welche zu (100) und (010) gehören, werden nahezu gleichmäßig ausgebildet sein, aber im Verhältnis zu den zum Kohäsionsminimum (110) gehörenden Flächen stark zurücktreten.

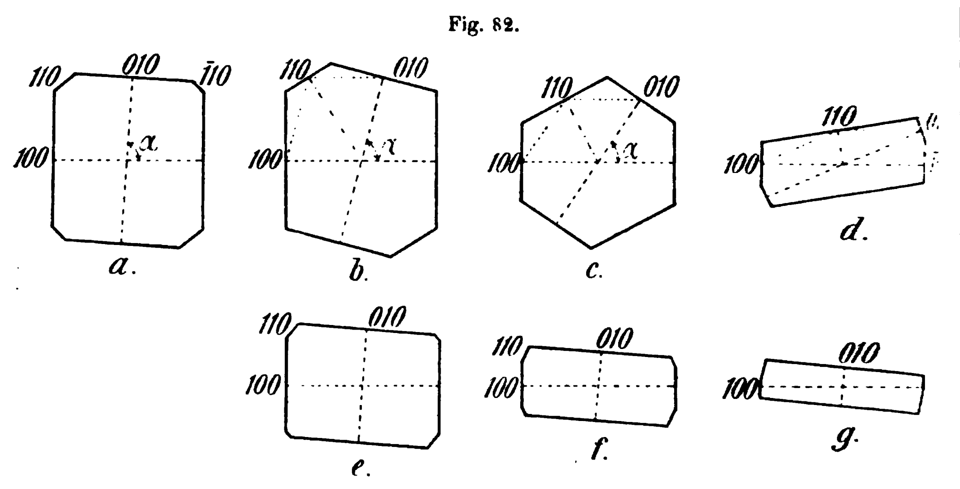
Die Fläche zu $(1\bar{1}0)$ wird, wie schematisch in Fig. 82d dargestellt ist, gar nicht erscheinen können, da ihre Kohäsion zu groß ist.

2. Eine genau gleiche Zone wird man erhalten, wenn die zwei Hauptminima sehr voneinander verschieden gewählt werden. Indem diese zwei Minima wieder mit (100), (010) bezeichnet werden, vgl. Fig. 83, werden diejenigen der ersten Ableitung wie vorher (110) und $(1\bar{1}0)$ nahezu gleich sein müssen.

Wie in der diharmonischen Zone werden auch hier (110) und $(1\bar{1}0)$ von den Flächen (100) und (010) harmonisch getrennt, vgl. Fig. 82 a, e, f, g.

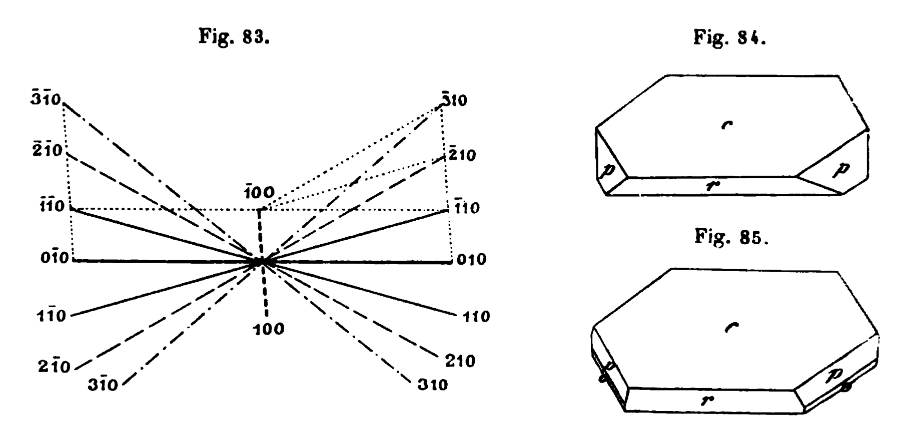
Die Kohäsionsminima der II. Ableitung, nämlich (120), (1$\bar{2}$0), (210) und (2$\bar{1}$0) werden nicht alle gleich, die kleinsten werden (210) und (2$\bar{1}$0), die größten (120) und (1$\bar{2}$0) sein. Auch die entsprechenden Flächen (210) und (2$\bar{1}$0) kommen zur Ausbildung, während die Flächen (120) und (1$\bar{2}$0) ausbleiben werden.

Fig. 82.



Eine solche Zone zeigt eine einseitige Ausbildung, nämlich nach allen denjenigen Flächen, welche sich der Hauptfläche (100) nähern. Man nennt sie deshalb monoharmonische Zone, ihre Harmonieebenen sind (100) und (010).

Fig. 83. Fig. 84. Fig. 85.



Beispiele von monoharmonischen Zonen liefern die Fig. 84 und 85, die erste als Grundgestalt von Naphtalin, die zweite als Grundgestalt des Anthracens, nach P. v. Groth.

Die Zone hört nicht auf monoharmonisch zu sein, welches auch der Winkel α sei, wenn nur die zwei kleinsten Kohäsionsminima stark voneinander verschieden sind.

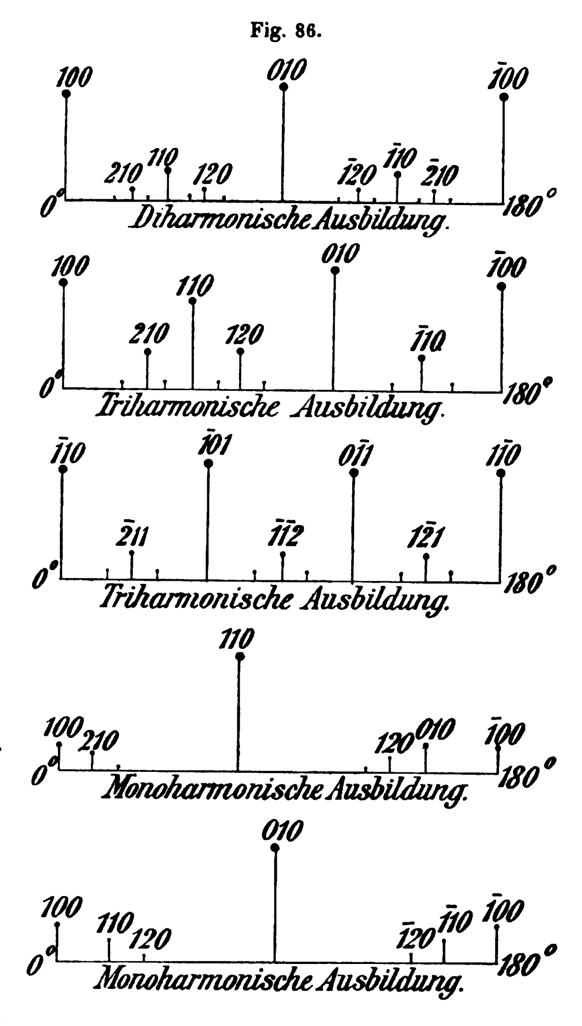
Aus dem Vorausgehenden ist zu schließen, daß theoretisch nur drei Arten von Zonen bei den Grundgestalten der Kristalle möglich sind, nämlich

monoharmonisch mit 1 Flächenpaar, diharmonisch mit 2 und triharmonisch mit 3 Flächenpaaren vorherrschend.

Wir dürfen nämlich ein vorherrschendes Flächenpaar immer annehmen, auch zwei prädominierende Flächenpaare sind zulässig. Dagegen können wir mehr als zwei vorherrschende Flächenpaare in einer Zone nicht annehmen, da alles das, was über letztere zwei Paare hinausgeht, aus den zwei Flächenpaaren abgeleitet werden kann. Und nur wenn der Winkel α, den die zwei Flächen einschließen, 60° beträgt, trifft der Fall zu, daß drei Flächenpaare gleichmäßig vorherrschen.

Die mono-, di- und triharmonischen Zonen sind daher der Grundgestalt der Kristalle eigen, wiewohl diese drei Arten von Zonen ineinander übergehen. Es ist auffallend, daß die Erfahrung nur diese drei Arten von Zonen bei den Kristallen zu Tage gebracht hat. Theorie und Erfahrung stimmen daher vollkommen überein, ohne daß die Beobachtungsfehler Einfluß darauf haben.

Fig. 86.



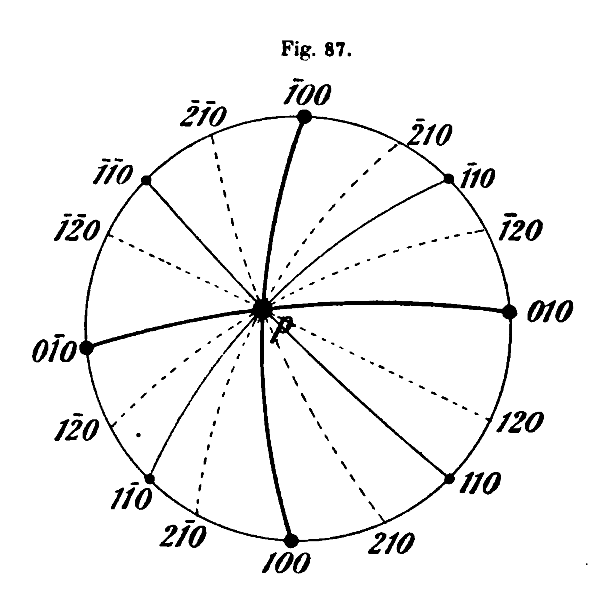
Die Fig. 86 gibt eine schematische Zusammenstellung der verschiedenen Zonen, welche bei der Grundgestalt der Kristalle vorkommen. Die Flächenwinkel sind auf die Abszisse und die Ausbildung der Flächen auf die Ordinaten aufgetragen. Dabei ist auch ersichtlich, wie die Zonen sich voneinander unterscheiden und wie sie ineinander übergehen.

§ 38. Harmonische Ausbildung der Zonenbüschel oder der Flächen.

Unter einem Zonenbüschel versteht man die Gesamtheit der zu einer Fläche parallelen Zonen. Die dazu gehörigen Zonenkreise gehen daher durch die zwei Pole der genannten Fläche.

Wir wollen untersuchen, welche harmonische Eigenschaften dem Zonenbüschel zukommen. *P*, Fig. 87, sei einer der Pole, welche dem Zonenbüschel angehören, und der Grundkreis der stereographischen Projektion stelle eine herrschende Zone dar. Da nur 2 Flächenpaare darin vorherrschen, nämlich (010) und (100), so ist die angenommene Zone diharmonisch.

Fig. 87.



Wenn wir durch den Pol *P* und durch die im Grundkreis gezeichneten Pole die größten Kreise ziehen, so werden diese die Zonen des Zonenbüschels darstellen. Die herrschenden Zonen in diesem Zonenbüschel werden $(0\bar{1}0)P(010)$ und $(100)\,P(\bar{1}00)$ sein. Es wird offenbar von dem Winkel, den diese zwei Zonen einschließen, abhängen, wie der Charakter des Zonenbüschels sein wird.

Schließen die zwei gleich herrschenden Zonen einen Winkel ein, der nicht weit von 90° ist, wie in der Fig. 87, so wird der Zonenbüschel diharmonisch sein. Auch die entsprechende Fläche des Pols *P* wird diharmonisch sein. Schließen dagegen die zwei gleich herrschenden Zonen einen Winkel ein, der nicht weit von 60° ist, so wird der Zonenbüschel und damit auch die entsprechende Fläche triharmonisch oder resp. hexaharmonisch. Und endlich, wenn der einschließende Winkel bedeutend kleiner ist als 45°, oder wenn die zwei Hauptzonen verschieden vorherrschen, so wird der Zonenbüschel und damit auch die entsprechende Fläche monoharmonisch.

Also auch die Zonenbüschel oder Flächen der Grundgestalt der Kristalle, sowie die Zonen, können theoretisch nur mono-, di-, oder triharmonisch sein. Und es ist auffallend, daß die Erfahrung die Ergebnisse der Theorie vollständig bestätigt.

Wir wollen jetzt die Ergebnisse der letzten zwei Paragraphen durch folgenden Doppelsatz zusammenfassen:

In jeder Kristallzone können 1 Paar (monoharmonisch), oder 2 Paar (diharmonisch) oder schließlich 3 Paar Flächen (triharmonisch) vorherrschen.

In jedem Kristallbüschel (resp. Kristallfläche) können 1 Zone (monoharmonisch), oder 2 (diharmonisch) oder schließlich 3 Zonen (triharmonisch) vorherrschen.

Diese harmonische Ausbildung der Zonen und Zonenbüschel geht aus zwei Momenten hervor, nämlich: 1. die Kohäsionsminima werden in einer Zone aus 2 kleinsten Kohäsionsminima abgeleitet nach der Methode der Zusammensetzung der Kräfte; 2. die Flächen der Grundgestalt sind zu den Kohäsionsminima senkrecht und wachsen fort der Kohäsionsgröße proportional.

Der oben aufgestellte Doppelsatz kann daher für das Grundgesetz der Kristalle gelten.

§ 39. Harmonische Ausbildung der Grundgestalten der Kristalle. Hauptgrundgestalten. Ähnlichkeit der Grundgestalten.

Eine Grundgestalt wird sich von einer zweiten Grundgestalt unterscheiden aus der Art und Weise, wie die Hauptzonen ausgebildet sind.

Ist die harmonische Ausbildung ihrer Zonen ähnlich, so werden diese zwei Kristallgrundgestalten auch als ähnlich bezeichnet werden können.

Ähnliche Grundgestalten sind die in Fig. 88, 89 und 90 nach P. v. Groth dargestellten Kristalle, nämlich:

Fig. 88 von Kaliumplatojodonitrit mit dem Winkel $\widehat{aa} = 90^\circ$,
» 89 » Rubidiumplatojodonitrit » » » $\widehat{ab} = 90$,
» 90 » Cäsiumplatojodonitrit » » » $\widehat{ab} = 86\frac{1}{2}$.

Fig. 88.

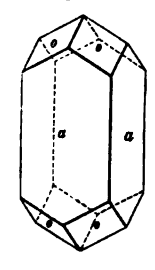


Fig. 89.

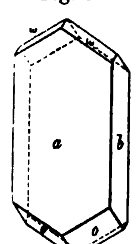
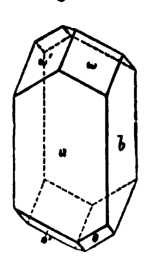


Fig. 90.



Es ist wichtig darauf zu achten, daß man nicht von absoluter Gleichheit zweier Grundgestalten spricht, sondern von ihrer Ähnlichkeit. Absolute Gleichheit gibt es in der Natur nicht. Die Ähnlichkeit der Grundgestalten in den Vordergrund zu stellen hat insofern eine große Wichtigkeit, als damit die Ähnlichkeit der chemischen Substanzen, welche kristallisieren, zugleich hervortreten kann, wie wir bei den isomorphen Kristallen sehen werden.

Indem wir also an der Ähnlichkeit der Kristallgrundgestalten festhalten, wollen wir untersuchen, wie dieselbe mit Hilfe der vorherrschenden Zonen und Flächen untereinander verglichen werden können.

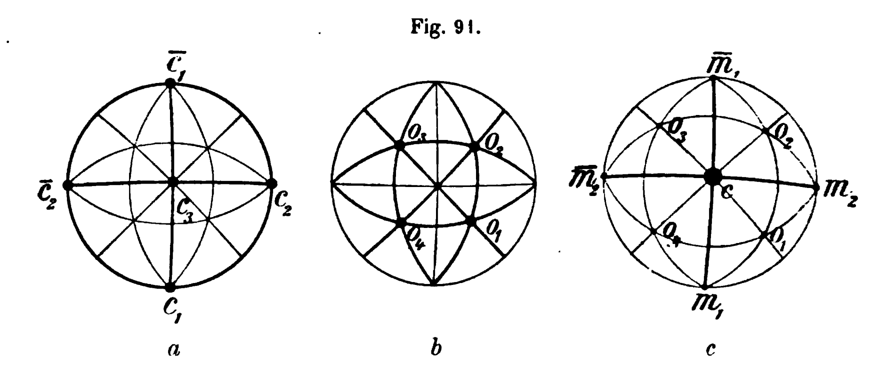
Die Flächenpaare, welche in einer Zone gleichmäßig vorherrschen können, sind also 1, 2 oder 3; die Zonen, welche in einer Fläche gleichmäßig vorherrschen können, sind ebenfalls 1, 2 oder 3. Aus diesem Satz läßt sich bestimmen, wie viele Zonenbüschel resp. Zonen in einer Grundgestalt gleichmäßig vorherrschen können, und daraus ableiten, wie viele Grundgestalten bei den Kristallen unterschieden werden müssen.

Um das zu erreichen beschäftigen wir uns mit einigen Sätzen, welche darauf Bezug haben. Wir werden die Zonenbüschel durch Pole und die Zonen durch Zonenkreise ersetzen, wie wir schon vorher getan haben.

1. Satz. Ein Zonenbüschel und eine durch ihn gehende Zone allein können nicht vorherrschen.

Liegt in einer Zone nur ein herrschender Zonenbüschel, d. h. ein Flächenpaar, so ist sie monoharmonisch. Desgleichen geht durch einen Zonenbüschel nur eine vorherrschende Zone, so ist er monoharmonisch. Wir nehmen nun auf der gegebenen Zone noch ein Flächenpaar, das nach dem Gegebenen am meisten ausgebildet sein soll. Man vergleiche die Fig. 91 a, wo c_1 das gegebene vorherrschende Flächenpaar, und $c_1 c_2$ die gegebene Zone ist. Also nach c_1 herrscht

Fig. 91.



c_2 vor, aber ungleich, da die Zone $c_1 c_2$ monoharmonisch ist. Die zwei Flächenpaare c_1, c_2 schließen einen Winkel ein, der nicht weit von 90° ist. Desgleichen legen wir durch c_1 eine zweite Zone, etwa $c_1 c_3$, welche aber nicht gleich ausgebildet sein soll wie $c_1 c_2$, da eben c_1 einen monoharmonischen Zonenbüschel darstellt. Diese zweite Zone $c_1 c_3$ und der zweite gewählte Zonenbüschel c_2 werden monoharmonisch sein müssen der Annahme nach. Also geht durch c_2 eine Zone, welche zu $c_1 c_2$ nahezu senkrecht steht, aber anders ausgebildet ist als $c_1 c_2$. Daraus erhalten wir das Ergebnis, daß 3 Zonen zum Vorschein kommen, nämlich die gegebene $c_1 c_2$ und die Zonen $c_1 c_3$ und $c_2 c_3$, welche einen Winkel miteinander einschließen, der nicht sehr weit von 90° ist.

Also verhalten sich die Zonen gegenseitig gleichmäßig, und sie müssen daher gleichmäßig vorherrschen. Sie erzeugen ferner drei Zonenbüschel, die auch sich gleichmäßig verhalten, und daher gleichmäßig vorherrschen müssen. Sie sind also diharmonisch, gegen die Annahme, und somit ist der Satz bewiesen.

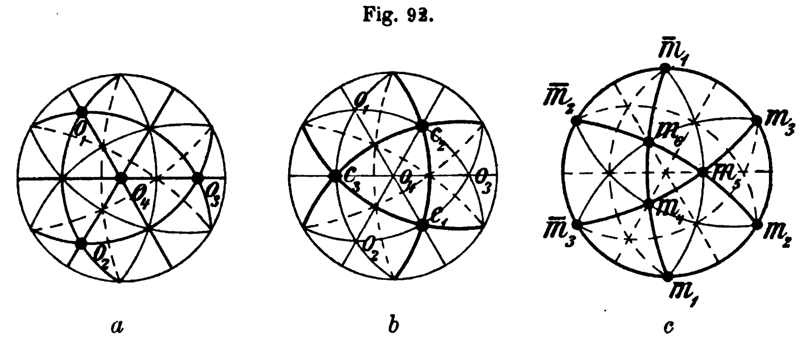
2. Satz. Ein Zonenbüschel kann allein vorherrschen, der diharmonisch oder triharmonisch resp. hexaharmonisch sein muß.

Aus dem 1. Satz geht hervor, daß der Zonenbüschel nicht monoharmonisch sein darf.

In Fig. 91 c, Fig. 94 b und Fig. 95 a ist der Zonenbüschel durch den Pol c stark ausgezogen dargestellt. Mit diesem Zonenbüschel sind gleichzeitig

entweder 2 oder 3 Zonen gegeben, die am meisten und gleichmäßig vorherrschen müssen.

Fig. 92.



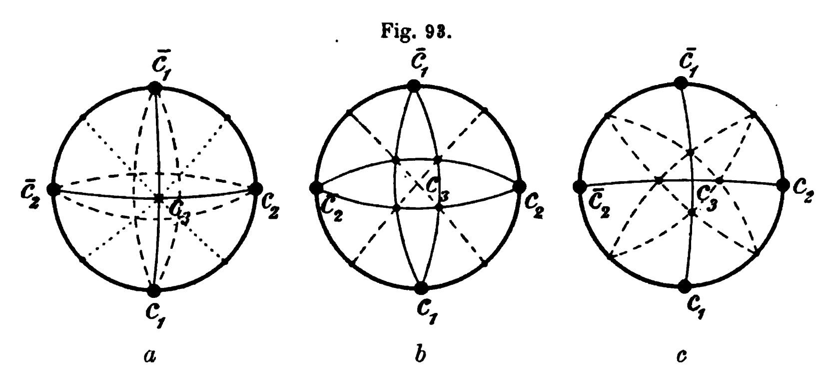
3. Satz. Eine Zone kann allein vorherrschen, welche diharmonisch, oder tri- resp. hexaharmonisch sein muss.

Aus dem 1. Satz geht hervor, daß eine monoharmonische Zone allein nicht vorherrschen darf. In Fig. 93a, b, c, Fig. 94a und Fig. 95b ist die als Grundkreis stark ausgezogene Zone dargestellt. In dieser Zone sind 2 resp. 3 Zonenbüschel vorhanden, welche gleichmäßig vorherrschen können. Die letztern zwei Sätze gehen direkt aus dem Satz der Zonen und Zonenbüschel hervor.

4. Satz. Drei nicht in einer Zone liegende Zonenbüschel allein können im Kristall gleichmäßig vorherrschen und sind diharmonisch.

In Fig. 91a und Fig. 92a, b sind die 3 Zonenbüschel durch die 3 Pole c_1, c_2, c_3 angegeben. Durch dieselben gehen 3 Zonen, die also ebenfalls vorherrschen müssen. Nun gehen durch jeden der Pole c_1, c_2, c_3 zwei gleichmäßig herrschende Zonen, infolgedessen ist er diharmonisch. Desgleichen liegen in jeder dieser Zonen nur zwei gleichmäßig herrschende Zonenbüschel, folglich ist sie diharmonisch, und somit ist der Satz bewiesen.

Fig. 93.



5. Satz. Vier Zonenbüschel, von denen drei nicht in einer Zone liegen, können allein und gleichmäßig vorherrschen.

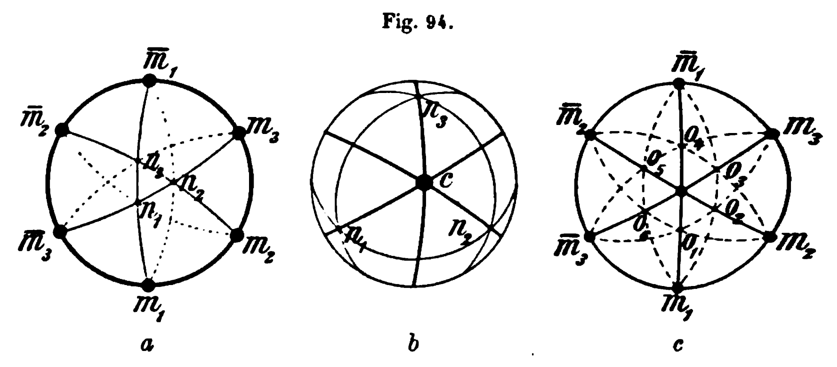
Die vier gegebenen Zonenbüschel sind in Fig. 91b und Fig. 92a durch die Pole o_1, o_2, o_3, o_4 dargestellt. Sechs Zonenkreise verbinden diese 4 Pole, und durch jeden Pol gehen 3 Zonenkreise.

Sollen nun diese drei Zonen gleichmäßig vorherrschen, so werden sie einen triharmonischen Zonenbüschel bilden, und daher einen Winkel miteinander einschließen, der nicht weit von 60° (120°) liegt.

Da 4 Pole immer so gewählt werden können, daß sie dieser Bedingung genügen, so werden sie gleichmäßig und zwar allein vorherrschen, und damit ist der Satz bewiesen.

Nebensatz. Wenn drei der gegebenen Zonenbüschel in einer Zone liegen, wie in Fig. 94 c angegeben ist, so werden sie monoharmonisch, während der

Fig. 94.



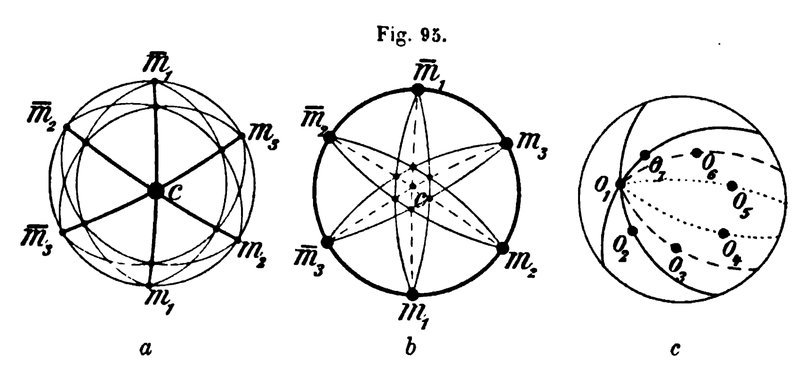
a b c

vierte Zonenbüschel triharmonisch resp. hexaharmonisch sein muß. In diesem Fall sind die 4 Zonenbüschel nicht gleichmäßig ausgebildet.

6. Satz. Fünf gleichmäßig vorherrschende Zonenbüschel können nicht bestehen.

Wir denken uns 5 Pole gegeben o_1, o_2, o_3, o_4, o_5 und verbinden sie durch Zonenkreise, wie beispielweise in Fig. 95 c dargestellt ist. Gehen nun durch jeden Pol 4 Zonenkreise, so dürfen nur 1, 2 oder 3 derselben gleichmäßig vorherrschen. Herrscht nur 1 vor, so entstehen daraus nur 2 Zonen, da die

Fig. 95.



a b c

Zahl 5 ungerade ist; aber ein Zonenbüschel bleibt ohne gleichmäßig vorherrschende Zonen; diese Annahme ist also unmöglich. Herrschen zwei durch einen Zonenbüschel gehende Zonen vor, so bestimmen die 5 Zonenbüschel fünf gleich angeordnete Zonen. Wenn wir nun irgendwelche Zone wählen, die in bezug auf die 5 Zonenbüschel gleich gelegen ist, wie z. B. der Grundkreis in

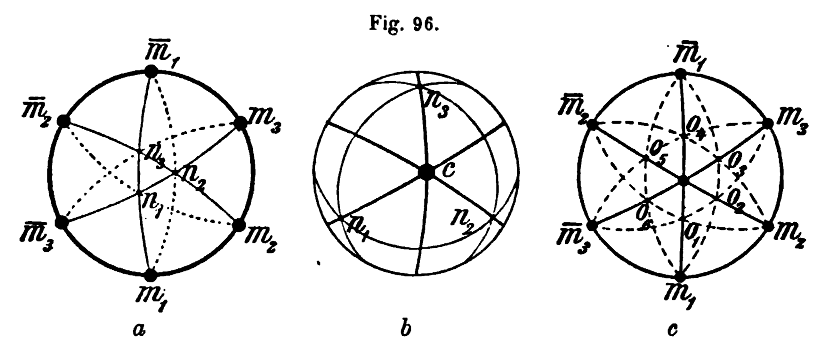
Fig. 95 c ist, so werden die 5 Zonen auf dieser Zone 5 Flächenpaare bestimmen, welche gleichmäßig herrschen sollten; und das ist unmöglich.

Es bleibt noch die Wahl übrig, daß die 5 Zonenbüschel je drei auf einer Zone liegen. Dadurch werden zwei triharmonische Zonen gleichmäßig vorherrschen, welche durch einen Zonenbüschel gehen. Letzterer wird daher diharmonisch, während die übrigen vier monoharmonisch, oder triharmonisch sein müssen. Verbindet man nämlich einen dieser vier Zonenbüschel mit den übrigen, so erhält man im ganzen drei durch einen Pol gehende Zonen. Und diese werden entweder gleichmäßig vorherrschen oder nicht. Es ist also bewiesen, daß die vier übrigen Zonenbüschel entweder monoharmonisch oder triharmonisch sein werden.

7. Satz. Sechs Zonenbüschel können allein gleichmäßig vorherrschen.

Die sechs gegebenen Zonenbüschel können beispielweise durch die 6 Pole o_1, o_2, o_3, o_4, o_5, o_6 der Fig. 96 c dargestellt sein. Durch je zwei derselben ziehen

Fig. 96.



wir die Zonenkreise; es werden im ganzen 15 sein, da durch jeden Pol 5 Zonen gehen. Von diesen fünf Zonen werden 1, 2 oder 3 gleichmäßig vorherrschen; wir wollen alle drei Annahmen untersuchen.

Eine Zone allein könnte vorherrschen: durch je 2 Pole geht eine Zone, und es entstehen somit 3 Zonen, welche in c, Fig. 96 c, einen triharmonischen Büschel bestimmen.

Der vorherrschende Zonenbüschel wird aber dann c sein und nicht o_1, o_2, o_3 . . ., da durch denselben mehr vorherrschende Zonen gehen, als durch jeden der letzteren, und wir gelangen zu dem in Fig. 96 b dargestellten Fall. Herrschen dagegen zwei durch einen der gegebenen Zonenbüschel gehende Zonen gleichmäßig, so können wir folgendermaßen verfahren. Wir nehmen eine in Bezug auf o_1, o_2, o_3, . . . o_6 gleichgelegene Zone, wie beispielweise der Grundkreis der Fig. 96 c ist.

Da durch jeden der sechs Pole o_1, o_2, o_3, . . . o_6 zwei gleichvorherrschende Zonen gehen, so werden es sechs im ganzen sein, die auf dem Grundkreis nicht weniger als 3 Zonenbüschel bestimmen. Wenn nun durch jeden der 6 Pole nur zwei vorherrschende Zonen gehen, so werden sie miteinander einen sehr kleinen Winkel einschließen, da die 2 Zonen einen Winkel

bilden müssen, der nicht weit von 90° ist. Wir kommen dadurch zu dem in Fig. 96a dargestellten Fall, wo nur eine Zone und drei in ihr liegende Zonenbüschel gleich vorherrschen.

Endlich bleibt noch die Annahme übrig, daß durch jeden der sechs gegebenen Zonenbüschel drei gleich vorherrschende Zonen gehen. Diese Annahme ist aber nur möglich, wenn der Bedingung genügt wird, daß die 3 Zonen einen Winkel einschließen, der nahezu 60° (120°) ist. Dieser Fall ist in Fig. 96c dargestellt. Allerdings spielen 6 Zonen eine verschiedenere Rolle als die 3 übrigen, welche durch den Pol *c* gehen; so daß entweder nur 6 Zonen gleichmäßig vorherrschen werden, oder 3 oder nur 1 Zone, wenn 6 Zonenbüschel gegeben sein werden, von denen 3 nicht in einer Zone liegen. Und damit ist der Satz bewiesen.

8. Satz. Sechs Zonenbüschel, welche je drei in einer Zone liegen, können allein bestehen und gleichmäßig vorherrschen.

Wenn die 6 Zonenbüschel so angenommen werden, so werden damit auch 3 Zonen gegeben sein. Es ist selbstverständlich, daß zwischen den gegebenen Zonenbüscheln ein Winkel liegen muß, der nicht weit von 60° (120°) ist. Und damit ist auch eine vierte Zone bestimmt, wo ebenfalls 3 Zonenbüschel liegen.

Wir sehen überdies, daß durch jeden Zonenbüschel 2 gleiche triharmonische Zonen gehen. Sie schließen einen Winkel ein, der zwischen 60° und 90° liegt. Also ist der Charakter der 6 Zonenbüschel zwischen den triharmonischen und den diharmonischen gelegen.

9. Satz. Mehr als sechs Zonenbüschel, welche gleichmäßig herrschen sollen, sind unmöglich.

Der Beweis dieses Satzes läßt sich ebenso führen wie bei dem 6. Satz, wo bewiesen wurde, daß 5 Zonenbüschel unmöglich sind.

Je mehr Zonenbüschel angenommen werden, um so kleinere Winkel schließen sie untereinander ein, um so schwerer kann man sich vorstellen, daß sie gleichmäßig vorherrschen können. Es herrschen überhaupt nur solche Zonenbüschel vor, welche untereinander einen Winkel einschließen, der nicht weit von 90° oder 60° ist, und das ist eben bei den oben behandelten Fällen allein möglich.

Die betrachteten Sätze lassen sich nun zusammenfassen in den folgenden:

Allgemeinen Satz. Bei den Grundgestalten der Kristalle können gleichmäßig vorherrschen 1, 2, 3, 4 oder 6 Zonenbüschel resp. 1, 2, 3, 4 oder 6 Zonen.

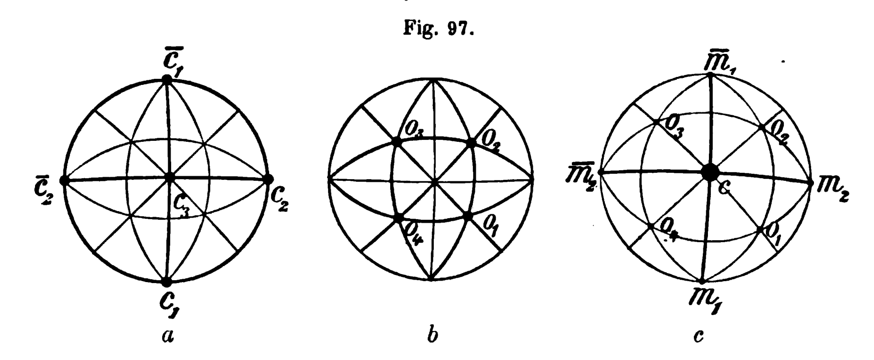
Dieser allgemeine Satz geht aus dem Grundgesetz der Kristalle hervor, kann daher für dasselbe gesetzt werden.

Darauf gestützt lassen sich die Grundgestalten rationell und natürlich einteilen; sie werden nämlich nach den vorherrschenden Elementen eingeteilt werden müssen.

1. Gewisse Grundgestalten sind nach drei Richtungen des Raumes gleichförmig harmonisch beschaffen. Es herrschen dabei entweder 3 Zonenbüschel und 3 Zonen, oder 4 Zonenbüschel und 6 Zonen, oder endlich 6 Zonenbüschel

und 4 Zonen vor. Sie sind gewissermaßen isoharmonisch, d. h. gleich harmonisch. Wir sehen sie in Fig. 91 a, b, c nebeneinander angeordnet. Die eine Grundgestalt kann aus den beiden anderen abgeleitet werden, wie die Fig. 98 a, b, c selbst zeigt; der Unterschied zwischen denselben liegt nur in der Vorherrschung der Flächen und Zonen.

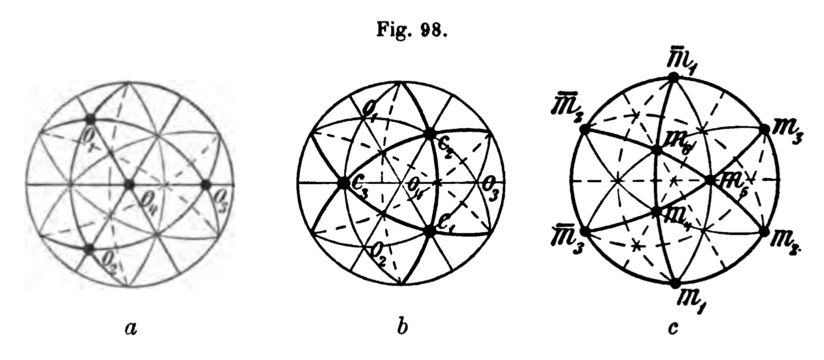
Fig. 97.



Die in Fig. 98 b oder Fig. 97 a dargestellte Grundgestalt hat 3 Zonenbüschel allein gleichmäßig vorherrschend, d. h. 3 Flächenpaare oder 6 Flächen. Man nennt sie deshalb hexaedrische Grundgestalt.

Die in Fig. 98 a oder Fig. 97 b dargestellte Grundgestalt hat 4 gleichmäßig vorherrschende Zonenbüschel, also 4 Flächenpaare, d. h. 8 Flächen; sie heißt deshalb oktaedrische Grundgestalt.

Fig. 98.



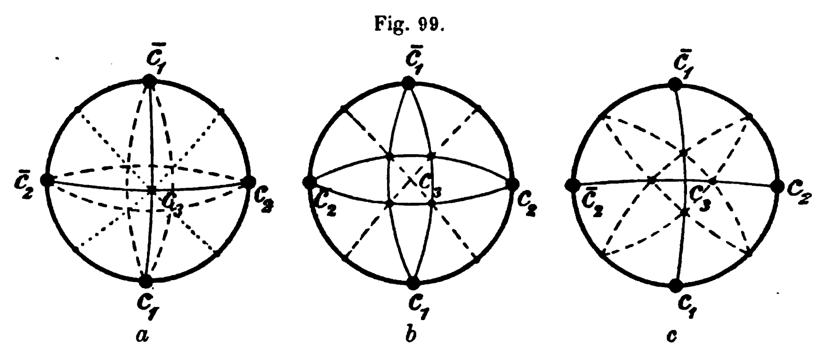
Endlich hat die in Fig. 98 c dargestellte Grundgestalt 6 gleichmäßig vorherrschende Zonenbüschel, also 6 Flächenpaare, d. h. 12 Flächen; sie wird deshalb dodekaedrische Grundgestalt genannt werden können.

Bei diesen drei Grundgestalten herrschen bald diharmonische (viergliedrige) bald triharmonische (dreigliedrige) Zonen resp. Flächenpaare. Eine passende Bezeichnung für dieselben wäre daher **drei- und viergliedrige Grundgestalten.**

2. Es gibt Grundgestalten, wo entweder nur 1 Flächenpaar mit 2 Zonen, oder 1 Zone mit 2 Flächenpaaren vorherrschen. Sie sind in Fig. 99 a, b, c und Fig. 97 c dargestellt. Wo nur eine Zone vorherrscht, erscheinen die

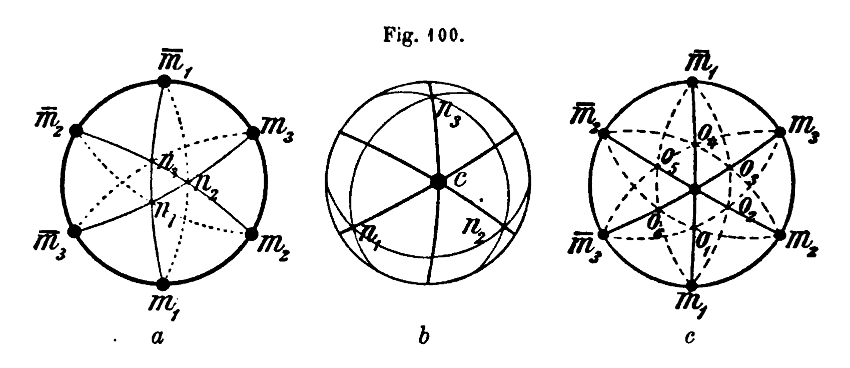
Grundgestalten prismatisch, Fig. 99a, b, c, und wo das Flächenpaar allein vorherrscht, erscheinen die Grundgestalten tafelartig, Fig. 97b. Sie haben das Merkwürdige, daß stets nur ein diharmonisches (viergliedriges) Element vorherrscht, und können daher durch die passende Bezeichnung **viergliedrige Grundgestalten** vereinigt werden.

Fig. 99.



3. Es gibt ferner Grundgestalten, wo entweder nur 1 Flächenpaar mit 3 Zonen, oder nur 1 Zone mit 3 Flächenpaaren vorherrschen, wie in Fig. 100a, b dargestellt ist. Die übrigen Flächenpaare, welche zurücktreten, aber gleichmäßig angeordnet sind kommen stets dreimal vor. Diejenigen, bei welchen nur eine Zone vorherrscht, haben prismatische Ausbildung, Fig. 100a; während diejenigen, welche durch ein vorherrschendes Flächenpaar ausgezeichnet werden, tafelartig ausgebildet sind. Beide haben das Merkmal gemeinschaftlich, daß das vorherrschende Element triharmonisch (dreigliedrig) ist; man kann sie daher unter der Bezeichnung **dreigliedrige Grundgestalten** zusammenfassen.

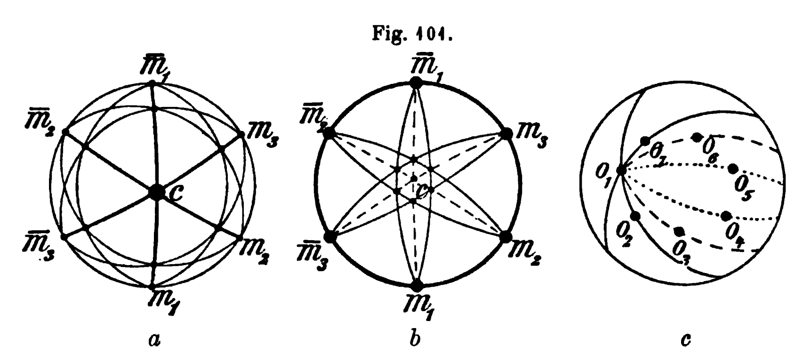
Fig. 100.



4. Endlich gibt es Grundgestalten, wo ebenfalls entweder 1 Flächenpaar und 3 Zonen, oder nur 1 Zone und 3 Flächenpaare vorherrschen. Sie sind in Fig. 101a, b dargestellt. Bei ihnen sind alle übrigen Flächen, welche gleichmäßig ausgebildet vorkommen, sechsmal um das triharmonische Element angeordnet, während bei den vorigen Grundgestalten nur dreimal. Diese Grundgestalten können ebenfalls entweder prismatisch, Fig. 101b, oder tafelartig,

Fig. 101 b, erscheinen. Das gemeinschaftliche Merkmal für beide ist ein hexaharmonisches (sechsgliedriges) Element. Man kann deshalb diese **Grundgestalten sechsgliedrig** nennen.

Fig. 101.



Eine dazwischen liegende Grundgestalt wäre die in Fig. 100c dargestellte, wo die hexaharmonische Zone ebenso ausgebildet erscheint, wie das hexaharmonische Flächenpaar. Man kann sie deshalb bald zu den prismatischen, bald zu den tafelartigen Grundgestalten stellen.

Die drei- und viergliedrigen, die viergliedrigen, dreigliedrigen und sechsgliedrigen Grundgestalten können nicht voneinander abgeleitet werden; und sie stellen deshalb wirklich verschiedene Gebilde dar, die wir der Beschreibung der Kristalle zugrunde legen und deswegen als Hauptgrundgestalten der Kristalle bezeichnen wollen. Die drei- und viergliedrigen Grundgestalten nehmen eine Zwischenstelle ein zwischen den prismatischen und tafelartigen sowohl der viergliedrigen als auch der dreigliedrigen Grundgestalten.

§ 40. Zusammenstellung der Hauptgrundgestalten.

I. **Drei- und viergliedrige Grundgestalten.**

1. Hexaedrische Grundgestalten mit vorherrschenden 3 Zonen und 3 Flächenpaaren.
2. Dodekaedrische Grundgestalten mit vorherrschenden 4 Zonen und 6 Flächenpaaren.
3. Oktaedrische Grundgestalten mit vorherrschenden 6 Zonen und 4 Flächenpaaren.

II. **Viergliedrige Grundgestalten** mit einem viergliedrigen vorherrschenden Element:

a) prismatisch mit einer vorherrschenden diharmonischen Zone;
b) tafelartig mit einer vorherrschenden diharmonischen Fläche.

III. **Dreigliedrige Grundgestalten** mit einem dreigliedrigen vorherrschenden Element:

a) prismatisch mit einer vorherrschenden triharmonischen Zone;
b) tafelartig mit einer vorherrschenden triharmonischen Fläche.

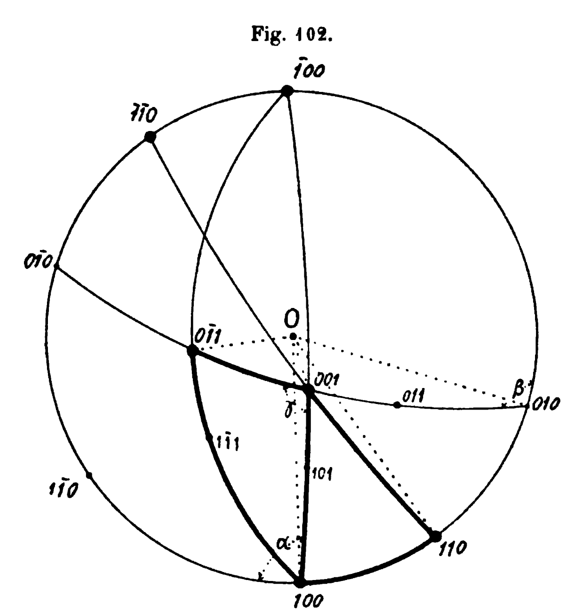
IV. **Sechsgliedrige Grundgestalten** mit einem sechsgliedrigen vorherrschenden Element:

a) prismatisch mit einer vorherrschenden hexaharmonischen Zone;
b) pyramidal mit 6 vorherrschenden Zonen und Flächenpaaren;
c) tafelartig mit einer vorherrschenden hexaharmonischen Fläche.

§ 41. Berechnung der geometrischen Konstanten des Cyanits.

Wir gehen von der Annahme aus, daß aus einer großen Anzahl von Cyanitkristallen die Fehler ausgeglichen seien, so daß nach untenstehender Tabelle die Pole der Flächen der Grundgestalt durch den Oralwinkel φ und Polarwinkel ϱ festgesetzt sind. Dabei ist der Oralwinkel vom Anfangspunkt (110) an gemessen, da (010) unsicher ist. Der Polarwinkel wird immer vom Zentrum der stereographischen Projektion aufgetragen, § 23; siehe Fig. 102.

Fig. 102.



Pole	φ'	ϱ
110	0	90°
100	27°38'	90
001	25 39	10 50'
$0\bar{1}1$	118 44	34 36

Aus dieser tabellarischen Zusammenstellung[1] gehen hervor folgende Differenzen der Oralwinkel:

	$\varphi - \varphi'$
100 — 110	27°38'
001 — 110	25 39
100 — 001	1 59
$0\bar{1}1$ — 100	91 6
$0\bar{1}1$ — 001	93 5

Hierauf behandelt man die einzelnen Dreiecke nach der allgemeinen Formel der Trigonometrie:

I. Dreieck: 0 · ($0\bar{1}1$) · (001).

Die gegebenen Winkel sind:

$$\sphericalangle\binom{\varrho}{001} = 10°50',$$

$$\sphericalangle\binom{\varrho}{0\bar{1}1} = 34\ 36\ ,$$

$$\sphericalangle\binom{\varphi - \varphi'}{0\bar{1}1 - 001} = 93\quad 5\ .$$

1) V. Goldschmidt, Krystall. Winkeltabellen, Berlin 1897, S. 106.

Daraus folgt:

$$\cos(0\bar{1}1\widehat{\ }001) = \cos\binom{\varrho}{001}\cos\binom{\varrho}{0\bar{1}1} + \sin\binom{\varrho}{001}\sin\binom{\varrho}{0\bar{1}1}\cos\binom{\varphi - \varphi'}{0\bar{1}1 - 001}.$$

Am besten wird diese Formel mit der Gaußschen Logarithmentafel ausgerechnet:

$$\begin{array}{ll} & \log\cos 93^\circ\ 5' = 8{,}730\,688_n \\ \log\cos 34^\circ 36' = 9{,}915\,472 & \log\sin 34\ 36 = 9{,}754\,229 \\ \log\cos 10\ 50 = \underline{9{,}992\,190} & \log\sin 10\ 50 = \underline{9{,}274\,049} \\ \ 9{,}907\,662 & \ 7{,}758\,966_n \\ \ \underline{9{,}996\,904} & \ \underline{9{,}907\,662} \\ \log\cos(0\bar{1}1\widehat{\ }001) = 9{,}904\,566 & \ 2{,}148\,696 \end{array}$$

$$(0\bar{1}1\widehat{\ }001) = 36^\circ 36' 30''.$$

Berechnung des Winkels im Pol $(0\bar{1}1)$:

$$\sin\sphericalangle(0\bar{1}1) = \frac{\sin\binom{\varrho}{001}}{\sin(0\bar{1}1\widehat{\ }001)}\sin\binom{\varphi - \varphi'}{0\bar{1}1 - 001}.$$

$$\begin{aligned} \log\sin\binom{\varrho}{001} &= 9{,}274\,049 \\ \log\sin\binom{\varphi - \varphi'}{0\bar{1}1 - 001} &= 9{,}999\,371 \\ -\log\sin(0\bar{1}1\widehat{\ }101) &= \underline{0{,}224\,505} \\ \log\sin\sphericalangle(0\bar{1}1) &= 9{,}497\,925 \\ \sphericalangle(0\bar{1}1) &= 18^\circ 20' 38''. \end{aligned}$$

Berechnung des Winkels im Pol (001):

$$\sin\sphericalangle(001) = \frac{\sin\binom{\varrho}{0\bar{1}1}}{\sin(0\bar{1}1\widehat{\ }001)}\sin\binom{\varphi - \varphi'}{0\bar{1}1 - 001}$$

$$\begin{aligned} \log\sin\binom{\varrho}{0\bar{1}1} &= 9{,}754\,229 \\ \log\sin\binom{\varphi - \varphi'}{0\bar{1}1 - 001} &= 9{,}999\,371 \\ -\log\sin(0\bar{1}1\widehat{\ }001) &= \underline{0{,}224\,505} \\ \log\sin\sphericalangle(001) &= 9{,}978\,105 \\ \sphericalangle(001) &= 71^\circ 57' 30''. \end{aligned}$$

II. Dreieck $0 \cdot (0\bar{1}1) \cdot (100)$.

Die gegebenen Winkel sind:

$$\begin{aligned} \sphericalangle\binom{\varrho}{0\bar{1}1} &= 34^\circ 36' \\ \sphericalangle\binom{\varphi - \varphi'}{0\bar{1}1 - 100} &= 91\quad 6\,. \end{aligned}$$

Daraus

$$\cos(0\bar{1}1\widehat{\ }100) = \sin\left(\overset{\varrho}{0\bar{1}1}\right)\cos\left(\overset{\varphi\ -\ \varphi'}{0\bar{1}1 - 100}\right)$$

$$\begin{aligned}
\log\sin\left(\overset{\varrho}{0\bar{1}1}\right) &= 9{,}754\,229\\
\log\cos\left(\overset{\varphi\ -\ \varphi'}{0\bar{1}1 - 100}\right) &= 8{,}283\,243_n\\
\log\cos(0\bar{1}1\widehat{\ }100) &= 8{,}057\,472_n\\
(0\bar{1}1\widehat{\ }100) &= 90^\circ 39' 15''.
\end{aligned}$$

Berechnung des Winkels im Pol $(0\bar{1}1)$:

$$\operatorname{cotg} \measuredangle (0\bar{1}1) = -\cos\left(\overset{\varrho}{0\bar{1}1}\right)\operatorname{cotg}\left(\overset{\varphi\ -\ \varphi'}{0\bar{1}1 - 100}\right)$$

$$\begin{aligned}
\log\cos\left(\overset{\varrho}{0\bar{1}1}\right) &= 9{,}915\,472_n\\
\log\operatorname{cotg}\left(\overset{\varphi\ -\ \varphi'}{0\bar{1}1 - 100}\right) &= 8{,}283\,323_n\\
\log\operatorname{cotg}\measuredangle(0\bar{1}1) &= 8{,}198\,795_p\\
\measuredangle\ 0\bar{1}1 &= 89^\circ 5' 40''.
\end{aligned}$$

Berechnung des Winkels im Pol (100):

$$\operatorname{tang}\measuredangle(100) = \operatorname{tang}\left(\overset{\varrho}{0\bar{1}1}\right)\sin\left(\overset{\varphi\ -\ \varphi'}{0\bar{1}1 - 100}\right)$$

$$\begin{aligned}
\log\operatorname{tang}\left(\overset{\varrho}{0\bar{1}1}\right) &= 9{,}838\,757\\
\log\sin\left(\overset{\varphi\ -\ \varphi'}{0\bar{1}1 - 100}\right) &= 9{,}999\,999\\
\log\operatorname{tang}\measuredangle(100) &= 9{,}838\,756\\
\measuredangle(100) &= 34^\circ 36'.
\end{aligned}$$

III. Dreieck $0 \cdot (001) \cdot (100)$.

Die gegebenen Winkel sind:

$$\begin{aligned}
\measuredangle\left(\overset{\varrho}{001}\right) &= 10^\circ 50'\\
\measuredangle\left(\overset{\varphi\ -\ \varphi'}{100 - 101}\right) &= 1\quad 59.
\end{aligned}$$

Daraus

$$\cos(001\widehat{\ }100) = \sin\left(\overset{\varrho}{001}\right)\cos\left(\overset{\varphi\ -\ \varphi'}{100 - 001}\right)$$

$$\begin{aligned}
\log\sin 10^\circ 50' &= 9{,}274\,049\\
\log\cos\left(\overset{\varphi\ -\ \varphi'}{100 - 001}\right) &= 9{,}999\,740\\
\log\cos(001\widehat{\ }100) &= 9{,}273\,789\\
(001\widehat{\ }100) &= 79^\circ 10' 25''.
\end{aligned}$$

Berechnung des Winkels im Pol (001):

$$\text{cotg}\,(001) = -\cos\binom{\varrho}{001}\,\text{cotg}\binom{\varphi - \varphi'}{100 - 001}$$

$$\log\cos\binom{\varrho}{001} = 9{,}992\,190_n$$

$$\log\text{cotg}\binom{\varphi - \varphi'}{100 - 001} = 1{,}460\,553$$

$$\log\text{cotg} \measuredangle (001) = 1{,}452\,743_n$$

$$\measuredangle (001) = 180^\circ - 2^\circ 1' 10'' = 177^\circ 58' 50''.$$

Berechnung des Winkels im Pol (100):

$$\text{tang} \measuredangle (100) = \sin\binom{\varphi - \varphi'}{100 - 001}\,\text{tang}\binom{\varrho}{001}$$

$$\log\sin\binom{\varphi - \varphi'}{100 - 001} = 8{,}539\,186$$

$$\log\text{tang}\binom{\varrho}{001} = 9{,}281\,858$$

$$\log\text{tang} \measuredangle (100) = 7{,}821\,044$$

$$\measuredangle (100) = 0^\circ 22' 46''.$$

IV. Dreieck 0 · (001) · (110).

Gegeben sind die Winkel:

$$\measuredangle \binom{\varrho}{001} = 10^\circ 50'$$

$$\measuredangle \binom{\varphi - \varphi'}{100 - 110} = 25\;\;39\,.$$

Daraus

$$\cos(\widehat{001\,110}) = \sin\binom{\varrho}{001}\cos\binom{\varphi - \varphi'}{001 - 110}$$

$$\log\sin 10^\circ 50' = 9{,}274\,049$$

$$\log\cos 25\;\;39 = 9{,}954\,944$$

$$\log\cos(\widehat{001\,110}) = 9{,}228\,993$$

$$(\widehat{001\,110}) = 80^\circ 14' 50''.$$

Berechnung des Winkels im Pol (001):

$$\text{cotg} \measuredangle (001) = -\cos\binom{\varrho}{001}\,\text{cotg}\binom{\varphi - \varphi'}{001 - 110}$$

$$\log\cos 10^\circ 50' = 9{,}992\,190_n$$

$$\log\text{cotg}\,25\;\;30 = 0{,}318\,584$$

$$\log\text{cotg} \measuredangle (001) = 0{,}319\,774_n$$

$$\measuredangle (001) = 180^\circ - 26^\circ 3' 25'' = 153^\circ 56' 35''.$$

Berechnung des Winkels im Pol (110):

$$\text{tang} \measuredangle (110) = \sin\binom{\varphi \quad \varphi'}{001 - 110}\cdot\text{tang}\binom{\varrho}{001}$$

$$\log\sin 25^\circ 39' = 9{,}636\,360$$

$$\log\text{tang}\,10\;\;50 = 9{,}281\,858$$

$$\log\text{tang} \measuredangle (110) = 8{,}918\,218$$

$$\measuredangle (110) = 4^\circ 44' 10''.$$

$\measuredangle$ (100) (aus Dreieck III) + 90° = 90° 22′ 46″ = α

$$\left.\begin{array}{l}\measuredangle(001)\text{ (aus Dreieck III)}\\ -\measuredangle(001)\text{ (aus Dreieck I)}\end{array}\right\} = \left.\begin{array}{r}177°58'50''\\ 71\ \ 57\ \ 30\end{array}\right\} = \underline{106°1'20''} = \gamma.$$

V. Dreieck (001) · (010) · (100).

Gegeben sind die Winkel:

im Pol (001) = 180° — γ = 73° 58′ 40″,
im Pol (100) = 180° — α = 89 37 14

$\measuredangle$ $(\widehat{001\,100})$ = 79° 10′ 25″ = α_2.

Berechnung der Winkel $(\widehat{100\,010})$ und $(\widehat{001\,010})$:

$$\operatorname{tang}\frac{(\widehat{100\,010})+(\widehat{001\,010})}{2}=\frac{\cos\frac{\measuredangle(100)-\measuredangle(001)}{2}}{\cos\frac{\measuredangle(100)+\measuredangle(001)}{2}}\operatorname{tang}\left(\frac{\widehat{001\,100}}{2}\right)$$

$$\operatorname{tang}\frac{(\widehat{100\,010})-(\widehat{001\,010})}{2}=\frac{\sin\frac{\measuredangle(100)-\measuredangle(001)}{2}}{\sin\frac{\measuredangle(100)+\measuredangle(001)}{2}}\operatorname{tang}\left(\frac{\widehat{001\,100}}{2}\right)$$

$$\frac{\measuredangle(100)-\measuredangle(001)}{2} = 7°49'17''$$

$$\frac{\measuredangle(100)+\measuredangle(001)}{2} = 81\ \ 47\ \ 57$$

$$\left(\frac{\widehat{001\,100}}{2}\right) = 39\ \ 35\ \ 12$$

log cos 7° 49′ 17″	= 9,995 941	log sin 7° 49′ 17″	= 9,133 812
log cos 81 47 57	= 9,154 250	log sin 81 47 57	= 9,995 536
	0,841 691		9,138 276
log tang 38 35 12	= 9,917 443	. . . .	9,917 443
	0,759 134		9,055 719
	80° 7′ 20″		6° 29′ 10″

$\widehat{001\,010}$ = $\underline{86° 36' 30''}$ = α_1

$(100)\widehat{010}$ = $\underline{73° 38' 10''}$ = α_3.

Berechnung des Winkels im Pol (010):

$$\sin\measuredangle(010)=\frac{\sin(\widehat{001\,100})\cdot\sin(100)}{\sin(\widehat{001\,010})}$$

log sin 89° 37′ 14″ = 9,999 990
log sin 79 10 25 = 9,992 200
— log $(\widehat{001\,010})$ = 0,000 761
9,992 951

gleichfalls

$$\begin{aligned} \log \sin 79°10'25'' &= 9{,}992\,200 \\ \log \sin 73\ 58\ 40 &= 9{,}982\,793 \\ -\log \sin 73\ 38\ 10 &= 0{,}017\,959 \\ \hline 0{,}992\,952 &= \log \sin \sphericalangle (010) \end{aligned}$$

$$\sphericalangle (010) = 79°42'20''$$

und folglich

$$\beta = 180° - \sphericalangle (010) = 100°17'40''.$$

Berechnung des Verhältnisses $c_1 : c_2 : c_3$.

$$(010\,\widehat{\ }\,110) = (100\,\widehat{\ }\,010) - (100\,\widehat{\ }\,110) = 46°0'10''$$

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{\sin 46°\ 0'\ 10''}{\sin 27\ 38\ 0} \text{ nach Formel (1)}$$

$$\begin{aligned} \log \sin 46°\ 0'\ 10'' &= 9{,}856\,954 \\ \log \sin 27\ 38\ 0 &= 9{,}666\,342 \\ \hline 0{,}190\,612 &= \log \frac{c_1}{c_2} \end{aligned}$$

$$c_1 = 1{,}5510 \qquad c_2 = 1$$

$$(0\bar{1}0\,\widehat{\ }\,0\bar{1}1) = (0\bar{1}0\,\widehat{\ }\,001) - (0\bar{1}1\,\widehat{\ }\,001) = 56°47'\ 0''$$

$$(0\bar{1}1\,\widehat{\ }\,001) = 36\ 36\ 30$$

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{\sin 56°47'\ 0''}{\sin 36\ 36\ 30} \text{ nach Formel (1)}$$

$$\begin{aligned} \log \sin 56°47'\ 0'' &= 9{,}922\,520 \\ \log \sin 36\ 36\ 30 &= 9{,}775\,495 \\ \hline \log c_3 &= 0{,}147\,025 \qquad \log c_2 = 0. \end{aligned}$$

$$c_3 = 1{,}4029 \qquad c_2 = 1.$$

Berechnung des Verhältnisses $a : b : c$ durch die Formel (14):

$$a : b : c = \frac{\sin \alpha_1}{c_1} : \frac{\sin \alpha_2}{c_2} : \frac{\sin \alpha_3}{c_3}$$

oder, wenn man $b = 1$ setzen will:

$$a : b : c = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} \cdot \frac{c_2}{c_1} : 1 : \frac{\sin \alpha_3}{\sin \alpha_2} \cdot \frac{c_2}{c_3}.$$

Dabei sind, wie oben gefunden:

$$\alpha_1 = 86°36'30'' \qquad c_1 = 1{,}5510$$
$$\alpha_2 = 79\ 10\ 25 \qquad c_2 = 1$$
$$\alpha_3 = 73\ 38\ 10 \qquad c_3 = 1{,}4029$$

$$\begin{aligned} \log \sin 86°36'30'' &= 9{,}999\,239 \\ -\log \sin 79\ 10\ 25 &= 0{,}007\,800 \\ -\log 1{,}5510 &= 9{,}809\,388 \\ \hline \log a &= 9{,}816\,427 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \log \sin 73°38'10'' &= 9{,}982\,041 \\ -\log \sin 79\ 10\ 25 &= 0{,}007\,800 \\ -\log 1{,}4029 &= 9{,}852\,975 \\ \hline \log c &= 9{,}842\,816 \end{aligned}$$

$$\log b = 0{,}000\,000.$$

$$a = 0{,}6553$$
$$b = 1{,}0000$$
$$c = 0{,}6954.$$

§ 12. Geschichtliches. Literatur.

Im vorigen Kapitel wurde bemerkt, daß wir die richtige Auffassung des Grundgesetzes der Kristalle V. Goldschmidt zu verdanken haben. Goldschmidt hat durch Zusammenstellung der Kristallflächen an verschiedenen Kristallen bewiesen, daß gewisse Flächen in einer Zone vorherrschen, welche die kleinsten Indizes erhalten, und daß die Flächen um so wahrscheinlicher sind, je kleiner ihre Indizes sind. Siehe auch J. Strüver 1869. Durch diese Auffassung Goldschmidts ist das Haüysche Gesetz, d. h. das Grundgesetz der Kristalle, auf das richtige Gleis gebracht worden. Das Harmonieprinzip sowie die harmonischen Zonen stehen schon in der ersten Goldschmidtschen Arbeit und wird im Verhältnis zur Symmetrie in den Vordergrund gestellt. Später hat sich Fedorow (1902) dem Komplikationsgesetz Goldschmidts angeschlossen und es mathematisch weiter ausgearbeitet.

Die Bezeichnung der Kristallflächen nach Haüy (1800—1809) gründet sich auf die Theorie der Verringerung und daher auf die Primitivflächen der Kerngestalt.

Die Ecken bezeichnete er mit den Selbstlautern A, E, J, O, die Flächen mit P, M, T (primitiv) und die Kanten mit Mitlautern.

Durch die Verringerung werden die Ecken oder die Kanten abgestumpft. Diese Verringerung wird durch eine an den betreffenden Buchstaben angebrachte Zahl ausgedrückt. So bedeuten $\overset{2}{O}$, $\overset{2}{O}{}^3$, ${}^1\overset{2}{O}{}^3$, daß die Ecke O durch eine Fläche abgestumpft ist, welche bezw. um 2 Reihen gegen die Fläche P und um 3 Reihen gegen die Fläche M, oder endlich um 2 Reihen gegen die Fläche P, um 3 Reihen gegen die Fläche M und um 1 Reihe gegen die Fläche T verringert wird. Desgleichen verfuhr Haüy, um die Kanten durch Flächen abzustumpfen.

Haüys Methode wurde weiter ausgebildet hauptsächlich durch Lévy.

A. Lévys Bezeichnungsmethode (1837) bezieht sich auf sechs primitiv angenommene parallelopipedische Formen: Würfel, rechteckiges Prisma, orthorhombisches Prisma, Rhomboeder, klinorhombisches Prisma und klinorhomboidisches Prisma.

Ecken, Flächen und Kanten sind wie bei Haüy mit den Selbstlautern und Mitlautern bezeichnet und mit bezug auf deren Veränderung durch eine sekundäre Fläche die Ableitungszahlen in Form von Exponenten beigeschrieben. Ist z. B. b die Kante des Hexaeders, so bedeutet b^1 das Rhombendodekaeder $\{110\}$, b^3 das Tetrakishexaeder $\{130\}$; ist ferner a die Ecke des Hexaeders, so bedeutet a^1 das Oktaeder $\{111\}$, a^3 das Ikositetraeder $\{113\}$ usw.

Die meisten französischen Mineralogen haben sich der Lévyschen Bezeichnungsweise angeschlossen. (A. Des Cloizeaux, Man. de Min., Paris 1862; E. Mallard, Traité de cristall., Paris 1879, I.)

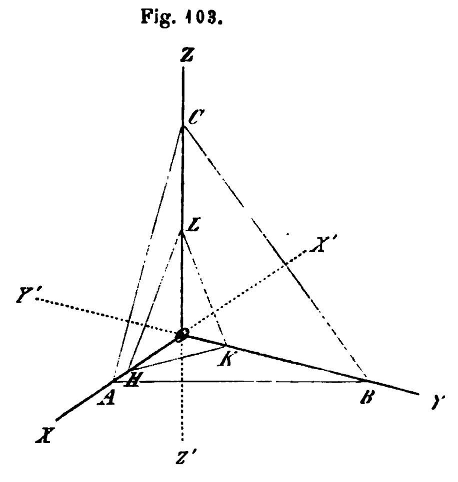
Chr. S. Weiß (1816—1817) beginnt die Methode, eine Kristallfläche auf drei Hauptkanten (Kristallachsen) zu beziehen und die Bezeichnung derselben durch Parameter oder durch reziproke Werte der Parameter zu erreichen.

Die drei Achsen werden mit x, y, z benannt, und die durch eine Fläche, die Einheitsfläche ABC, Fig. 103, auf dieselben bestimmten Parameter bezw. mit a, b, c bezeichnet. Eine andere Kristallfläche HKL bestimmt auf denselben drei Achsen die Parameter

$$OH = \frac{1}{h}a, \quad OK = \frac{1}{k}b, \quad OL = \frac{1}{l}c.$$

Für die Bezeichnung dieser Fläche wendet Weiß das Symbol $\boxed{\frac{a}{h} : \frac{b}{k} : \frac{c}{l}}$ an, was also dem Symbol (hkl) vollkommen entspricht. Die Bezeichnungsart Weiß's findet man in den Kristallographien von G. Rose, A. Quenstedt, C. Rammelsberg, F. H. Schröder, Werner, A. Sadebeck u. a.

Fig. 103.



C. Fr. Naumann (1826) bezeichnet mit einem Buchstaben die Grundform, z. B. mit O das reguläre Oktaeder, mit P eine Pyramide. Irgend eine andere Fläche wird so gelegt, daß sie auf einer Kristallachse denselben Parameter abschneidet, wie die Einheitsfläche, dann bleiben nur die übrigen zwei Parameter für das Symbol. Werden diese mit m und n bezeichnet, so hat man

$$m : n : 1 = \frac{1}{h} : \frac{1}{k} : \frac{1}{l} \quad \text{also} \quad m = \frac{l}{h}, \; n = \frac{l}{k}$$

und das Symbol selbst wird mOn resp. mPn, $m\bar{P}n$, $m\check{P}n$, $m{\rlap{-}P}n$, $m{\rlap{-}P}n$, usw.

J. D. Dana wendet die Naumannsche Bezeichnung an, läßt aber den Buchstaben O resp. P weg, und schreibt nur die Zahlen m, n, was offenbar eine große Erleichterung bringt.

W. Whewell (1825) hat die Bezeichnung nach Weiß dadurch vereinfacht, daß die Zahlen $\frac{1}{h}$, $\frac{1}{k}$, $\frac{1}{l}$ reziprok genommen und als Indizes nacheinander in Klammern geschrieben werden. Also die Fläche $\boxed{\frac{a}{h} : \frac{b}{k} : \frac{c}{l}}$ nach Weiß erhält nach Whewell die einfachere Bezeichnung (hkl). Es ist einleuchtend, daß die Whewellschen Indizes genau dieselbe Bedeutung haben, wie die Ableitungszahlen der Verringerung nach Haüy. Sie können entweder als reziproke Werte der Parameter bezeichnet werden, oder als Ableitungszahlen, indem die Normale der Fläche auf diejenigen der Hauptflächen bezogen wird.

G. Graßmann hat im Jahre (1829) und gleichzeitig auch M. L. Frankenheim selbständig dieselbe Methode von Whewell ersonnen und angewendet. C. Fr. Gauß (1831) bediente sich derselben Bezeichnungsmethode in seinen geometrischen Untersuchungen der Kristalle.

W. H. Miller (1835) hat in seinen kristallographischen und mineralogischen Schriften die Whewellsche Schreibweise weiter verbreitet. In diesem Buche werden die Indizes Whewells für die Bezeichnung einer Fläche benutzt, und denselben die Bedeutung von Ableitungszahlen zugeschrieben.

Eine einfachere Bezeichnung hat V. Goldschmidt angewendet, indem er die Whewell-Millerschen Indizes so schrieb $\left(\frac{h}{l} \cdot \frac{k}{l}\right)$. Das Weitere siehe Ende des Kapitels.

Die geometrischen Beziehungen zwischen Flächen und Zonen mit einfachen rationalen Indizes, wie sie jetzt in den kristallographischen Büchern gebräuchlich sind, sind nach und nach zum Ausdruck gekommen. Man findet sie schon in den Schriften von Chr. S. Weiß (1822), F. E. Neumann (1826), A. F. Möbius (1827); dann ferner von A. T. Kupffer (1831), W. H. Miller (1837) u. a.

Das Gesetz über die Beziehung von 4 in einer Fläche liegenden Kanten, oder von 4 in einer Zone liegenden Flächen wurde in kristallographischen Untersuchungen zuerst von C. Fr. Gauß (Werke 2, 208. Aus dem Nachlaß d. Jahres 1831) aufgestellt, daher auch als Gaußsches Gesetz bekannt. Die genannte Beziehung wurde in der Kristallographie von W. H. Miller (1837) weiter verbreitet und ganz besonders für die rechnerische Kristallographie benutzt und unabhängig von Gauß gefunden.

Über theoretische Kristallographie handeln hauptsächlich folgende Werke:

Fr. Mohs. Grundriss der Mineralogie. 1822.

C. Fr. Naumann. Lehrbuch der reinen und angewandten Krystallographie. 2 Bde. Leipzig 1829—1830.

A. T. Kupffer. Handbuch der rechnenden Krystallonomie. Petersburg 1831.

W. H. Miller. Treatise on Crystallography.

C. Rammelsberg. Lehrbuch der Krystallkunde. Berlin 1852.

C. Fr. Naumann. Elemente der theoretischen Krystallographie. Leipzig 1856.

Q. Sella. Sulle forme cristalline del boro adamantino. Torino 1857.

—— Sul cangiamento di assi in un sistema cristallino. Idem.

—— Elementi di cristallografia. Torino 1866.

H. Karsten. Lehrbuch der Krystallographie. Leipzig 1861.

H. Kopp. Einleitung in die Krystallographie. 2. Aufl. Braunschweig 1862.

V. v. Lang. Lehrbuch der Krystallographie. Wien 1866.

A. Schrauf. Lehrbuch der physikalischen Mineralogie. 2 Bde. Wien 1866 und 1868.

A. Bravais. Études cristallographiques. Paris 1866.

Fr. Aug. Quenstedt. Grundriss der bestimmenden und rechnenden Krystallographie. Tübingen 1873.

G. Rose. Elemente der Krystallographie. 3. Aufl. Berlin 1873. II. Bd. von Sadebeck 1878.

A. Knop. System der Anorganographie. Leipzig 1876.

C. Klein. Einleitung in die Krystallberechnung. Stuttgart 1876.

E. Mallard. Traité de Cristallographie. Bd. I. Paris 1879.

P. Groth. Physikalische Krystallographie. Leipzig 1876. 2. Aufl. 1885. 3. Aufl. 1894.
Th. Liebisch. Geometrische Krystallographie. Leipzig 1881.
—— Grundriss der phys. Krystallographie. Leipzig 1898.
R. Panebianco. Trattato di Mineralogia. Padova 1887.
G. Wyruboff. Manuel pratique de cristallographie. Paris 1889.
Ch. Soret. Eléments de cristall. physique. Genf und Paris 1893.
W. Story Maskelyne. Cristallography. Oxford 1895.
W. J. Lewis. Treatise on Crystallography. 1899.
H. Hilton. Mathematical crystallograhpy. Oxford 1903.

Man möge noch folgende Aufsätze sehen:

Fr. Kobell. Zur Berechnung der Krystallformen. München 1867.
R. Panebianco. Calcolo cristallografico. Padova 1888.
K. Brauns. Das Trigonometer usw. Buda-Pest 1883.
V. Goldschmidt. Über Entwicklung der Krystallformen. Ztschr. f. Krystall. **28**, 1, 414.
—— Über Projektion und graphische Krystallberechnung. Berlin 1887.
—— Über Abteilung der Krystallsysteme. Ztschr. f. Krystall. **32**, 49.
R. W. H. J. Hudson. Über die Bestimmung der Positionen von Punkten und Ebenen usw. Ztschr. f. Krystall. **34**, 339.
W. J. Lewis. Über Graßmanns Methode der Axendarstellung usw. Ztschr. f. Krystall. **34**, 330.
E. v. Fedorow. Beiträge zur Zonenelkrystallographie. Ztschr. f. Krystall. **34**, 133; **35**, 25, auch **38**, 330.
H. Baumhauer. Untersuchungen über die Entwicklung der Krystallflächen im Zonenverbande. Ztschr. f. Krystall. **38**, 628.
A. J. Moses und A. F. Rogers. Formeln und graphische Methoden zur Bestimmung von Krystallen auf Grund von Coordinatenwinkeln und Millerschen Indizes. Ztschr. f. Krystall. **38**, 209.

Die Systematik der Kristalle hat ihren Anfang mit Haüy gehabt. In der 1. Aufl. seines Traité de Minéralogie (1801) unterschied er sechs Kerngestalten: das Parallelopipedon, das Oktaeder, das Tetraeder, das reguläre sechsseitige Prisma, das Rhomboidaldodekaeder und das Dodekaeder mit dreieckigen Flächen. Nach der Entdeckung der Symmetrie (1815) wurden die Kerngestalten (primitiven Formen) besser definiert.

In der Lévyschen Systematik erscheinen bereits sechs Systeme der Kristalle, nämlich kubisch, quadratisch, rhombisch, hexagonal, klinorhombisch und klinorhomboidisch.

Eine kompliziertere und teilweise willkürliche Systematik ist die von J. J. Bernhardi (1807). Die bis heutzutage gebliebene Systematik reicht auf Chr. S. Weiß zurück, hat als Ausgangspunkt die Symmetrie der Achsen und wird im Kapitel der Symmetrie auseinandergesetzt.

Zuerst Haußmann, dann Breithaupt (1828) haben nachzuweisen versucht, daß die Kristallgestalten aus dem Rhombendodekaeder hergeleitet werden können, während Jentzsch (1859) die Kristalle in 4 Gruppen einteilt ohne

Rücksicht auf die Symmetrie, und jede Gruppe ferner in symmetrische und asymmetrische Gestalten.

In neuester Zeit hatte auch Mallard (1884) versucht, eine einzige Beziehung zwischen allen Kristallen aufzustellen, und Wallerant wollte ebenfalls alle Kristallgestalten aus einer einzigen Grundgestalt ableiten. Glücklicher war die Auffassung Fedorows, zwei große Gruppen bei den Kristallgestalten nach dem Prinzip der Komplikation zu unterscheiden, nämlich die pseudotetragonale und die pseudohexagonale, worauf auch Mallard aufmerksam gemacht hatte.

Die hier angewendete Einteilung der Kristalle in vier Hauptgrundgestalten stützt sich auf das Prinzip der Harmonie, und geht daher auf die Arbeit Goldschmidts zurück.

b) Beschreibung der Grundgestalten der Kristalle.

§ 13. Kristallformen.

Die Beschreibung der Grundgestalten vereinfacht sich, wenn gewisse Flächenpaare zusammengenommen werden. Am einfachsten ist es, man stellt jene Flächen zusammen, welche in der Grundgestalt gleich ausgebildet auftreten.

Kristallform wird das Polyeder genannt, welches aus gleichmäßig stark herrschenden Flächen gebildet wird. Die Flächen einer Kristallform hängen also harmonisch zusammen mit den vorhandenen Harmonieelementen.

Bei den einzelnen Grundgestalten werden wir verschiedene Formen kennen lernen. Aus den möglichen Formen der I., II. und III. Ableitung bildet sich die Grundgestalt heraus. Um eine Kristallform herauszufinden, geht man von irgend welcher Fläche aus, welche wir im allgemeinen mit $(h_1 h_2 h_3)$ bezeichnen.

Ist eine Achse tri-, di- oder hexaharmonisch, so entspricht die betreffende Fläche mit sich selbst im allgemeinen 3 resp. 4 oder 6 Flächen. Spezielle Fälle kommen vor, wenn diese 3, 4 oder 6 Flächen alle oder ein Teil derselben zusammenfallen.

Durch eine tri-, di- oder hexaharmonische Achse gehen 3 bezw. 4 oder 6 Harmonieebenen.

Es entspricht also jede Fläche $(h_1 h_2 h_3)$ bei diesen Harmonieachse bezw. 6, 8 oder 12 Flächen, sie selbst mitgerechnet.

Ferner stellt sich eine monoharmonische mit einer di-, tri- oder hexaharmonischen Achse zusammen. Also wird eine Kristallform im allgemeinen aus 12, 16 oder 24 Flächen bestehen.

Endlich hängen mit 2 diharmonischen Achsen im ganzen 3 von gleicher Art zusammen; die hierher gehörende Form wird deshalb im allgemeinen aus $3 \times 16 = 48$ Flächen bestehen.

Die Kristallformen sind also Polyeder, die im allgemeinen aus 6, 8, 12 oder 24 harmonisch zusammenhängenden Flächenpaaren gebildet werden.

Gehen die 6, resp. 8 oder 12 Flächenpaare in 1 Flächenpaar über, so **heißt** diese Kristallform die Basis; sie kann tri-, di- oder hexaharmonisch sein.

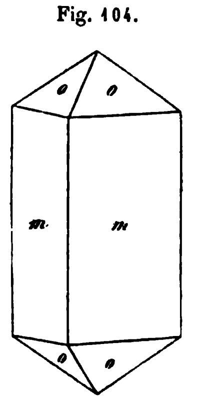


Fig. 104.

Während eine Fläche oder ein Flächenpaar mit dem Symbol $(h_1 h_2 h_3)$ bezeichnet wird, erhält eine Kristallform das Symbol $\{h_1 h_2 h_3\}$. Damit will man andeuten, daß mit der Fläche $(h_1 h_2 h_3)$ alle harmonisch zusammenhängenden Flächen inbegriffen sind. Die in Fig. 104 dargestellte Grundgestalt des sauren Kaliumphosphats besteht aus zwei Formen, nämlich der aus den 4 Flächen $mm\ldots$ gebildeten prismatischen Form und der aus den 8 Flächen $oo\ldots$ gebildeten Pyramide.

Will man mit einem Symbol alle harmonisch zusammenhängenden Zonen bezeichnen, so schreibt man ähnlich, wie für die Kristallformen $\{[r_1 r_2 r_3]\}$, wo $[r_1 r_2 r_3]$ eine Zone bedeutet.

I. Drei- und viergliedrige Grundgestalten.

§ 44. Allgemeine Eigenschaften.

Diese Grundgestalten sind schematisch durch die stereographischen Bilder Figg. 112, 117, 127 dargestellt. Sie sind voneinander ableitbar durch die I. Ableitung, da alle Flächen der I. Ableitung in allen diesen Grundgestalten mehr oder weniger herrschen.

Bei den hexaedrischen, Fig. 112, herrschen die drei Flächenpaare c_1, c_2, c_3, bei den oktaedrischen, Fig. 117, die 4 Flächenpaare o_1, o_2, o_3, o_4 und bei den dodekaedrischen, Fig. 127, Grundgestalten herrschen die 6 Flächenpaare m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6 vor. Um eine einheitliche Bezeichnung für diese drei Grundgestalten zu erreichen, bezieht man die Flächen auf die drei Flächenpaare c_1, c_2, c_3, die einen Winkel miteinander einschließen, der nicht weit von 90° ist. Infolgedessen verhalten sich die geometrischen Konstanten dieser Grundgestalten folgendermaßen:

$$c_1 : c_2 : c_3 = 1 : 1 : 1 \text{ und } \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 90^\circ,$$

resp.

$$a : b : c = 1 : 1 : 1, \ \alpha = \beta = \gamma = 90^\circ.$$

Die kleinsten Kohäsionsminima stimmen bei den hexaedrischen Grundgestalten mit den Lagen der Flächen c_1, c_2, c_3 überein, bei den oktaedrischen mit denen der Flächen o_1, o_2, o_3, o_4, bei den dodekaedrischen mit denen der Flächen m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6.

Indem man die Flächen c_1, c_2, c_3 mit (100) bezw. mit (010) und (001) bezeichnet, erhalten die Flächen o_1, o_2, o_3, o_4 die Bezeichnungen (111), $(\bar{1}11)$, $(\bar{1}\bar{1}1)$ und $(1\bar{1}1)$, und die Flächen m_1, m_2, m_3, m_4, m_5, m_6 die Bezeichnungen (110), $(\bar{1}10)$, (101), $(\bar{1}01)$, (011), $(0\bar{1}1)$. Die ersten drei Flächenpaare bilden das Hexaeder {100}, die 4 Flächenpaare o_1, o_2, o_3, o_4 das Oktaeder {111} und

die letzten 6 Flächenpaare das Rhombendodekaeder $\{110\}$. Diese sind die drei Einheitsformen, welche hauptsächlich die Grundgestalten zusammensetzen. Die übrigen Kristallformen gehören zur II. und III. Ableitung.

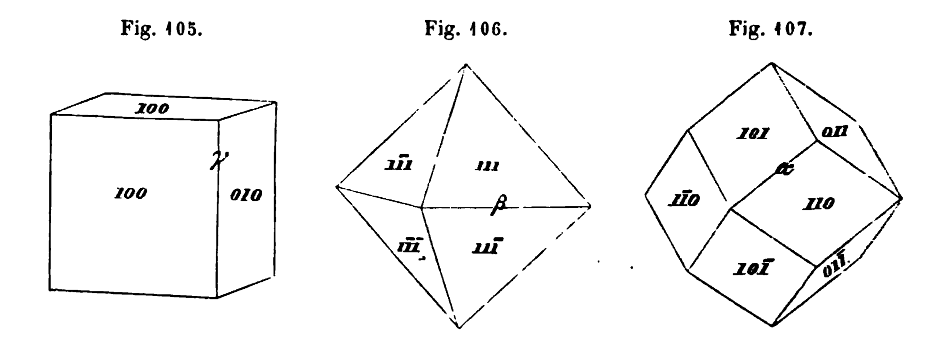
Das Hexaeder $\{100\}$ ist in Fig. 105 abgebildet und wird umschlossen von den sechs Flächen:

$$(100),\ (010),\ (001),\ (\bar{1}00),\ (0\bar{1}0),\ (00\bar{1}),$$

welche diharmonisch sind. Die aus diesen Flächen sich ergebenden drei Zonen sind ebenfalls diharmonisch:

$$[100],\ [010],\ [001].$$

Fig. 105. Fig. 106. Fig. 107.



Das Oktaeder $\{111\}$ ist in Fig. 106 abgebildet und wird umschlossen von den acht triharmonischen Flächen:

$$(111),\ (\bar{1}11),\ (\bar{1}\bar{1}1),\ (1\bar{1}1),$$
$$(\bar{1}\bar{1}\bar{1}),\ (1\bar{1}\bar{1}),\ (11\bar{1}),\ (\bar{1}1\bar{1}).$$

Die diese acht Flächen bildenden Zonen sind monoharmonisch:

$$[110],\ [1\bar{1}0],\ [101],\ [10\bar{1}],\ [011],\ [0\bar{1}1].$$

Das Dodekaeder $\{110\}$ ist in Fig. 107 abgebildet und wird umschlossen von den 12 monoharmonischen Flächen:

$$(110),\ (1\bar{1}0),\ (101),\ (\bar{1}01),\ (011),\ (0\bar{1}1),$$
$$(\bar{1}\bar{1}0),\ (\bar{1}10),\ (\bar{1}0\bar{1}),\ (10\bar{1}),\ (0\bar{1}\bar{1}),\ (01\bar{1}).$$

Die diese 12 Flächen bildenden vier triharmonischen Zonen sind

$$[111],\ [\bar{1}11],\ [\bar{1}\bar{1}1],\ [1\bar{1}1].$$

Die mono-, di- und triharmonischen Zonen haben mono-, di- und triharmonische Achsen. Die mono- und diharmonischen Flächen sind gleichzeitig Harmonieebenen.

Die drei- und viergliedrigen Grundgestalten werden also durch folgende 23 Harmonieelemente ausgezeichnet:

3 Diharmonieachsen,
4 Triharmonieachsen,

6 Monoharmonieachsen,
3 + 6 Harmonieebenen und
1 Harmoniezentrum.

Infolge dieser 23 Harmonieelemente entspricht jede Fläche im allgemeinen 24 Flächenpaaren, sie selbst gerechnet, die man folgendermaßen findet. Es sei die Fläche (123) gegeben. Da die Zonenachse [111] triharmonisch ist, so bestehen mit (123) folgende 3 Flächen:

(123), (231), (312).

Nun spielen aber die drei Flächen $(1\bar{1}0)$, $(\bar{1}01)$ und $(0\bar{1}1)$ die Rolle von Harmonieebenen; also hängen mit den vorigen 3 Flächen noch folgende 3 Flächen zusammen:

(213), (132), (321).

Da ferner 4 triharmonische Zonenachsen vorhanden sind, so wird man im ganzen 4 Mal analoge Flächen, also 24 Flächenpaare erhalten, nämlich:

(123) (231) (312) (213) (132) (321)
$(\bar{1}23)$ $(\bar{2}31)$ $(\bar{3}12)$ $(\bar{2}13)$ $(\bar{1}32)$ $(\bar{3}21)$
$(\bar{1}\bar{2}3)$ $(\bar{2}\bar{3}1)$ $(\bar{3}\bar{1}2)$ $(\bar{2}\bar{1}3)$ $(\bar{1}\bar{3}2)$ $(\bar{3}\bar{2}1)$
$(1\bar{2}3)$ $(2\bar{3}1)$ $(3\bar{1}2)$ $(2\bar{1}3)$ $(1\bar{3}2)$ $(3\bar{2}1)$.

Die aus diesen 48 Flächen zusammengesetzte Kristallform heißt Hexakisoktaeder, Fig. 108, da an der Stelle von jeder Oktaederfläche 6 Flächen auftreten. Die genannte Form erhält die Bezeichnung {123}, {231}, oder {312} usw.

In speziellen Fällen gehen die 24 Flächenpaare in 12 über. Das geschieht, sobald einer der 3 Indizes Null ist, oder 2 derselben gleich ausfallen.

Fig. 108.

Fig. 109.

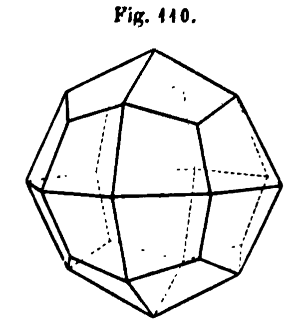
Entweder sind die zwei größten Indizes untereinander gleich und man erhält das Triakisoktaeder, Fig. 109, das daher aus folgenden 12 Flächenpaaren besteht:

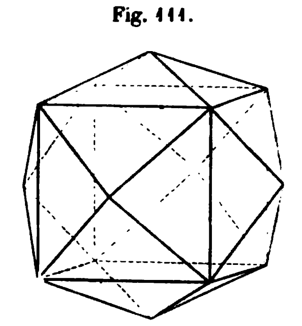
(122) (221) (212)
$(\bar{1}22)$ $(\bar{2}21)$ $(\bar{2}12)$
$(\bar{1}\bar{2}2)$ $(\bar{2}\bar{2}1)$ $(\bar{2}\bar{1}2)$
$(1\bar{2}2)$ $(2\bar{2}1)$ $(2\bar{1}2)$.

Oder die zwei kleinsten Indizes sind untereinander gleich und man erhält das **Ikositetraeder**, Fig. 110, das daher aus folgenden 12 Flächenpaaren besteht:

(113) (131) (311)
$(\bar{1}13)$ $(\bar{1}31)$ $(\bar{3}11)$
$(\bar{1}\bar{1}3)$ $(\bar{1}\bar{3}1)$ $(\bar{3}\bar{1}1)$
$(1\bar{1}3)$ $(1\bar{3}1)$ $(3\bar{1}1)$.

Endlich gehen die 24 Flächenpaare in 12 über, wenn einer der 3 Indizes Null ist.


Fig. 110.


Fig. 111.

Ein solcher 24-Flächner heißt **Tetrakishexaeder**, Fig. 111, und besteht aus folgenden 12 Flächenpaaren:

(120) (201) (012) (210) (102) (021)
$(\bar{1}20)$ $(\bar{2}01)$ $(0\bar{1}2)$ $(\bar{2}10)$ $(\bar{1}02)$ $(0\bar{2}1)$.

§ 45. Hexaedrische Grundgestalten.

Wie im vorigen Paragraphen bemerkt wurde, haben diese Grundgestalten ihr kleinstes Kohäsionsminimum auf den Flächen des Hexaeders $\{100\}$; infolgedessen fallen die Spaltungsflächen, wenn solche beobachtet werden, gewöhnlich mit den Flächen des Hexaeders zusammen, sodaß die Spaltungsstücke der Kristalle kubusartige Gebilde sind. Die vorherrschende und daher auch wahrscheinlichste Kristallform ist das Hexaeder.

Das Oktaeder und das Rhombendodekaeder treten verhältnismäßig zurück. Die Fig. 112 a, b zeigen in sterographischer Projektion und in paralleler Perspektive den allgemeinen Charakter der hexaedrischen Grundgestalten an.

Darin treten die Zonen $[100]$, $[010]$, $[001]$ stark hervor, sowie auch die drei Flächenpaare $\{100\}$.

Sind die drei Winkel $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ resp. α, β, γ gleich 90°, so berechnet sich der Wert der Kohäsion senkrecht zu den Flächen des Oktaeders folgendermaßen:

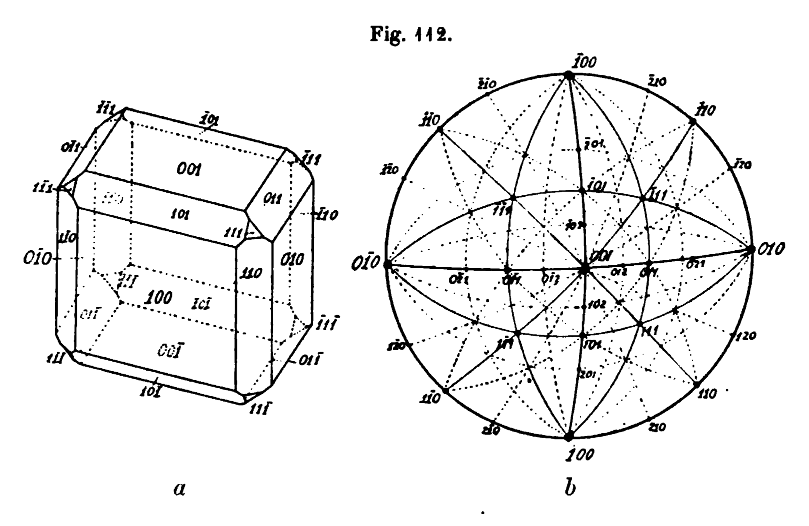
$$c' = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2},$$

also $c\sqrt{3}$, falls $c_1 = c_2 = c_3 = c$ ist; und die Kohäsion senkrecht zu den Flächen des Rhombendodekaeders:

$$c_{12} = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}, \quad c_{23} = \sqrt{c_2^2 + c_3^2}, \quad c_{31} = \sqrt{c_3^2 + c_1^2},$$

also $c\sqrt{2}$, falls, wie vorher, $c_1 = c_2 = c_3 = c$ ist.

Fig. 112.



a *b*

Das Rhombendodekaeder und resp. die Kristallformen, welche dem Dodekaeder sich nähern, sind also besser entwickelt als das Oktaeder und die dem Oktaeder nahe liegenden Formen.

Beispiele:

Hauerit MnS nach {100} vollkommen spaltbar.

Analcim $Na^2Al^2Si^4O^{12} + 2H_2O$, Fig. 113, hexaedrisch, Spaltbarkeit sehr unvollkommen.

Sylvin KCl und Steinsalz $NaCl$, beide nach {100} vollkommen spaltbar.

Für diese Grundgestalten gilt die Bedingung $a : b : c = 1 : 1 : 1$, $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$.

Fig. 113.

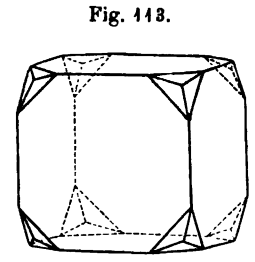
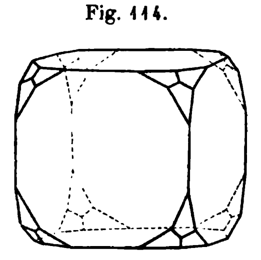


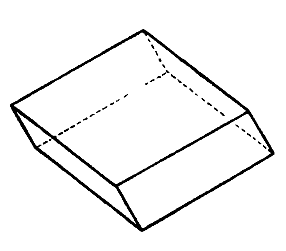
Fig. 114.



Sellait $MgFl^2$, Skapolit $CaAlSi^2O$, Mizzonit, alle drei nur nach (100) und (010) spaltbar. Für sie ist $a : b = 1 : 1$, $b : c \equiv 1 : 1$, $\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$.

Bleiglanz PbS nach {100} vollkommen spaltbar, Fig. 114.

Fig. 115.



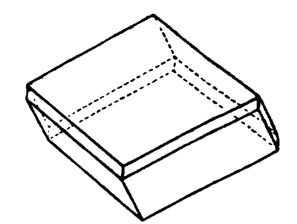
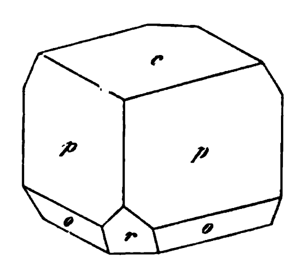


Fig. 116.



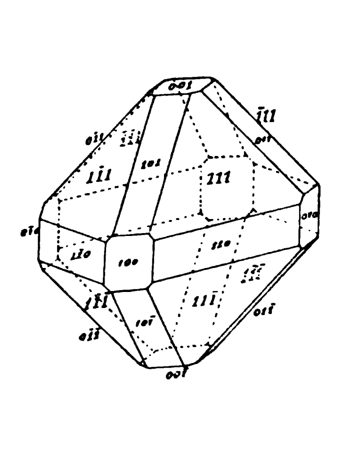
Die Karbonate, wie Kalzit $CaCO^3$, Siderit $FeCO^3$, Dolomit $MgCa(CO^3)^2$ usw. spalten ebenfalls nach {100} und daher haben ihre Spaltungsstücke kubusartige Gestalt, Fig. 115. Sie gehören aber doch besser zu den dreigliedrigen Grundgestalten. Siehe S. 122.

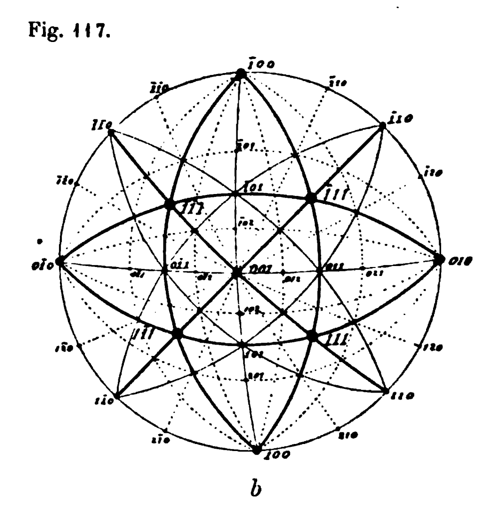
Chlorsaures Kalium $KClO^3$, Fig. 114; dabei bedeuten: $p(100)$ und (010), $c(001)$, $o(10\bar{1})$ und $(01\bar{1})$, $r(11\bar{1})$. Spaltungsflächen (100), (010).

§ 46. Oktaedrische Grundgestalten.

Wie im vorigen Paragraphen bemerkt worden ist, haben diese Grundgestalten ihr kleinstes Kohäsionsminimum auf den Flächen des Oktaeders {111}; infolgedessen fallen die Spaltungsflächen, wenn solche beobachtet werden, mit den Flächen des Oktaeders zusammen, so daß die Spaltungsstücke der Kristalle Oktaeder sind. Die vorherrschende und daher die wahrscheinlichste Kristallform ist das Oktaeder {111}. Das Hexaeder {100} und das Rhombendodekaeder {110} treten verhältnismäßig zurück.

Fig. 117.





a *b*

Die Fig. 117 a, b zeigen in stereographischer Projektion und in paralleler Perspektive den allgemeinen Charakter der oktaedrischen Grundgestalten.

Darin treten die Zonen [110], [1$\bar{1}$0], [101], [$\bar{1}$01], [011], [0$\bar{1}$1] stark hervor, sowie auch die vier Flächenpaare {111}.

Um den Wert der Kohäsion senkrecht zu den Flächen des Hexaeders und des Dodekaeders zu finden, wenn c' die Kohäsion zu den Oktaederflächen bedeutet, setzen wir voraus, daß die Winkel α_1, α_2, α_3 untereinander, und daß ebenso c_1, c_2, c_3 untereinander gleich seien, und zwar gleich c'.

Da der Flächenwinkel β des Oktaeders, Fig. 105, gleich 70° 31′ 43″,6 ist, so werden wir für die Kohäsion auf den Hexaederflächen haben:

$$c_1 = 2c' \sin\frac{\beta}{2} = 2c'\sqrt{\frac{1}{3}}, \text{ da } \cos\beta = \frac{1}{3} \text{ ist;}$$

und für die Kohäsion auf den Dodekaederflächen:

$$c_{12} = 2c' \cos\frac{\beta}{2} = 2c'\sqrt{\frac{2}{3}}\,.$$

Das Hexaeder wird daher besser zur Entwicklung gelangen, als das Rhombendodekaeder; deshalb erscheinen die Kristalle, welche hierher gehören, gewöhnlich mit den Flächen des Oktaeders, dann mit denjenigen Flächen, welche nahe dem Hexaeder liegen, während das Rhombendodekaeder entweder gar nicht vorkommt oder schwach entwickelt ist.

Beispiele: Gold Au, meistens nach {111} stark ausgebildet, Fig. 118, ohne Spaltbarkeit.

Rotkupfererz auch nach {111} gut ausgebildet, Fig. 119.

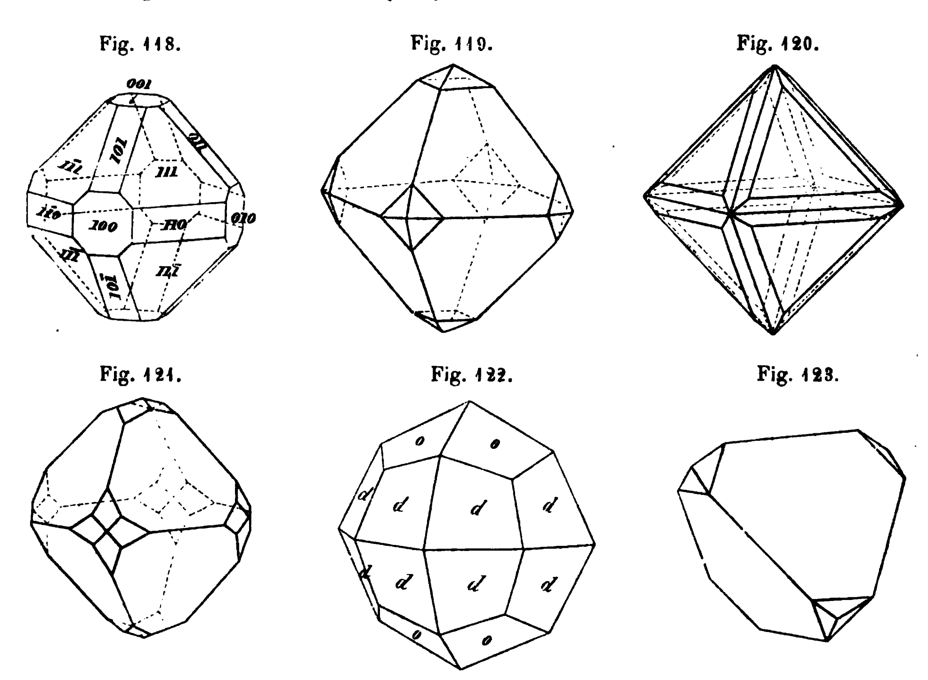
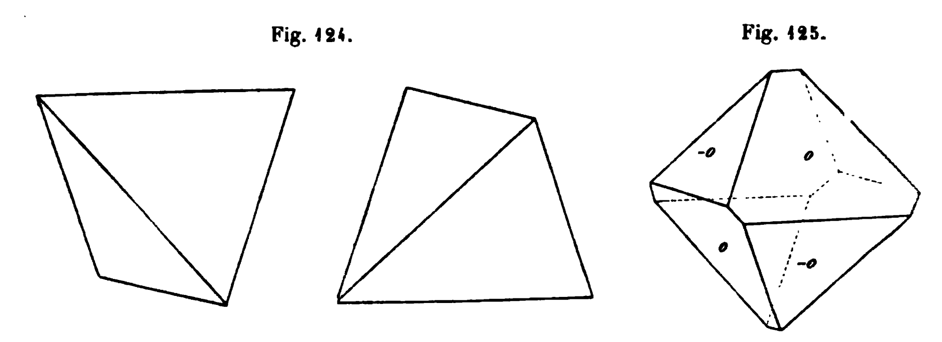


Fig. 118. Fig. 119. Fig. 120. Fig. 121. Fig. 122. Fig. 123.

Flußspat CaF^2 vollkommen spaltbar nach {111}, und nach dieser Form nicht selten ausgebildet, Fig. 120 und Fig. 121.

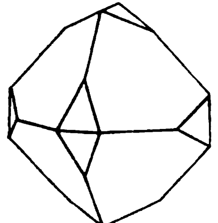
Leucit $K^2Al^2Si^4O^{12}$ ohne Spaltbarkeit; meistens nach dem Ikositetraeder {211} (Leucitoeder) ausgebildet; siehe Fig. 122, wo die Flächen des Ikositetraeders durch d und o bezeichnet sind.

Fig. 124. Fig. 125.



Fahlerz, Fig. 123; wo bei den einzelnen Kristallgestalten das Tetraeder anstatt des Oktaeders vorherrscht. Das Tetraeder entsteht, wie wir später sehen werden, wenn die Oktaederflächen abwechselnd zur Ausbildung gelangen, siehe Fig. 124.

Fig. 126.



Kupferkies $CuFeS^2$, Fig. 125, wo o{111} bedeutet; keine Spaltbarkeit ist darin wahrzunehmen.

Pyrit FeS^2, Fig. 126; hier herrscht {111} vor, außerdem tritt das Tetrakishexaeder {203} aber nur teilweise ausgebildet auf.

§ 47. Dodekaedrische Grundgestalten.

Diese Grundgestalten haben ihre kleinsten Kohäsionsminima auf den Flächen des Rhombendodekaeders {110}. Daher fallen die Spaltungsflächen mit diesen Flächen zusammen. Die Spaltungsstücke sollten Rhomboeder sein, infolge der vielen Spaltungen aber (nämlich 6), kommen nicht alle gleichzeitig zum Vorschein.

Die vorherrschende und daher die wahrscheinlichste Kristallform ist das Rhombendodekaeder {110}. Das Hexaeder und das Oktaeder treten dagegen verhältnismäßig zurück.

Die Fig. 127 a, b geben in stereographischer Projektion und in paralleler Perspektive das allgemeine Bild dieser Grundgestalten wieder. Darin treten die vier triharmonischen Zonen [111], [$\bar{1}$11], [$\bar{1}\bar{1}$1], [1$\bar{1}$1] stark hervor, sowie die 6 Flächenpaare (110), (101), ($\bar{1}$10), ($\bar{1}$01), (011), (0$\bar{1}$1).

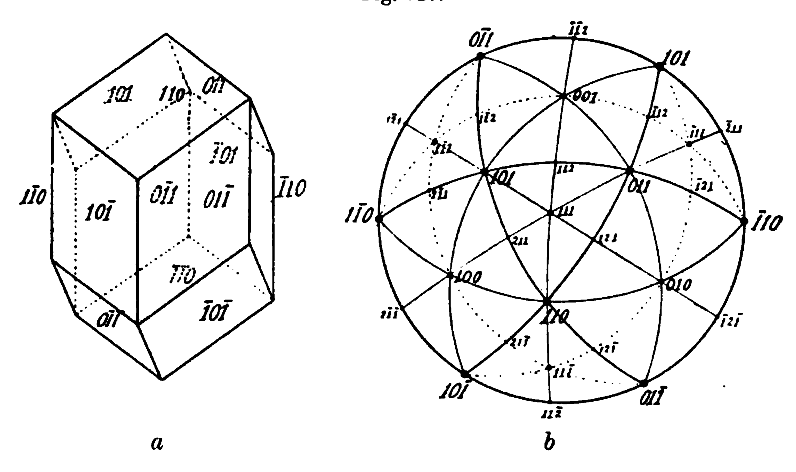
Um den Wert der Kohäsion zu finden, welche auf die Flächen des Hexaeders und des Oktaeders wirkt, gehen wir von der einfachen Annahme aus, daß wiederum wie bei den vorhergehenden Grundgestalten $c_1 = c_2 = c_3$ und $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 90^\circ$ sei. Für die Kohäsion auf den Hexaederflächen haben wir daher:

$$c_1 = \sqrt{c_{12}^2 + c_{12}^2} = c_{12}\sqrt{2},$$

und auf den Oktaederflächen

$$c' = \sqrt{c_{12}^2 + 2c_{12}^2} = c_{12}\sqrt{3}.$$

Fig. 127.

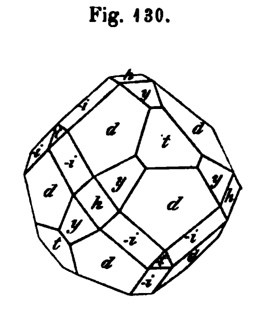


a *b*

Das Hexaeder wird daher stärker zur Entwicklung gelangen als das Oktaeder; siehe Fig. 128 und Fig. 129.

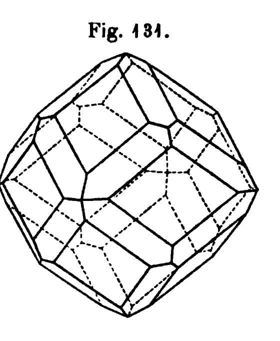
Fig. 128. Fig. 129.

Fig. 130.



Beispiele: Zinkblende ZnS, Fig. 130, worin die Formen $d\{110\}$, $t\{111\}$, $y\{311\}$, $i\{211\}$, $h\{100\}$ auftreten. Die Spaltungsflächen nach $\{110\}$ sind vollkommen.

Fig. 131.



Granat $\overset{II}{R^3}\overset{VI}{R^2}Si^3O^{12}$, Fig. 131, mit den Formen $\{110\}$, $\{211\}$; eine deutliche Spaltbarkeit ist nicht wahrzunehmen.

Feldspat $\overset{I}{R}AlSi^3O^8(\overset{I}{R}=K, Na)$ und $CaAl^2Si^2O^8$ oder ein Gemisch von beiden. Die vollkommenen Spaltungsflächen fallen mit M und P zusammen, die etwa 90° bis 86°

miteinander einschließen, Fig. 132. Die Zone $MlTM'$ ... ist triharmonisch und herrscht vor; es gelten in der Tat folgende Winkel:

$$Ml = 58^\circ\ 4' - 60^\circ 26'$$
$$lT = 54\ 14 - 61\ 13$$
$$TM' = 59\ 23\tfrac{1}{2} - 62\ 27\,.$$

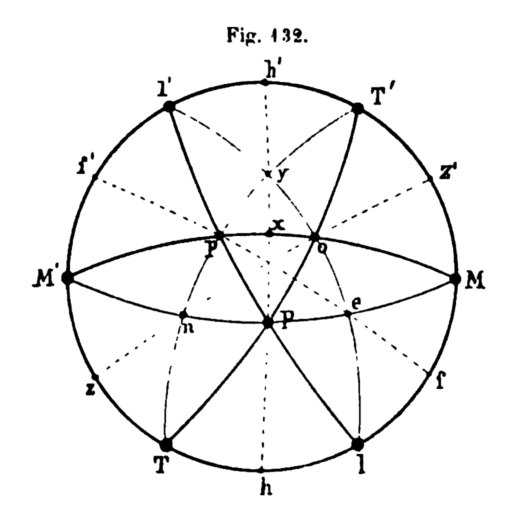
Auch die 3 Zonen $lPpl'$, $TPoT'$ und $MopM'$ sind triharmonisch; die dazu gehörigen Winkel variieren folgenderweise:

$lP = 65^\circ 17' - 67^\circ 47'$	$TP = 65^\circ 17' - 69^\circ 20'$
$Pp = 55\ 14\tfrac{1}{2} - 57\ 52$	$Po = 54\ 17 - 55\ 53$
$pl' = 56\ 15 - 56\ 58$	$oT' = 54\ 57 - 56\ 58$

$$Mo = 60^\circ 26\tfrac{1}{2}' - 63^\circ\ 8\tfrac{1}{2}'$$
$$op = 52\ 54 - 53\ 43$$
$$pM' = 63\ \ 8\tfrac{1}{2} - 66\ 18\,.$$

Die herrschenden Flächen sind $PMTl$; dazu gesellen sich zwar auch n und e, aber auch p und o; y ist ebenso weit entwickelt wie n und e. Die Spaltungen fallen mit PM, T und l zusammen. Aus diesen Beziehungen ist möglich zu schließen, daß die Feldspäte zu den dodekaedrischen Grundgestalten gehören müssen, wo $P = (110)$, $o = (011)$ und $p = (101)$ sind.

Fig. 132.



Indem wir also die Symbole der Flächen entsprechend den drei- und viergliedrigen Grundgestalten einführen, werden sie die einfachsten sein von allen Bezeichnungsarten, die man erhält, wenn die Feldspäte zu anderen Grundgestalten gerechnet werden. Man hat nämlich die 3 Flächen h, M und P mit (100) bez. (010), (001) bezeichnet. Wir wollen diese alte Bezeichnung mit der neuen vergleichen. Siehe auch § 37.

	Neue Bezeichnung	Alte Bezeichnung
P	(110)	(001)
o	(011)	($\bar{1}$11)
p	(101)	($\bar{1}\bar{1}$1)
M	($\bar{1}$10)	(010)
l	(01$\bar{1}$)	(110)
T	(10$\bar{1}$)	(1$\bar{1}$0)
e	(010)	(021)
n	(100)	(0$\bar{2}$1)

	Neue Bezeichnung	Alte Bezeichnung
y	(001)	$(\bar{2}01)$
f	$(\bar{1}2\bar{1})$	(130)
h	$(11\bar{2})$	(100)
z	$(2\bar{1}\bar{1})$	$(1\bar{3}0)$

II. Viergliedrige Grundgestalten.

§ 48. Allgemeine Eigenschaften.

Die hierauf bezüglichen Kristalle haben die Eigentümlichkeit, daß ein diharmonisches Element vorherrscht, daher die Bezeichnung viergliedrig. Zwei Minima der Kohäsion c_1 und c_2 sind daher unter sich nahezu gleich und sind fast aufeinander senkrecht, während das dritte Kohäsionsminimum c_3 bedeutend verschieden von c_1 und c_2, entweder größer oder kleiner, ist, aber auf c_1 und c_2 fast senkrecht steht. Die fünf Konstanten für die viergliedrigen Grundgestalten werden sich daher folgendermaßen verhalten:

$$c_1 : c_2 \equiv 1 : 1 ; \quad c_3 \gtreqless c_1 \text{ und } c_2$$
$$\alpha_1 \equiv \alpha_2 \equiv \alpha_3 \equiv 90^\circ$$

oder

$$a : b \equiv 1 : 1 ; \quad c \lesseqgtr a \text{ und } b$$
$$\alpha \equiv \beta \equiv \gamma \equiv 90^\circ .$$

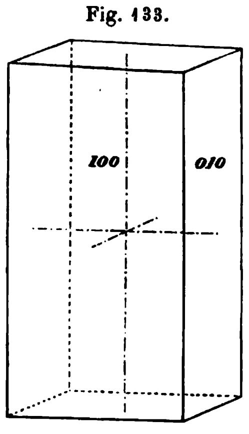
Die Flächen und Kristallformen werden auf die drei herrschenden Flächenpaare bezogen, deren Lagen mit c_1, c_2, c_3 übereinstimmen, und beziehungsweise mit (100), (010), (001) bezeichnet werden.

Herrschen die zwei Flächenpaare (100) und (010) über das dritte (001) vor, so heißen die viergliedrigen Grundgestalten prismatisch; tritt der umgekehrte Fall auf, so heißen die Grundgestalten tafelartig.

§ 49. Prismatische und tafelartige viergliedrige Grundgestalten. Kristallformen.

Die Hauptformen sind zweierlei: das quadratische Prisma 2. Art $\{100\}$, das von den Flächen (100), $(\bar{1}00)$, (010), $(0\bar{1}0)$ umschlossen wird und eine einzige und zwar diharmonische Zone bilden $[100]$; die Basis $\{001\}$, bestehend aus den zwei Flächen (001) und $(00\bar{1})$, sie ist ebenfalls diharmonisch, wie die vorhergehende Zone. Fig. 133.

Fig. 133.

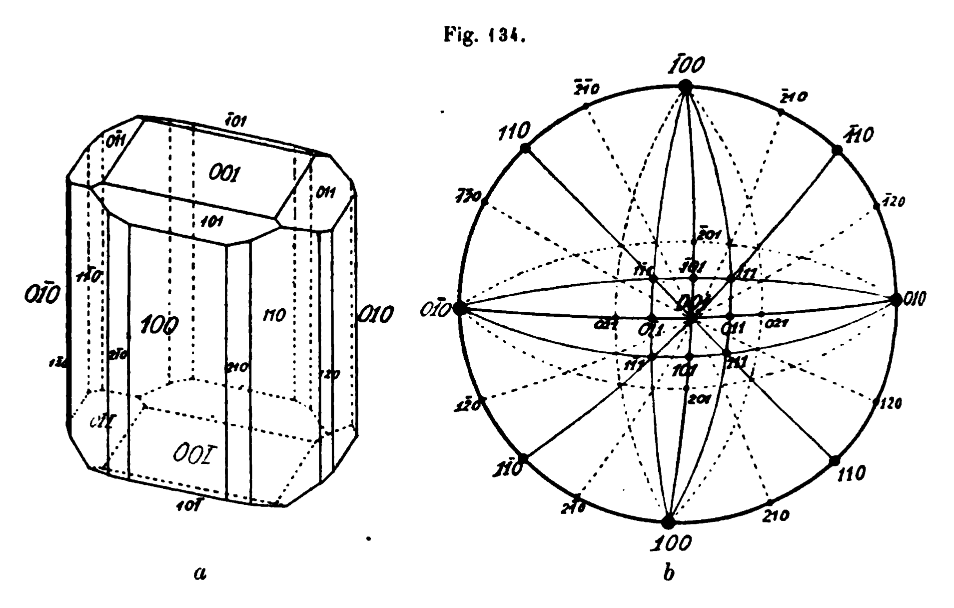


Mit diesen zwei Hauptformen fallen gewöhnlich die Spaltungsflächen zusammen; herrscht die diharmnoische Zone vor, so tritt auch die Spaltung in dieser Zone auf; herrscht umgekehrt die Basis vor, so sind die Spaltungsstücke tafelartig.

Die Fig. 134 a in paralleler Perspektive und die Fig. 134 b in stereographischer Projektion geben den allgemeinen Charakter

einer viergliedrigen Grundgestalt von prismatischer Ausbildung; desgleichen geben die Fig. 135a in paralleler Perspektive und die Fig. 135b in stereographischer Projektion das allgemeine Aussehen einer viergliedrigen Grundgestalt von tafelartiger Ausbildung.

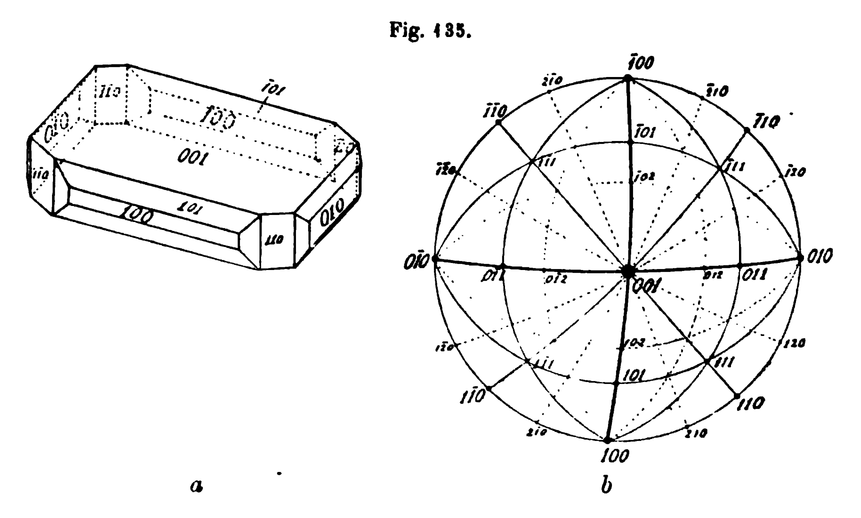
Fig. 134.



a *b*

Wenn wir diese Grundgestalten mit den vorigen vergleichen, so fällt folgendes Merkmal in das Auge. Bei den vier- und dreigliedrigen Grundgestalten liegt der Pol (111) nahezu in der Mitte des sphärischen Dreiecks (100), (010) (001), während er hier seitlich zu stehen kommt, und zwar in der Nähe eines

Fig. 135.



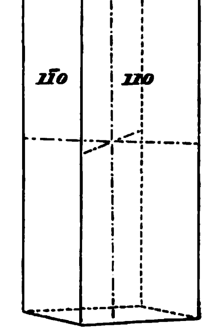
a *b*

Poles bei der prismatischen Ausbildung, oder in der Nähe eines Zonenkreises bei der tafelartigen Ausbildung.

Die noch zu behandelnden Einheitsformen sind in stereographischer Projektion in Fig. 134 und Fig. 135 angegeben.

Das quadratische Prisma 1. Art $\{110\}$. Es besteht aus den 4 Flächen (110), $(1\bar{1}0)$, $(\bar{1}\bar{1}0)$ und $(\bar{1}10)$, und ist harmonisch gelegen in bezug auf das quadratische Prisma der 2. Art $\{100\}$. Fig. 136.

Fig. 136.



Die quadratische Pyramide 1. Art $\{111\}$. Sie ist von den 4 Flächenpaaren umschlossen:

$$(111),\ (\bar{1}11),\ (\bar{1}\bar{1}1),\ (1\bar{1}1)$$

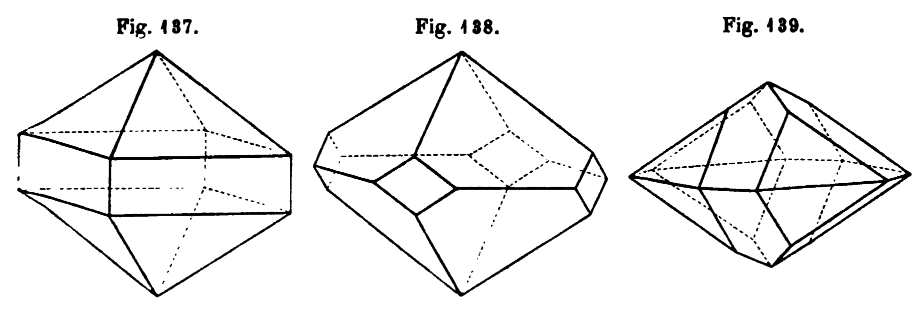
und hat eine große Ähnlichkeit mit dem Oktaeder der vorigen Grundgestalten.

Die quadratische Pyramide 2. Art $\{101\}$ besteht aus den 8 Flächen:

$$(101),\ (\bar{1}01),\ (011),\ (0\bar{1}1),$$
$$(\bar{1}0\bar{1}),\ (10\bar{1}),\ (0\bar{1}\bar{1}),\ (01\bar{1}).$$

Eine Pyramide in Verbindung mit einem Prisma von gleicher Art ist in Fig. 137, und eine Pyramide in Verbindung mit einem Prisma von verschiedener Art in Fig. 138 abgebildet. Eine Pyramide der 1. Art mit einer Pyramide der 2. Art ist in Fig. 139 wiedergegeben.

Fig. 137. Fig. 138. Fig. 139.



Um die Kristallformen der II., III. usw. Ableitung zu finden, müssen wir die Harmonieelemente kennen, welche die viergliedrigen Grundgestalten auszeichnen. Die Achse der diharmonischen Zone $[001]$ ist zuerst eine Diharmonieachse. Durch dieselbe gehen 2 + 2 Harmonieebenen, welche den Flächen (100), (010), (110), $(1\bar{1}0)$ parallel gehen. Eine Harmonieebene ist ferner diejenige, welche zu (001) parallel ist. Endlich sind Monoharmonieachsen die Richtungen $[100]$, $[010]$, $[110]$, $[1\bar{1}0]$.

Die Harmonieelemente sind daher folgende:

1 Diharmonieachse $[001]$,
2 + 2 Monoharmonieachsen $[100]$, $[010]$, $[110]$, $[1\bar{1}0]$,
1 Harmonieebene (001),
2 + 2 Harmonieebenen (100), (010), (110), $(1\bar{1}0)$,
1 Harmoniezentrum;

also im ganzen 11 Harmonieelemente.

Werden allgemeine Indizes h_1, h_2, h_3 angewendet, so entstehen allgemeine Krystallformen. Ist z. B. das Flächenpaar (123) gegeben, so hängen damit folgende Flächenpaare zusammen:

$$(123),\ (1\bar{2}3),\ (\bar{1}\bar{2}3),\ (\bar{1}23),$$

da die Achse [001] diharmonisch ist. In dieser Zone sind aber noch Harmonieebenen enthalten und daher folgende 4 Flächenpaare mit den vorhergehenden in Zusammenhang zu bringen:

$$(213),\ (2\bar{1}3),\ (\bar{2}\bar{1}3),\ (\bar{2}13).$$

Das aus (123) entstehende harmonische Gebilde besteht somit aus folgenden 8 harmonisch zusammenhängenden Flächenpaaren:

$$(123),\ (1\bar{2}3),\ (\bar{1}\bar{2}3),\ (\bar{1}23),$$
$$(213),\ (2\bar{1}3),\ (\bar{2}\bar{1}3),\ (\bar{2}13).$$

Die aus diesen 16 Flächen zusammengesetzte Kristallform heißt eine biquadratische Bipyramide und wird kurz mit dem Symbol {123} bezeichnet. Eine solche allgemeine Form ist in Fig. 140 wiedergegeben.

Fig. 140.

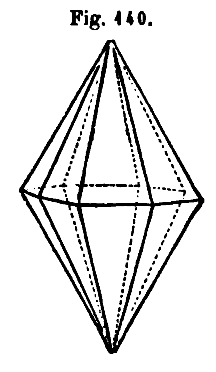


Fig. 141.

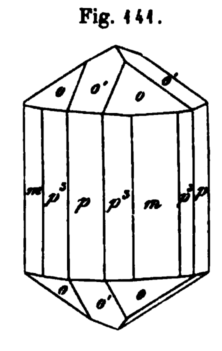
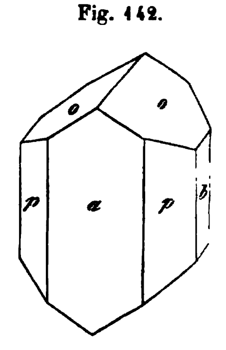


Fig. 142.



Aus dieser allgemeinen Form gehen, wenn die Indizes spezielle Werte bekommen, verschiedene Formen hervor, so z. B. erhalten wir, sofern der dritte Index Null ist, ein biquadratisches Prisma {120}, das aus 4 Flächenpaaren besteht. Oder ist einer der zwei ersten Indizes Null, so entsteht eine quadratische Bipyramide der 2. Art, während wenn die zwei Indizes untereinander gleich sind {223}, eine quadratische Bipyramide der 1. Art resultiert. Sie verhalten sich gegenseitig genau wie die Bipyramiden der Einheitsformen mit dem Unterschied, daß sie entweder stumpfer oder spitzer sind.

Die Kristallformen der II. und III. Ableitung sind also folgende:

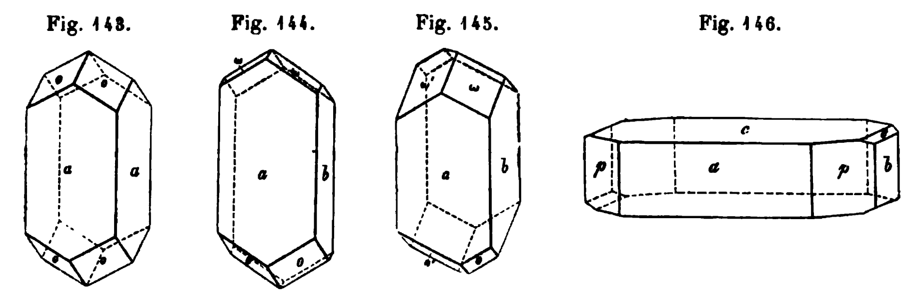
Biquadratische Prismen $\{h_1 h_2 0\}$,
quadratische Bipyramide der 1. Art $\{h_1 h_1 h_3\}$,
quadratische Bipyramide der 2. Art $\{h_1 0 h_3\}$,
biquadratische Bipyramide $\{h_1 h_2 h_3\}$.

Beispiele für prismatische Ausbildung:

Zinnerz SnO^2, Fig. 141; $pp\{100\}$, $mm\{110\}$, $oo\{111\}$, $o'o'\{101\}$, $p^3p^3\{310\}$.

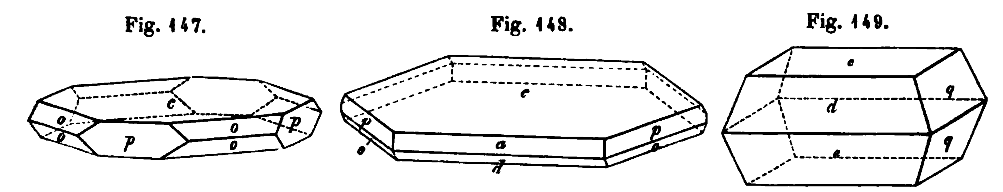
Augit $\overset{II}{R}SiO^3$, Fig. 142; hierbei ab {100}, pp {110}, oo {111}. Spaltbarkeit nach {110} und {100}.

Kaliumplatojodonitrit, Fig. 143,
Cäsiumplatojodonitrit, Fig. 144, } nach P. Groth.
Rubidiumplatojodonitrit, Fig. 145,


Fig. 143. Fig. 144. Fig. 145. Fig. 146.

Beispiele für tafelartige Ausbildung:

Benzodiphenylamid, Fig. 146, nach C. Bodewig.
Bernsteinsaures Baryum, Fig. 147, nach K. Haushofer.
Imidopropionnitril, Fig. 148, nach K. Haushofer.
Orthotolubenzaldehyd, Fig. 149, nach C. Bodewig.


Fig. 147. Fig. 148. Fig. 149.

§ 50. Verschiedene Ausbildung der viergliedrigen Grundgestalten.

Bei der prismatischen Ausbildung kann außer der Zone [001] die Fläche (001) zur Entwicklung gelangen; aber außerdem kann anstatt (001) die pyramidale Form {111} wie auch {101} auftreten. Diese verschiedenen Ausbildungen sind in der Fig. 150 a, b, c nebeneinander gestellt. Die 4 Flächenpaare der Form {111} oder {101} ersetzen gewissermaßen die Basis (001).

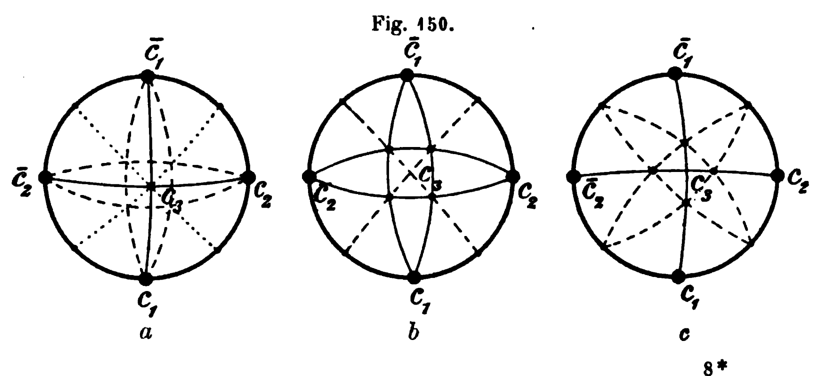

Fig. 150.
a b c

Fig. 151.

Bei den tafelartigen Kristallen können diese verschiedenen Ausbildungen ebenfalls auftreten; dann ersetzt die pyramidale Form die prismatische Zone [001].

Ein schönes Beispiel hierfür geben die Kristalle des Zinns Sn_m, wie sie die Fig. 151, nach Miller, zeigt; dabei bedeuten *pp* {100}, *mm* {110}, *oo* {111}, *o′o′* {101}.

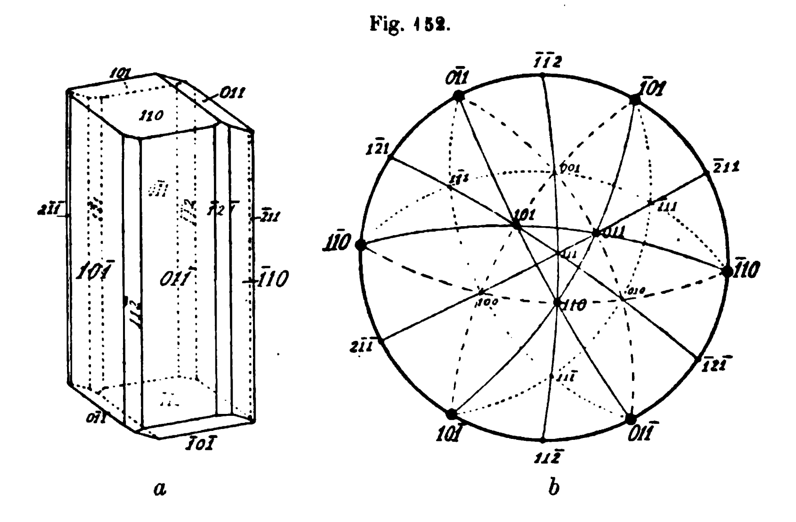
III. Dreigliedrige Grundgestalten.

§ 51. Allgemeine Eigenschaften.

Wenn in einer dodekaedrischen Grundgestalt entweder die triharmonische Fläche (111), wie sie dort genannt wurde, oder die triharmonische Zone [111] stark hervortritt, so gliedert sich die Grundgestalt dreizählig um dieses triharmonische Element, und es entstehen Grundgestalten, welche hierher gerechnet werden.

Drei Minima der Kohäsion sind unter sich gleich oder nahezu gleich, schließen einen Winkel ein, der nicht weit von 60° (120°) ist, und liegen in einer Ebene. Man bezeichnet sie mit (1$\bar{1}$0), (10$\bar{1}$), (0$\bar{1}$1). Drei fernere Kohäsionsminima sind ebenfalls untereinander nahezu gleich, und schließen mit den vorhergehenden einen Winkel ein, der bedeutend größer als 90°, oder kleiner als 60° ist, sodaß die dodekaedrische Grundgestalt in der Mitte zwischen diesen Grenzen zu liegen kommt. Man bezeichnet letztere mit (110), (101) und (011).

Fig. 152.



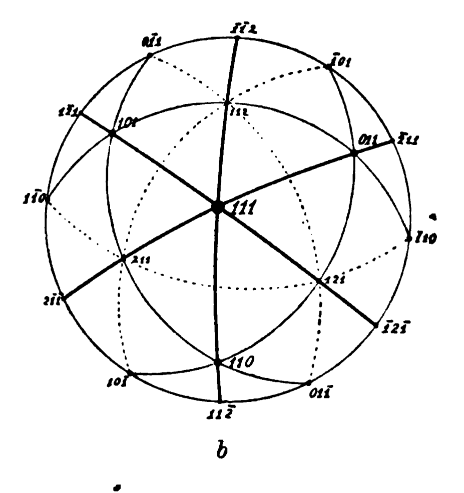
a b

Das Hauptmerkmal bei diesen Grundgestalten ist eine vorherrschende triharmonische Zone [111] oder eine vorherrschende triharmonische Fläche (111); daher die Bezeichnung dreigliedrig. Das allgemeine Aussehen der dreigliedrigen Grundgestalten ist durch die Fig. 152 a, b und Fig. 153 a, b gegeben. Herrscht

die Zone [111] vor, wie in der Fig. 152, so erhalten die Grundgestalten eine prismatische Ausbildung; herrscht dagegen die Fläche (111) vor, wie in der Fig. 153, so erhalten die Grundgestalten eine tafelartige Ausbildung.

Fig. 153.

a



b

Auch die Spaltungsflächen fallen entweder mit den Flächenpaaren $(1\bar{1}0)$, $(\bar{1}01)$, $(0\bar{1}1)$ der Zone [111] zusammen, oder mit dem Flächenpaar (111). Es kommt aber auch vor, daß die Spaltungen mit den Flächenpaaren (110), (101) und (011) zusammenfallen. In letzterem Fall ähneln offenbar die dreigliederigen Grundgestalten den dodekaedrischen; das kommt bei dem Kalkspat und bei den analogen Karbonaten vor.

Man bezieht die geometrischen Konstanten der dreigliederigen Grundgestalten auf die Flächenpaare (110), (101) und (011), und man bezeichnet sie mit c_1, c_2, c_3. Man hat also folgende Konstanten:

$$c_1 : c_2 : c_3 \equiv 1 : 1 : 1$$

und

$$\alpha_1 \equiv \alpha_2 \equiv \alpha_3 \lesseqgtr \begin{matrix} < 60^\circ \\ > 90^\circ. \end{matrix}$$

Die drei- und viergliedrigen Grundgestalten liegen daher in der Mitte zwischen den prismatischen und den tafelartigen dreigliedrigen Grundgestalten, denn bei ihnen ist $\alpha_1 \equiv \alpha_2 \equiv \alpha_3 \equiv 90^\circ$.

Kommt es vor, dass genau

$$c_1 = c_2 = c_3 \text{ und } \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3$$

ist, so rechnet man zu diesen Grundgestalten auch solche Kristalle, bei denen die Winkel α_1, α_2, α_3 größer als 60° sind, was z. B. bei den Karbonaten (Kalzit, Magnesit, Siderit, Dolomit usw.) der Fall ist.

§ 52. Prismatische und tafelartige dreigliedrige Grundgestalten. Kristallformen.

Die Hauptform ist das Rhomboeder 1. Art {110}, worauf die Kohäsionsminima c_1, c_2, c_3 bezogen werden. Dasselbe wird von den 6 Flächen (110) (101) (011) $(\bar{1}\bar{1}0)$ $(\bar{1}0\bar{1})$ und $(0\bar{1}\bar{1})$ umschlossen; seine Zonen sind $[\bar{1}11]$, $[1\bar{1}1]$, $[11\bar{1}]$. Ein Rhomboeder ist in Fig. 154 dargestellt.

Das Rhomboeder herrscht gewöhnlich nicht vor, ausgenommen, wenn der Winkel α zwischen 60° und 90° liegt; dann fallen aber auch die Spaltungsflächen mit den Rhomboederflächen zusammen.

Die übrigen Einheitsformen sind folgende:

das **hexagonale Prisma 1. Art** $\{1\bar{1}0\}$. Es besteht aus den 6 Flächen:

$$(1\bar{1}0),\ (10\bar{1}),\ (0\bar{1}1),\ (\bar{1}10),\ (\bar{1}01),\ (01\bar{1}),$$

und seine Zone stimmt mit $[111]$ überein.

Dasselbe ist in Fig. 155 wiedergegeben. Das hexagonale Prisma 1. Art herrscht vor bei der prismatischen Ausbildung der Grundgestalt;

das **erste Rhomboeder 2. Art** $\{100\}$. Dasselbe ist von den folgenden 6 Flächen zusammengesetzt:

$$(100)\quad (010)\quad (001)\quad (\bar{1}00)\quad (0\bar{1}0)\quad (00\bar{1})$$

und seine Zonen sind:

$$[100]\quad [010]\quad [001].$$

Fig. 154.

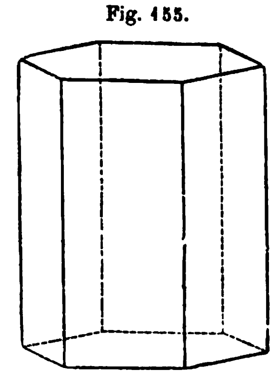


Fig. 155.

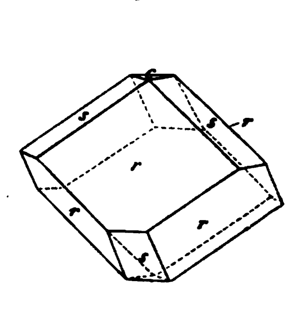


Fig. 156.

Dieses Rhomboeder ist ein spitzes in bezug auf das vorhergehende $\{110.\}$ Die Fig. 156 zeigt die Verbindung von stumpfen mit spitzen Rhomboedern;

das **erste spitze Rhomboeder 1. Art** $\{\bar{1}11\}$. Es wird umschlossen von den Flächen:

$$(\bar{1}11),\ (1\bar{1}1),\ (11\bar{1}),\ (1\bar{1}\bar{1}),\ (\bar{1}1\bar{1}),\ (\bar{1}\bar{1}1),$$

und seine Zonen sind

$$[1\bar{1}0],\ [\bar{1}01],\ [01\bar{1}];$$

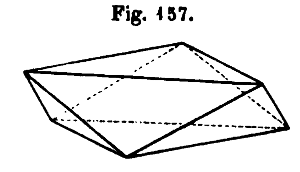


Fig. 157.

die **Basis** $\{111\}$; sie besteht aus den Flächen (111) und $(\bar{1}\bar{1}\bar{1})$. Die Fig. 157 stellt ein Rhomboeder mit der Basis dar.

Die Basis $\{111\}$ tritt nur dann oft auf, wenn die Winkel α_1, α_2, α_3 recht groß sind.

Nehmen wir den Grenzfall an, daß $c_1 = c_2 = c_3$ und $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$ sei. Man hat zuerst den Winkel $(\widehat{111\;110})$ zu berechnen:

$$\sin(\widehat{111\;110}) = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin 60} = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\alpha}{2}$$

und deshalb die Kohäsion auf (111):

$$c' = 3c_1 \cos(\widehat{111\;110}),$$

woraus folgt, daß c' sehr groß ausfallen wird im Verhältnis zu c_1, wenn der Winkel $(111 \widehat{\;} 110)$ klein ist, und die Basis zur Entwickelung gelangen wird, nur für recht großes α.

Umgekehrt wird die Zone [111] zur Ausbildung kommen, wenn der Winkel α möglichst klein ist. Man hat nämlich für die Kohäsion auf die Flächen $\{1\bar{1}0\}$ unter den gemachten Voraussetzungen:

$$c_{12} = 2\, c_1 \sin \frac{\alpha}{2},$$

und z. B. für

$$\alpha = 60^\circ \quad c_{12} = c_1,$$
$$\alpha = 30^\circ \quad c_{12} = 0{,}517\, c_1.$$

Um die noch vorkommenden Kristallformen zu bilden, müssen die Harmonieelemente bekannt sein.

Die Achse der Zone [111] ist eine triharmonische. Durch dieselbe gehen drei Harmonieebenen, welche zu den monoharmonischen Flächen $(\bar{1}10)$, $(10\bar{1})$, $(0\bar{1}1)$ parallel gehen. In diesen Harmonieebenen liegen noch die drei Monoharmonieachsen $[11\bar{2}]$, $1\bar{2}1]$, $[\bar{2}11]$.

Die dreigliederigen Grundgestalten werden daher durch folgende 8 Harmonieelemente ausgezeichnet:

1 Triharmonieachse [111],
3 Harmonieebenen $(\bar{1}10)$, $(10\bar{1})$, $(0\bar{1}1)$,
3 Monoharmonieachsen $[11\bar{2}]$, $[1\bar{2}1]$, $[\bar{2}11]$,
1 Harmoniezentrum.

Um irgend welche Kristallform der II. und III. Ableitung zu bilden, brauchen wir nur von irgend welcher Fläche $(h_1\, h_2\, h_3)$ auszugehen und die Harmonieelemente zu berücksichtigen.

Ist z. B. das Flächenpaar (123) gegeben, so hängen damit folgende Flächenpaare zusammen:

(123), (231), (312),

da die Achse [111] triharmonisch ist. Durch diese Zone gehen aber auch 3 Harmonieebenen; also hängen mit den vorhergehenden Flächenpaaren noch folgende 3 Paare zusammen:

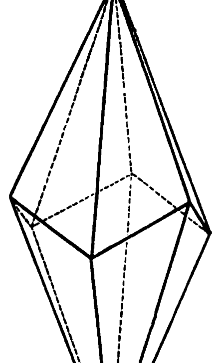
(213), (132), (321).

Das aus (123) entstehende harmonische Gebilde besteht somit aus folgenden 6 Flächenpaaren:

(123), (231), (312),
(213), (132), (321).

Die aus diesen 12 Flächen zusammengesetzte Kristallform heißt ein Skalenoeder und wird kurzweg mit {123} bezeichnet. Eine solche allgemeine Form ist in Fig. 158 abgebildet.

Fig. 158.



Aus dieser allgemeinen Form gehen verschiedene Formen hervor, wenn die Indizes spezielle Werte bekommen.

Alle in der Zone [111] liegende Flächen bekommen die Indizes, deren Summe Null ist, wie aus § 33, S. 64, zu ersehen ist:

$$h_1 + h_2 + h_3 = 0.$$

Die durch das Symbol $\{h_1 h_2 h_3\}$ dargestellte Form ist ein in der Zone [111] liegendes dihexagonales Prisma, Fig. 159, wenn es der obigen Bedingung genügt.

Die Indizes eines Skalenoeders werden der Bedingung

$$h_1 + h_2 + h_3 \gtrless 0$$

genügen müssen.

Sind zwei der drei Indizes h_1, h_2, h_3 vom gleichen Zeichen unter sich gleich, so verwandelt sich das Skalenoeder in ein Rhomboeder.

Das Rhomboeder ist ein stumpfes, wenn die drei Indizes h_1, h_2, h_2 positiv sind. Haben dagegen die Indizes verschiedenes Zeichen, so entsprechen sie einem spitzeren Rhomboeder $\bar{h}_1$, h_2, h_2, oder h_1, $\bar{h}_2$, $\bar{h}_2$. Und zwar ist die durch das Symbol $\{h_1 h_2 h_2\}$ dargestellte Form ein stumpfes Rhomboeder der 1. Art, wenn $h_1 < h_2$, der 2. Art, wenn $h_1 > h_2$ ist. Ferner wird die durch das Symbol $\{\bar{h}_1 h_2 h_2\}$ dargestellte Form ein spitzes Rhomboeder der 1. Art sein, wenn $h_1 + 2h_2 > 0$, der 2. Art, wenn $h_1 + 2h_2 < 0$ ist.

Fig. 159.

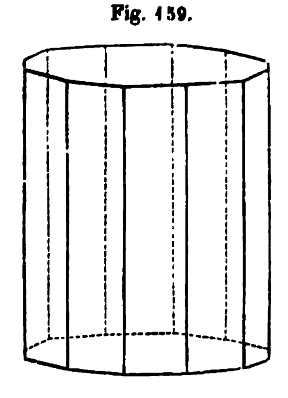


Fig. 160.

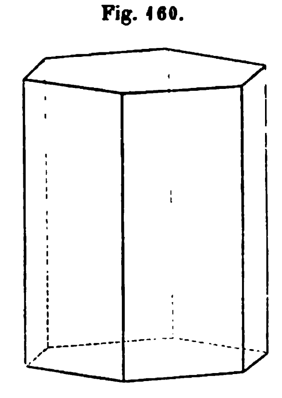
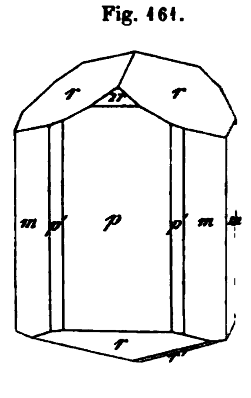


Fig. 161.



Das Rhomboeder $\{\bar{3}22\}$ ist ein spitzes der 1. Art und wird von den Flächen

$$(\bar{3}22),\ (2\bar{3}2),\ (22\bar{3}),\ (3\bar{2}\bar{2}),\ (\bar{2}3\bar{2}),\ (\bar{2}\bar{2}3)$$

umschlossen. Seine drei Zonen sind folgende:

$$[221],\ [212],\ [122].$$

Die Kristallformen der II. und III. Ableitung sind also folgende:

Hexagonales Prisma der 2. Art $\{\bar{2}11\}$,
Dihexagonale Prismen $\{h_1 h_2 h_3\}$, $h_1 + h_2 + h_3 = 0$.

Stumpfe Rhomboeder der 1. Art $\{h_1 h_2 h_2\}$, $h_1 < h_2$.
» » » 2. » $\{h_1 h_2 h_2\}$, $h_1 > h_2$.
Spitze Rhomboeder » 1. » $\{\bar{h}_1 h_2 h_2\}$, $h_1 + 2h_2 > 0$.
» » » 2. » $\{\bar{h}_1 h_2 h_2\}$, $h_1 + 2h_2 < 0$.

Skalenoeder $\{h_1 h_2 h_3\}$ oder $\{\bar{h}_1 h_2 h_3\}$ $\Big\}\ h_1 + h_2 + h_3 \gtreqless 0$.

Das hexagonale Prisma der 2. Art $\{\bar{2}11\}$ ist in Fig. 160 dargestellt.

Beispiel zu den prismatischen Grundgestalten.

Turmalin, Fig. 161, wo $r\,\{110\}$, $2r\,\{411\}$, $p\,\{\bar{2}11\}$, $m\,\{\bar{3}12\}$, $p'\,\{\bar{5}23\}$, $r'\,\{211\}$ bedeuten. Spaltbarkeit sehr unvollkommen.

Hornblende $(MgFe)Ca[SiO^3]^2$ und $MgAl^2[SiO^3]^4$, Fig. 162. Hier bedeuten c, o, $o\,\{110\}$, p, p, $h\,\{\bar{1}10\}$. Vollkommen spaltbar nach p und p, welche einen Winkel einschließen, der nahe 60° (56°) ist. Die Spaltbarkeit nach h ist selten vorhanden und immer unvollkommen.

Fig. 162.

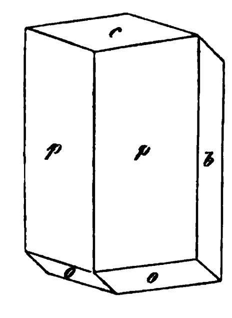
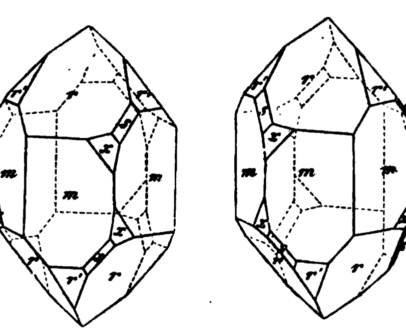
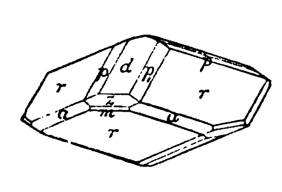


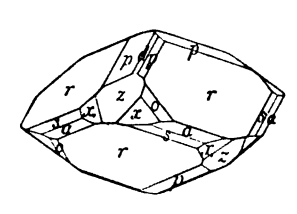
Fig. 163.

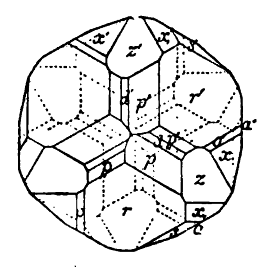


Quarz SiO^2. Bei den Kristallen kommen nicht selten Flächen vor, welche mit der Harmonie der dreigliedrigen Grundgestalten nicht passen, da nur ein Teil der Flächen zur Ausbildung gelangt. Wir werden sie im V. Kapitel (Kristalltrachten) kennen lernen. In Fig. 163 bedeuten $r\,\{110\}$, $r'\,\{411\}$, $m\,\{\bar{2}11\}$, $s\,\{34\bar{1}\}$, $x\,\{56\bar{2}\}$. Die Spaltbarkeit beim Quarz ist selten beobachtet worden, und scheint nach $r\,\{110\}$ zu gehen. Die Basis $\{111\}$ kommt nie vor. Der Quarz bildet wohl das Übergangsglied zwischen den drei- und viergliedrigen und den dreigliedrigen Grundgestalten.

Fig. 164.







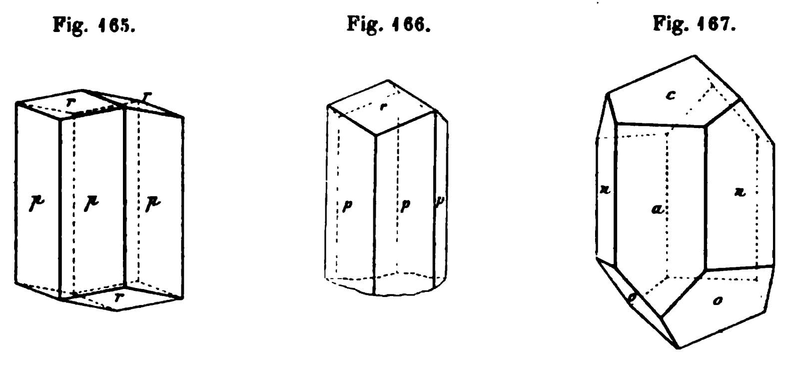
Phenakit, Be^2SiO^4. In der Fig. 164, nach S. L. Penfield, sind angegeben:

r {100}, *d* {110}, *pp*₁ {210}, *x* {$\bar{2}$11}, *z* {122}, *nn* {$\bar{1}$10}. Die Spaltbarkeit geht nach {100} und {$\bar{1}$10}.

Bromoantipyrin, Fig. 165, nach E. Winkler, wo *r*{110}, *p*{$\bar{1}$10} bedeuten.

Acetamid, $C^2H^3O.NH^2$, Fig. 166, nach C. Bodewig. Darin bedeuten *r* {110}, *p* {$\bar{1}$10}. Keine Spaltbarkeit ist vorhanden.

Fig. 165. Fig. 166. Fig. 167.



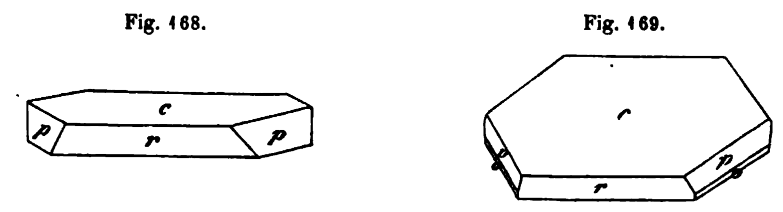
Die Karbonate wie Kalzit, Magnesit, Siderit, Dolomit usw. $\overset{II}{R}CO_3$ ($\overset{II}{R}$ = *Ca*, *Mg*, *Fe*, *Zn*, . . .) gehören hierher. Sie bilden aber auch den Übergang von den drei- und viergliedrigen zu den dreigliedrigen Grundgestalten. Siehe § 45, S. 106.

Phenylatikonsäure in Fig. 167, nach A. Brooke, dargestellt. Es bedeutet: *c*, *o*, *o* {110} und *a*, *n* {11$\bar{2}$}. Keine Spaltbarkeit ist nachgewiesen.

Beispiele zu den tafelartigen Grundgestalten.

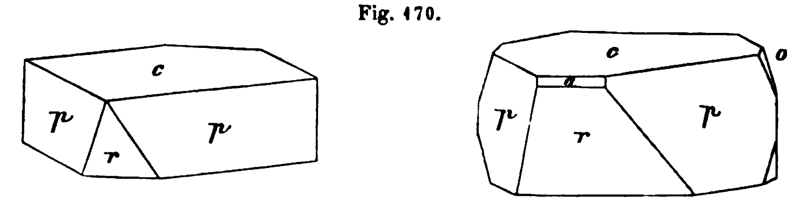
Chinon, $C^6H^4O^2$, Fig. 168, nach C. Hintze, wo mit *c* {111} und mit *p* und *r* {110} dargestellt sind.

Fig. 168. Fig. 169.



Anthracen, $C^{14}H^{10}$, Fig. 169, nach P. v. Groth, wo *c* {111}, *p* und *r* {110} bedeuten. Die Spaltbarkeit nach *c* {111} ist vollkommen.

Fig. 170.



Schwefelsaures Zinndimethyl $Sn(CO^3)^2SO^4$, Fig. 170, nach Th. Hiortdahl. Darin sind *c* {111}, *r*, *p* {110}.

Fluoranthren, $C^{15}H^{10}$, Fig. 171, nach P. v. Groth, wo c {111} und r, m {100} bedeuten. Nach c {111} vollkommen spaltbar.

Fig. 171.

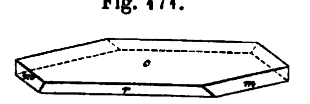
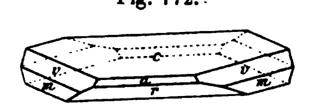


Fig. 172.



Diäthylpiperazin-Platinchlorid, Fig. 172, nach A. Fock. Es bedeuten r {100}, e {111}, a, c und m {$\bar{2}$11}, v {$\bar{1}$11}.

IV. Sechsgliedrige Grundgestalten.

§ 53. Allgemeine Eigenschaften.

Die sechsgliedrigen Grundgestalten zeichnen sich aus durch 4 Hauptflächenpaare, von denen 3 ein sechsseitiges Prisma und das 4. die Basis bilden. Bezeichnet man die Kohäsionsminima, welche zu den Flächen des Prisma senkrecht stehen, mit c_1, c_2, c_3 und das zur Basis senkrecht stehende Kohäsionsmaximum mit c_4, so erhält man als Bedingung für die Erkennung dieser Grundgestalten:

$$c_1 : c_2 : c_3 \equiv 1 : 1 : 1,$$

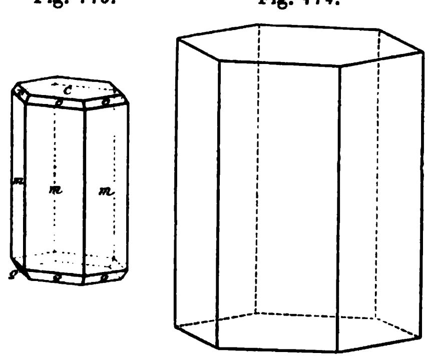
$$\frac{c_3}{c_4} \gtreqless 1,$$

$$\alpha_1 \equiv \alpha_2 \equiv \alpha_3 \equiv 60^\circ; \ \alpha_4 \gtreqless 90^\circ,$$

wobei unter α_1, α_2, α_3 die Winkel zu verstehen sind, welche c_1, c_2, c_3 miteinander einschließen, und unter α_4 den Winkel, den c_4 mit irgend welcher der 3 Richtungen c_1, c_2, c_3 einschließt.

Eine hexagonale Grundgestalt ist z. B. in Fig. 173 dargestellt, wo c die Basis und m, m, m das sechsseitige Prisma bedeuten. Einfacher ist die in Fig. 174 abgebildete Gestalt.

Fig. 173. Fig. 174.



Wo immer Flächen der I., II. und III. Ableitung zur Ausbildung gelangen, ordnen sie sich stets hexaharmonisch um das sechsseitige Prisma an. Also wiederholt sich irgend welche Fläche harmonisch 6 oder 2 × 6 mal um das sechsseitige Prisma, sodaß die 6 Flächen des Hauptprismas Harmonieebenen sind. Das Prisma selbst ist eine hexaharmonische Zone, die Basis eine Harmonieebene. Außerdem bedeuten die 6 Zonen, welche durch die Basis und durch die 6 Flächen des Hauptprismas bestimmt sind, monoharmonische Zonen.

Die hexagonalen Grundgestalten sind infolgedessen folgendermaßen zu charakterisieren:

1 Hexaharmonieachse (Prisma),
3 + 3 Monoharmonieachsen

und dementsprechend:

1 hexaharmonischer Zonenbüschel (Basis),
4 + 3 monoharmonische Zonenbüschel.

Das will heißen, daß die Anzahl der Harmonieelemente der hexagonalen Grundgestalten 15 beträgt, nämlich

1 Harmoniezentrum,
1 + 3 + 3 Harmonieachsen,
1 + 3 + 3 Harmonieebenen.

§ 54. Bezeichnung bei den sechsgliedrigen Grundgestalten.

Drei Hauptrichtungen bei diesen Grundgestalten zu verwenden, wie bei den übrigen Grundgestalten, ist nicht angezeigt, denn jede Fläche wiederholt sich harmonisch und gleichmäßig entweder 6mal oder 2 × 6mal um die hexaharmonische Zone. Diese harmonische Wiederholung muß durch drei Richtungen angezeigt werden; eine vierte Richtung muß die Lage dieser Fläche in bezug auf die Hexaharmonieachse selbst angeben.

Vier Indizes scheinen also hier notwendig zu sein. Am besten ist es, daß diese 4 Indizes auf die 4 Richtungen c_1, c_2, c_3, c_4 direkt bezogen werden. Auch müssen die 3 Richtungen c_1, c_2, c_3 gleiche Bezeichnung erhalten, da sie gleiche Bedeutung in der Grundgestalt haben.

Eine passende Lösung der Aufgabe wird man erlangen, wenn c_1, c_2, c_3 mit resp. den Symbolen (1000), (0100) und (0010) bezeichnet werden. Dann erhält die Richtung c_4 die Bezeichnung (0001). In der Fig. 175 sind die drei in der Zeichnungsebene liegenden Richtungen c_1, c_2, c_3 vom Punkt O aus gezogen; aus dieser Figur ist zu ersehen nach welchem Sinn das positive Zeichen zu nehmen ist.

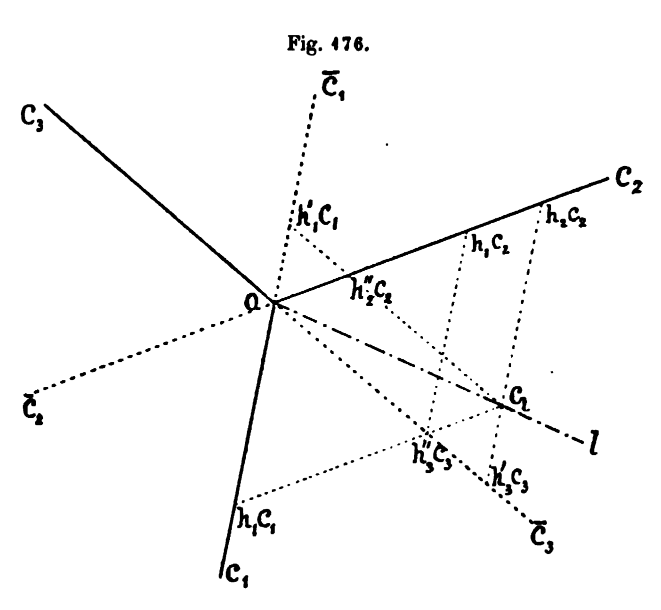
Fig. 175.

Es ist selbstverständlich, daß jede der 3 Richtungen c_1, c_2, c_3 aus den zwei andern durch Ableitung erhalten werden kann. Also ist $(00\bar{1}0)$ die Resultante von (0100) und (1000), und hat somit die Bedeutung von (1100); $(\bar{1}000)$ ist die Resultante von (0100) und (0010), und sollte (1010) bedeuten usw. Wir wollen aber von der Abhängigkeit der 3 Richtungen für die Bezeichnung ganz absehen.

Jede Richtung der Größe und dem Sinne nach entsteht dadurch, daß das Vielfache von drei nicht in einer Ebene liegenden Richtungen ihrem Werte nach zusammengesetzt wird, nach der Methode der Zusammensetzung der Kräfte.

Es sei irgend welche Richtung als Ort einer Fläche gegeben, deren schiefe Projektion auf der Ebene $c_1 c_2 c_3$, l sein soll, vgl. Fig. 176. Das Kohäsionsminimum auf dieser Richtung mag c und seine schiefe Projektion auf der Ebene $c_1 c_2 c_3$ mit c_l bezeichnet sein. Das Kohäsionsminimum c_l kann als Resultante von $h_1 c_1$ und $h_2 c_2$ oder von $h_1' c$ und $h_3' c_3$ oder endlich von $h_2'' c_2$ und $h_3'' c_3$ aufgefaßt werden. Und wenn wir die schiefe Projektion des gegebenen Kohäsionsminimums auf c_4 mit $h_4 c_4$ bezeichnen, so wird das Symbol der gegebenen Richtung entweder $(h_1 h_2 \cdot h_4)$ oder $(h_1' \cdot h_3' h_4)$ oder auch $(\cdot h_2'' h_3'' h_4)$ zu schreiben sein, wobei der dazwischen liegende Punkt bedeutet, daß die betreffende Hauptrichtung c_3, c_2 oder bezw. c_1 nicht in betracht kommt, d. h. daß die Richtung entweder nur auf c_1, c_2, c_4 oder nur auf c_1, c_3, c_4 oder nur auf c_2, c_3, c_4 bezogen wird. Anstatt einen Punkt wollen wir das o schreiben, dabei aber festhalten, daß dieses o keine andere Bedeutung hat als, daß die Hauptrichtung, worauf das o sich bezieht, nicht in betracht kommt. Also wird das allgemeine Symbol irgend welcher Richtung oder irgend welcher Fläche in der hexagonalen Grundgestalt sein:

Fig. 176.



$$(h_1 h_2 o h_4) \text{ oder } (h_1' o h_3' h_4) \text{ oder } (o h_2'' h_3'' h_4).$$

Es ist einleuchtend, daß zwischen den Indizes $h_1 h_2 h_1' h_2' h_3' h_3'' h_4$ eine einfache Beziehung bestehen muß. Wir wollen sie suchen.

Ziehen wir, siehe Fig. 176, vom Punkte c_l aus die Parallelen zu c_1, c_2, c_3, so erhalten wir aus der Figur

$$h_1 c_2 + h_2'' c_2 = h_2 c_2,$$

folglich
$$h_2 = h_1 + h_2'',$$

ferner
$$h_3' = h_2$$
$$h_3'' = h_1$$
$$h_3' = h_3'' + h_2''$$
$$h_2'' = h_1'.$$

Daraus läßt sich eine sehr einfache Regel ableiten. Schreiben wir im ersten Symbol h_3 anstatt o, im zweiten h_2' anstatt o und im dritten h_1'' anstatt o, wobei $h_1'' = h_2' = h_3 = o$ ist, so folgt:

$$\begin{array}{l|l|l} h_1' = h_1 - h_2 & h_1'' = h_1' - h_1' & h_1 = h_1'' - h_3'' \\ h_2' = h_2 - h_2 & h_2'' = h_2' - h_1' & h_2 = h_2'' - h_3'' \\ h_3' = h_3 - h_2 & h_3'' = h_3' - h_1' & h_3 = h_3'' - h_3''. \end{array}$$

Die Indizes eines Symbols werden aus denen des anderen erhalten, indem die Indizes des letzteren um eine Konstante verringert werden, nämlich um denjenigen Index, dessen Stelle im ersten Symbol Null entspricht. Der vierte Index bleibt unverändert. Ist z. B. das Symbol (2504) gegeben, so erhält man aus demselben

$$(2 - 5,\ 5 - 5,\ 0 - 5,\ 4) = (\bar{3}0\bar{5}4),$$

ferner

$$(\bar{3} - \bar{3},\ 0 - \bar{3},\ \bar{5} - \bar{3},\ 4) = (03\bar{2}4)$$

und wieder

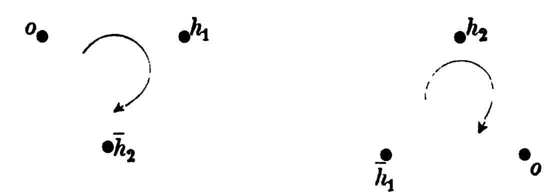
$$(0 - \bar{2},\ 3 - \bar{2},\ \bar{2} - \bar{2},\ 4) = (2504).$$

Die Fläche (2504) kann also auch durch die Symbole ($\bar{3}0\bar{5}4$) oder ($03\bar{2}4$) dargestellt werden. Im ersten Fall ist die Fläche auf die drei Flächen (1000), (0100), (0001), im zweiten auf (1000), 0010), (0001), im dritten auf (0100), (0010), (0001) bezogen.

Ist eine Fläche gegeben, z. B. $(h_1\bar{h}_2 o h_4)$, und will man alle 6 Flächen ableiten, welche in bezug auf die hexaharmonische Achse harmonisch gelegen sind, so werden wir die Indizes h_1 und $\bar{h}_2$ folgenderweise ändern:

$$\begin{array}{ll} (h_1\bar{h}_2 o h_4) & (\bar{h}_1 h_2 o h_4) \\ (\bar{h}_2 o h_1 h_4) & (h_2 o \bar{h}_1 h_4) \\ (o h_1 \bar{h}_2 h_4) & (o \bar{h}_1 h_2 h_4), \end{array}$$

also zyklisch wie das folgende Schema angibt:



Durch eine hexaharmonische Achse gehen 6 Harmonieebenen; will man auch diejenigen Flächen berücksichtigen, welche in bezug auf diese Harmonieebenen mit der gegebenen Fläche $(h_1\bar{h}_2 o h_4)$ harmonisch liegen, so werden wir noch folgende 6 Flächen erhalten:

$$\begin{array}{ll} (h_1 o \bar{h}_2 h_4), & (h_2 \bar{h}_1 o h_4), \\ (o \bar{h}_2 h_1 h_4), & (\bar{h}_1 o h_2 h_4), \\ (\bar{h}_2 h_1 o h_4), & (o h_2 \bar{h}_1 h_4); \end{array}$$

sie gehen aus demselben Schema zyklisch hervor, wenn wir nur im umgekehrten Sinne die zyklische Drehung nehmen.

Handelt es sich um eine Kristallform der sechsgliedrigen Grundgestalt, so entspricht jede Fläche ihrer gegenüberliegenden parallelen und harmonisch in bezug auf das Harmoniezentrum gelegenen Fläche. Mit der gegebenen Fläche $(h_1 \bar{h}_2 o h_4)$ hängen also noch folgende 12 Flächen zusammen:

$$
\begin{array}{ll}
(\bar{h}_1 h_2 o \bar{h}_4), & (\bar{h}_1 o h_2 \bar{h}_4) \\
(h_2 o \bar{h}_1 \bar{h}_4), & (o h_2 \bar{h}_1 \bar{h}_4) \\
(o \bar{h}_1 h_2 \bar{h}_4), & (h_2 \bar{h}_1 o \bar{h}_4) \\
(h_1 \bar{h}_2 o \bar{h}_4), & (\bar{h}_2 h_1 o \bar{h}_4) \\
(\bar{h}_2 o h_1 \bar{h}_4), & (h_1 o \bar{h}_2 \bar{h}_4) \\
(o h_1 \bar{h}_2 h_4), & (o \bar{h}_2 h_1 h_4).
\end{array}
$$

Die genannten 24 Flächen oder 12 Flächenpaare umschließen die allgemeine Kristallform der sechsgliedrigen Grundgestalt, welche **dihexagonale Bipyramide** heißt, und durch das Symbol $\{\bar{h}_1 h_2 o h_4\}$ bezeichnet wird. Die Fig. 184 stellt eine solche Form dar.

Es ist bemerkenswert, daß bei dieser Bezeichnung nur drei Indizes im Vordergrund erscheinen. Ein Index ist immer Null. Eine allgemeine Kristallform, also eine dihexagonale Bipyramide, wird das Symbol $\{h_1 h_2 o h_4\}$ bekommen, worin alle 12 Flächenpaare inbegriffen sind. Ist $h_2 = o$, sie heißt die Fläche $(h_1 o o h_4)$. Die Normale dieser Fläche liegt also in der Ebene $c_1 c_4$. Lassen wir h_1 alle Stellen durchwandern und wechseln dabei jedesmal das Zeichen, so bekommen wir die 6 möglichen Flächenpaare:

$$
\begin{array}{lll}
(h_1 o o h_4) & (o \bar{h}_1 o h_4) & (o o h_1 h_4) \\
(\bar{h}_1 o o h_4) & (o h_1 o h_4) & (o o \bar{h}_1 h_4),
\end{array}
$$

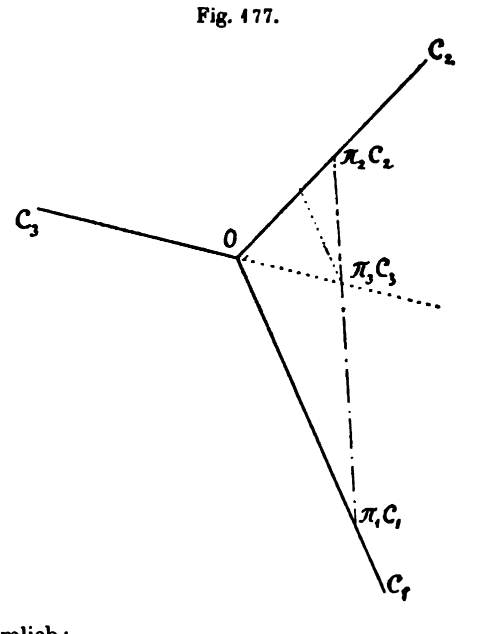
welche eine sechsseitige Bipyramide umschließen.

Wie schon oben bemerkt, bedeutet das o also stets, daß die betreffende Hauptrichtung nicht in Betracht kommt, sei es, daß 3 oder 2 oder 1 Indizes Null ist.

Eine ähnliche Bezeichnung können wir auch für eine Zone erhalten.

Eine Zone wird entweder durch ihre Zonenachse oder durch ihre Zonenebene festgestellt. Eine Zonenebene, siehe Fig. 177, schneidet die 2 Hauptrichtungen c_1, c_2, c_3 auf die vom Anfangspunkt zu messenden Stellen $\pi_1 c_1$, $\pi_2 c_2$, $\pi_3 c_3$. Wir brauchen nur 2 derselben in betracht zu ziehen, z. B. $\pi_1 c_1$ und $\pi_2 c_2$, oder $\pi_2 c_2$ und $\pi_3 c_3$, oder $\pi_3 c_3$ und $\pi_1 c_1$, da sie durch eine lineare Beziehung verbunden sind, nämlich:

Fig. 177.



$$\pi_1 c_1 : \overline{\pi_3} c_1 = \pi_2 c_2 : \pi_2 c_2 - \pi_3 c_2,$$

also

$$\pi_1 : \overline{\pi_3} = \pi_2 : \pi_2 - \pi_3$$

oder

$$\pi_1 \pi_2 + \pi_1 \overline{\pi_3} = \pi_2 \overline{\pi_3},$$

oder auch

$$\frac{1}{\pi_1} + \frac{1}{\pi_2} + \frac{1}{\pi_3} = 0,$$

wenn man von dem Zeichen absieht.

Nun wissen wir, daß die Indizes einer Zone r_1, r_2, r_3 sich umgekehrt verhalten wie die Zahlen π_1, π_2, π_3. Wir erhalten also die einfache Bezeichnung

$$r_1 + r_2 + r_3 = 0.$$

Das Symbol einer Zone kann daher die Form bekommen:

$$[r_1 r_2 \cdot r_4] \text{ oder } [r_1 \cdot r_3 r_4] \text{ oder } [\cdot r_2 r_3 r_4].$$

Der dazwischen liegende Punkt kann wieder, wie oben, bequemer durch eine Null ersetzt werden. Das Symbol einer Zone bekommt dann die einfache Form

$$[r_1 r_2 0 r_4] \text{ oder } [r_1 0 r_3 r_4] \text{ usw.},$$

worin hier Null auch die Bedeutung hat, daß die betreffende Hauptrichtung nicht in betracht kommt.

Sollte einer der zwei Indizes r_1, r_2 oder r_1, r_3 oder r_2, r_3 Null werden, so wird man den dritten Index von r_1, r_2, r_3 hinzusetzen müssen. Ist nämlich ein Index Null, so bedeutet dies, daß die Zonenebene zur betreffenden Hauptrichtung parallel geht, oder daß die Zone zu dieser Richtung senkrecht steht. Ergeben sich aber zwei Indizes gleich Null, so bleibt es unbestimmt, zu welcher der zwei Hauptrichtungen die Zonenebene parallel ist.

Ist z. B. $r_2 = 0$, so wird $r_3 = - r_1$ und als das Symbol der betreffenden Zone $[r_1 0 \bar{r}_1 r_4]$ angesehen. Ist $r_1 = 0$, so wird $r_3 = - r_2$ und das Symbol der Zone muß $[0 r_2 \bar{r}_2 r_4]$ heißen.

§ 55. Beziehungen zwischen Z nen und Flächen.

Das Symbol einer Fläche oder einer Zone in der hexagonalen Grundgestalt stützt sich auf 4 Richtungen, deren 3 gleichartige Bedeutung haben. Dadurch erreicht man den Vorteil, daß alle gleichmäßigen und harmonisch gelegenen Flächen oder Zonen auch gleichartige Bezeichnung bekommen. Aber nur drei Index werden im Symbol berücksichtigt. Um dies zu erreichen wird 1 Index immer gleich Null notiert. Werden nun die 4 Indizes in der Weise auf 3 reduziert, daß der 4. Index nur als Null seine Stelle ausfüllt, so gelangen die Symbole mit den 3 übrigen Indizes für die Beziehungen zwischen Flächen und Zonen auch hier zur Geltung.

Will man z. B. die gemeinschaftliche Zone zweier Flächen, sagen wir (1201) und (2301), feststellen, so wird, wie folgt verfahren: Man setzt zweimal die 3 gültigen Indizes der einen Fläche unter Weglassung der Null nebeneinander,

darunter in gleicher Weise die 3 Indizes der zweiten Fläche, läßt die 1. und 6. Reihe weg, multipliziert kreuzweise, und subtrahiert; also:

$$\begin{array}{c|cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ & & \times & \times & \times & \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \end{array}$$

$$\begin{aligned} r_1 &= 2 \times 1 - 1 \times 3 = \bar{1} \\ r_2 &= 1 \times 2 - 1 \times 1 = 1 \\ r_4 &= 1 \times 3 - 2 \times 2 = \bar{1}. \end{aligned}$$

Die gemeinschaftliche Zone der zwei gegebenen Flächen wird daher, unter Beisetzung der Null in dritter Stelle sein:

$$[\bar{1}10\bar{1}].$$

Ebenso wird verfahren, wenn man die gemeinschaftliche Fläche zweier gegebenen Zonen, z. B. $[\bar{1}102]$ und $[3201]$ kennen will; also:

$$\begin{array}{ccccc|c} \bar{1} & 1 & 2 & \bar{1} & 1 & 2 \\ & & \times & \times & \times & \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \end{array}$$

$$\begin{aligned} h_1 &= 1 \times 1 - 2 \times 2 = \bar{3} \\ h_2 &= 2 \times 3 - \bar{1} \times 1 = 7 \\ h_4 &= \bar{1} \times 2 - 1 \times 3 = \bar{5}. \end{aligned}$$

Die gemeinschaftliche Fläche der 2 gegebenen Zonen ist daher

$$(\bar{3}70\bar{5}).$$

Werden dagegen zwei gegebene Flächen oder desgleichen zwei Zonen nicht auf dieselben Hauptrichtungen bezogen, so ist vorerst die notwendige Reduktion vorzunehmen. Zum Beispiel wenn die zwei Flächen $(01\bar{1}1)$ und (2301) gegeben sind, so würden sich von den beiden Flächen erstere auf die Hauptrichtung c_2, c_3, c_4, die zweite auf c_1, c_2, c_4 beziehen. Das Symbol der ersten Fläche $(01\bar{1}1)$ ist offenbar dem Symbol (1201), sowie das der zweiten (2301) dem Symbol $(0 \cdot 3 - 2 \cdot \bar{2}1) = (01\bar{2}1)$ äquivalent.

Wir erhalten also:

$$\begin{array}{c|ccccc} 1 & \bar{1} & 1 & 1 & \bar{1} & 1 \\ & & \times & \times & \times & \\ 1 & \bar{2} & 1 & 1 & \bar{2} & 1 \end{array}$$

$$\begin{aligned} r_2 &= \bar{1} \times 1 - 1 \times \bar{2} = 1 \\ r_3 &= 1 \times 1 - 1 \times 1 = 0 \\ r_4 &= 1 \times \bar{2} - 1 \times \bar{1} = \bar{1}. \end{aligned}$$

Da r_3 Null geworden ist, so muß der Index r_1 im Symbol geschrieben werden. In diesem Fall ist $r_1 + r_2 = 0$, also $r_1 = - r_2 = \bar{1}$. Die gesuchte Zone bekommt daher das Symbol $[\bar{1}10\bar{1}]$, wie vorher.

Dasselbe würde man erhalten, ginge man von den 2 Symbolen (1201) und (2301) aus; also:

$$\begin{array}{c|cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ & & \times & \times & \times & \\ 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \end{array}$$

$$r_1 = 2 \times 1 - 1 \times 3 = \bar{1}$$
$$r_2 = 1 \times 2 - 1 \times 1 = 1$$
$$r_4 = 1 \times 3 - 2 \times 2 = \bar{1};$$

und die gemeinschaftliche Zone ist wie vorher $[\bar{1}10\bar{1}]$.

Hat man ferner die 2 Zonen $[\bar{1}102]$ und $[30\bar{5}1]$, von denen die erste auf die Hauptrichtungen c_1, c_2, c_4 und die zweite auf c_1, c_3, c_4 bezogen ist, so müssen die 2 Symbole auf dieselben Hauptrichtungen reduziert werden. Das Symbol $[30\bar{5}1]$ ist dem Symbol $[3201]$ äquivalent; es ist nämlich

$$r_2 = -(r_1 + r_3) = -(\bar{5} + 3) = 2.$$

Man wird also die gemeinschaftliche Fläche entweder aus $[\bar{1}102]$ und $[3201]$ oder aus $[\bar{1}002]$ und $[30\bar{5}1]$ bestimmen. Beide Rechnungen führen zu demselben Resultat wie vorher. Also

$$\begin{array}{c|cccc|c} \bar{1} & 0 & 2 & \bar{1} & 0 & 2 \\ & & \times & \times & \times & \\ 3 & \bar{5} & 1 & 3 & \bar{5} & 1 \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{c|cccc|c} \bar{1} & 1 & 2 & \bar{1} & 1 & 2 \\ & & \times & \times & \times & \\ 3 & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll|ll} h_1 = 0 \times 1 - 2 \times \bar{5} = 10 & & h_1 = 1 \times 1 - 2 \times 2 = \bar{3} & \\ h_2 = 0 & & h_2 = 2 \times 3 - \bar{1} \times 1 = 7 & \\ h_3 = 2 \times 3 - \bar{1} \times 1 = 7 & & h_3 = 0 & \\ h_4 = \bar{1} \times \bar{5} - 0 \times 3 = 5 & & h_4 = \bar{1} \times 2 - 1 \times 3 = \bar{5}. & \end{array}$$

Die verlangte Fläche ist daher (10·075), oder reduziert (10 — 7, 0 — 7, 7 — 7 · 5) = $(3\bar{7}05)$, welche die parallele ist zu $(\bar{3}70\bar{5})$.

§ 56. Die Kristallformen bei den sechsgliedrigen Grundgestalten.

Die Hauptflächenpaare bei diesen Grundgestalten sind (1000), (0100), (0010), (0001). Sie bilden 2 Hauptformen, nämlich {1000} und {0001}. Die erste ist das hexagonale Prisma der ersten Art, die zweite die Basis. Die Fig. 178 gibt die Verbindung dieser zwei Formen wieder.

Durch die I. Ableitung entstehen aus diesen 4 Flächenpaaren folgende 6 Flächenpaare:

$$(1001),\ (0101),\ (0011),$$
$$(\bar{1}001),\ (0\bar{1}01),\ (00\bar{1}1),$$

welche wiederum eine Kristallform bilden. Sie heißt hexagonale Bipyramide der 1. Art und wird mit {1001} bezeichnet.

Sodann entstehen noch durch die I. Ableitung aus den 3 Flächenpaaren (1000), (0100), (0010) folgende 3 Flächenpaare:

$$(10\bar{1}0),\ (01\bar{1}0),\ (\bar{1}100),$$

welche das **hexagonale Prisma der 2. Art** darstellen. Diese Form erhält das Symbol $\{10\bar{1}0\}$.

Die Fig. 179 zeigt die Verbindung des Prisma der 1. Art mit der Bipyramide der 1. Art, und die Fig. 180 von verschiedener Art.

Fig. 178.

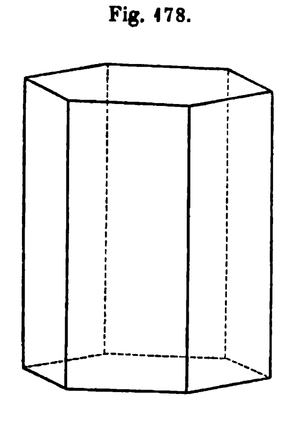


Fig. 179.

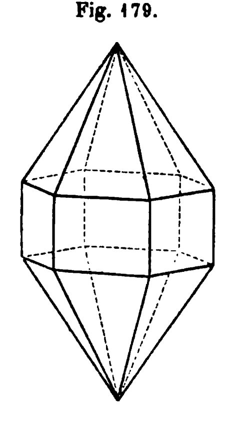
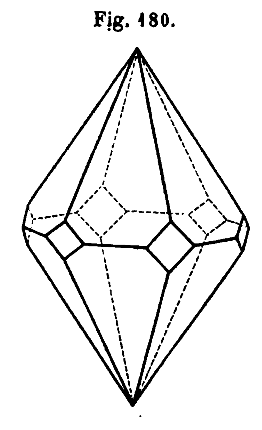


Fig. 180.



Unter Berücksichtigung der Flächenpaare (1001), $(00\bar{1}1)$, (0101) und der Flächenpaare $(00\bar{1}0)$, (0100), $(\bar{1}000)$ können wir noch einfach ableiten und erhalten daraus folgende 6 Flächenpaare:

$$(10\bar{1}1),\ (01\bar{1}1),\ (\bar{1}001),$$
$$(\bar{1}011),\ (0\bar{1}11),\ (1\bar{1}01),$$

welche ebenfalls zur I. Ableitung gehören. Sie bilden eine **hexagonale Bipyramide der 2. Art** und zwar die erste stumpfe Bipyramide, welche mit dem Symbol $\{10\bar{1}1\}$ bezeichnet wird.

Die hexagonalen Grundgestalten erscheinen daher in 5 Einheitsformen, nämlich:

Die Basis $\{0001\}$.
Das hexagonale Prisma der 1. Art $\{1000\}$.
Die hexagonale Bipyramide der 1. Art $\{1001\}$.
Das hexagonale Prisma der 2. Art $\{10\bar{1}0\}$.
Die hexagonale Bipyramide der 2. Art $\{10\bar{1}1\}$.

Betreffend der Kristallformen der II. Ableitung ist zu bemerken, daß sie Symbole besitzen, deren Indizes nicht höher als 2 gehen; so bilden z. B. die Flächenpaare

$$(10\bar{1}2),\ (01\bar{1}2),\ (\bar{1}102)$$
$$(\bar{1}012),\ (0\bar{1}12),\ (1\bar{1}02)$$

eine **hexagonale Bipyramide der 2. Art** und zwar die erste spitze Bipyramide mit dem Symbol $\{10\bar{1}2\}$ usw.

Die Kristallformen der höheren Ableitung sind also folgende:

Dihexagonale Prismen . . . . . $\{h_1 o \bar{h}_3 o\}$.
Hexagonale Bipyramiden der 1. Art . $\{h_1 o o h_3\}$.
Hexagonale Bipyramiden der 2. Art . $\{h_1 o \bar{h}_1 h_3\}$.
Dihexagonale Bipyramiden . . . . $\{h_1 o \bar{h}_2 h_3\}$.

Die Fig. 181 gibt das gleichzeitige Auftreten der Bipyramide der 1. Art $p_1'p_2'$ $\{1001\}$ mit der Bipyramide der 2. Art p $\{10\bar{1}2\}$.

In der Fig. 182 ist die Verbindung der Bipyramide erster Art $\{1001\}$ mit der Bipyramide 2. Art $\{10\bar{1}1\}$ dargestellt.

Entsprechend den Einheitsformen und den Formen der II. Ableitung usw. ordnen sich die Zonen ganz analog an. Die Zone, welche der Form $\{1000\}$ gemeinschaftlich ist, wird [0001] geschrieben werden müssen. Die den 2 Hauptflächen (0001) und (1000) gemeinschaftliche Zone wird das Symbol [1010] bekommen; usw.

Fig. 181.

Fig. 182.

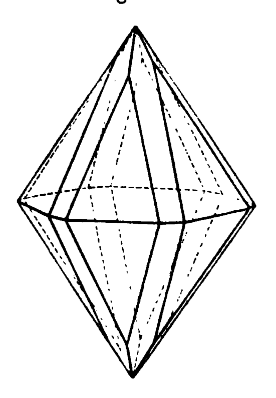
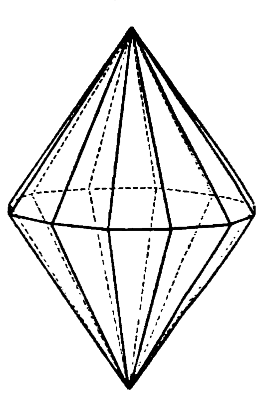


Fig. 183.



Entsprechend den Einheitsformen sind folgende Einheitszonen vorhanden:

Die hexaharmonische Zone [0001],

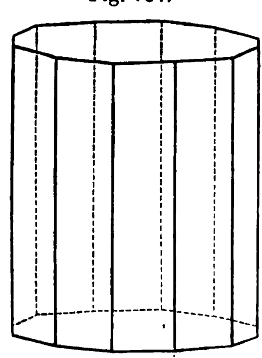
3 + 3 monoharmonische Zonen mit den analogen Bezeichnungen $[1010]$, $[10\bar{1}0]$,

3 + 3 monoharmonische Zonen mit den analogen Bezeichnungen $[1011]$, $[10\bar{1}1]$,

3 + 3 monoharmonische Zonen mit den analogen Bezeichnungen $[011\bar{1}]$, $[0111]$.

Also 19 Einheitszonen sowie 19 Einheitsflächenpaare.

Fig. 184.



Das folgende Beispiel zeigt, wie leicht es möglich ist, aus irgend welcher Fläche die Kristallform zu bestimmen, die mit derselben harmonisch zusammenhängt.

Es sei das Flächenpaar (2013) gegeben. Da die Zone [0001] hexaharmonisch ist, so hängen mit dem gegebenen Paar folgende 6 Flächenpaare zusammen:

(2013), (0123), (1203),
$(20\bar{1}3)$, $(0\bar{1}23)$, $(\bar{1}203)$.

Nun sind aber 3 + 3 Harmonieebenen vorhanden, § 53, die der Zone [0001] angehören; somit entspringen aus den letzten 6 Flächenpaaren noch folgende 6:

$$(1023),\ (0213),\ (2103),$$
$$(\bar{1}0\bar{2}3),\ (0\bar{2}\bar{1}3),\ (\bar{2}\bar{1}03).$$

Diese 12 Flächenpaare bilden eine Kristallform, welche einfach mit $\{2013\}$ oder $\{1203\}$ usw. bezeichnet wird. Sie ist eine dihexagonale Bipyramide und in Fig. 183 dargestellt.

Liegt der Ableitung die Fläche (1200) zu Grunde, so entsteht daraus ein dihexagonales Prisma mit folgenden 6 Flächenpaaren:

$$(1200),\ (2100),\ (0120),\ (0210),\ (1020),\ (2010).$$

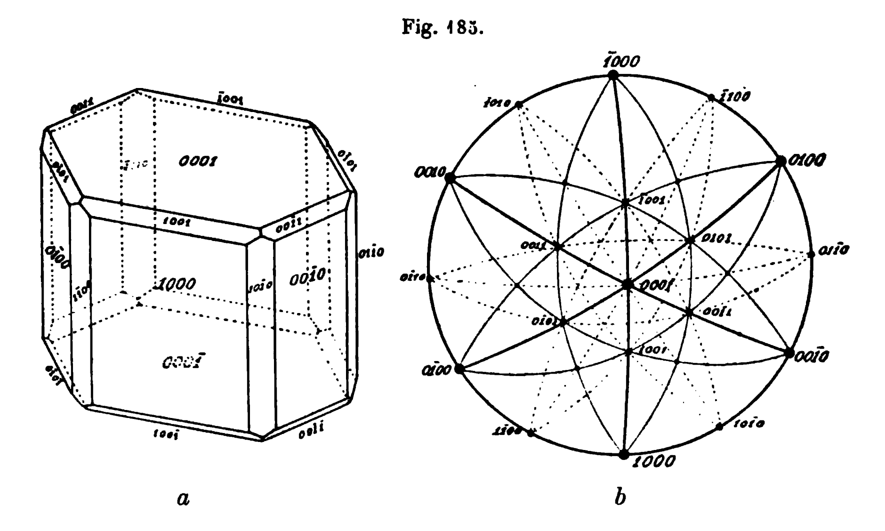
Die Fig. 184 gibt hiervon eine Abbildung wieder.

§ 57. Die Ausbildungen der sechsgliedrigen Grundgestalten. Prismatisch, pyramidal, tafelartig.

Von einer gleichmäßigen harmonischen Ausbildung nach drei im Raume gelegenen Richtungen bei diesen Grundgestalten kann selbstverständlich keine Rede sein, da hier nur eine Zone hexaharmonisch sein kann; alle übrigen Einheitszonen sind monoharmonisch. Es läßt sich daher bei den hexagonalen Grundgestalten nur eine prismatische und eine tafelartige Ausbildung denken. Da aber ein Übergang zwischen den beiden Ausbildungen möglich ist und vorkommen muß, so können wir auch eine pyramidale Ausbildung einschalten.

Die Fig. 185a in paralleler Perspektive und die Fig. 185b in stereographischer Projektion zeigen das allgemeine Aussehen einer prismatischen Ausbildung der hexagonalen Grundgestalten.

Fig. 185.



a *b*

Die hexaharmonische Zone $\{0001\}$ herrscht vor. Kommt eine Spaltbarkeit zum Vorschein, so werden gerne die Spaltungsflächen parallel der $\{1000\}$ sein; somit erscheinen die Spaltungsstücke als hexagonale Prismen.

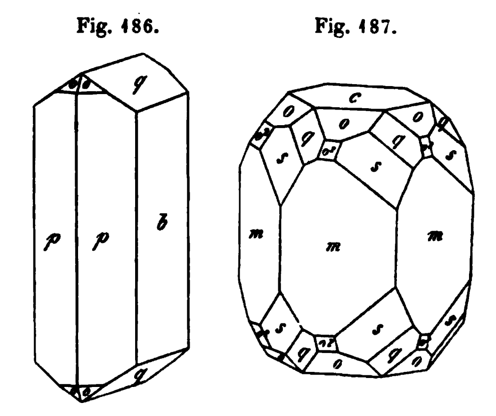


Fig. 186. Fig. 187.

Beispiele:

Aragonit ($CaCO^3$), Fig. 186. Es bedeuten hier p und p (1000) und (00$\bar{1}$0), b (0100), q (0101), o und o (1$\bar{1}$02) und (10$\bar{1}$2).

Apatit ($PO^4 \cdot ClCa^5$), Fig. 187. Hier sind m {1000}, c (0001), o {1001}, o^2 {2001}, s (20$\bar{1}$1), q {10$\bar{2}$1}.

Die Fig. 188a in paralleler Perspektive und die Fig. 188b in stereographischer Projektion geben die allgemeine Ansicht einer pyramidalen Ausbildung der hexagonalen Grundgestalten.

Die hexagonale Hauptbipyramide {1001} herrscht vor. Zeigt sich eine Spaltbarkeit, so sind die Spaltungsflächen meist parallel der Form {1001}. Da

Fig. 188.

a *b*

Fig. 189.

aber die Spaltungsflächen um so weniger vollkommen sein können, je zahlreicher sie erscheinen, so zeigen sich sehr selten Spaltungsstücke mit der Form der sechsseitigen Pyramide.

Beispiel: Cerussit ($PbCO^3$), Fig. 189. Es bedeuten p und p (1000), φ' (00$\bar{1}$0), b (0100), o und o (1001) und (00$\bar{1}$1), q' (0101). Die unvollkommene Spaltbarkeit ist durch die Spaltflächen (1000) und (00$\bar{1}$0) gegeben.

Die Fig. 190a endlich gibt in paralleler Perspektive und die Fig. 190b in stereographischer Projektion die tafelartige Ausbildung der hexagonalen Grundgestalten. Tritt Spaltbarkeit ein, so zeigt sich eine vollkommene Spaltungsfläche, welche

Fig. 190.

a b

(0001) parallel ist. Die Kristalle treten mit vorherrschender Basis (0001) auf, außerdem kommen die Zonen [0110], [1010], [1100] deutlich zum Vorschein, während alle übrigen Flächen zurücktreten.

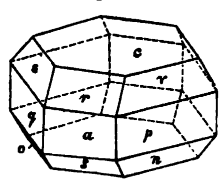


Fig. 191.

Beispiel: Borsäure [$B(OH)^3$], Fig. 191, dabei bedeuten c(0001), a(1000), p(00$\bar{1}$0), q(0$\bar{1}$00), r(1001), ε(0$\bar{1}$01), v(00$\bar{1}$1), o(0$\bar{1}$0$\bar{1}$), s(100$\bar{1}$), ν(00$\bar{1}\bar{1}$). Die Spaltbarkeit ist vollkommen nach (0001). Hierher gehören unter anderem: Glimmer, Chlorit usw.

§ 58. Geschichtliches. Literatur.

Über das Geschichtliche der Systematik wurde bereits in § 42 allgemein gesprochen. Hier bleibt uns noch übrig, näher auf die sechsgliedrigen Grundgestalten einzugehen.

In den primitiven Formen Haüys (1801) ist das reguläre sechsseitige Prisma vorhanden, auf das die Bezeichnung der durch Verringerung entstehenden Kristallflächen bezogen wird. Seitdem das von Haüy entdeckte Symmetriegesetz die Systematik der Kristalle beherrscht hatte, wurde auch für die sechsgliedrigen Kristalle als Grundform entweder eine reguläre sechsseitige Bipyramide, oder das reguläre sechsseitige Prisma gewählt. So verfahren:

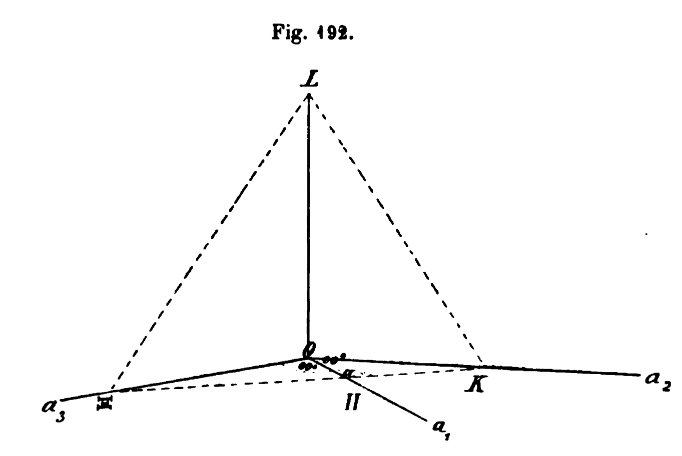
Chr. S. Weiß (1820), sechsgliedrige System;
J. H. Hausmann (1821), monotrimetrisches System;
Fr. Mohs (1822), dirhomboedrisches System;
Fr. C. Naumann (1826—1830), hexagonales System;
A. Breithaupt (1828), hexagonales System;
A. T. Kupffer (1830), dihexaedrisches System;
A. Lévy (1837), Système hexagonal;
W. H. Miller (1839), rhomboedral system;

G. Rose (1840), drei- und einachsiges System;
A. Bravais (1851), Système sénaire;
A. Schrauf (1861), orthohexagonales System;
P. Groth (1871), hexagonales System; usw.

Eine mehr auf die Harmonie der Grundgestalten bezügliche Systematik scheint schon bei Mallard sich gebildet zu haben. Die pseudohexagonalen Grundgestalten, wie Fedorow in letzter Zeit (1900—1903) gemeint hat, finden sich in diesem Buche unter der passenden Bezeichnung sechsgliedrige Grundgestalten.

Außer Haüy, Lévy und den Anhängern Lévys haben fast alle Kristallographen die Bezeichnung der Kristallflächen und Formen durch 4 Indizes erreicht; die 4 Indizes sind immer geschrieben worden, obwohl ein Index die Folge der anderen ist. Bei Weiß sind die 4 Achsen, worauf die Kristallflächen bezogen werden, folgendermaßen gewählt: 3 Achsen liegen in einer Ebene und sie schließen nacheinander nach ihrem positiven Sinn den Winkel 60° ein; man sehe die Achsen a_1, a_2, a_3 in der Fig. 192. Darauf senkrecht steht die vierte Achse c. Die Einheitsflächen (der Grundpyramide) schneiden die 4 Achsen in den Entfernungen vom Anfangspunkt O, welche wie

Fig. 192.



$$a : a : a : c$$

stehen. Irgend welche Kristallfläche schneidet auf den 4 Achsen die Abschnitte $O\Xi$, OH, OK, OL ab, welche sich verhalten wie

$$\frac{a}{x} : \frac{a}{h} : \frac{a}{k} : \frac{a}{l}.$$

Das Weißsche Symbol der allgemeinen Kristallform ist:

$$\left\{\frac{a}{x} : \frac{a}{h} : \frac{a}{k} : \frac{a}{l}\right\}.$$

Groth wählt für die Kristallform die einfache Bezeichnung:

$$\{xhkl\}.$$

Bravais hatte eine andere Reihenfolge der Achsen a_1, a_2, a_3 angenommen. Für ihn bilden dieselben nach ihrem positiven Sinn nicht 60°, sondern 120°;

siehe x, y, t in der Fig. 193. Daher entspricht das Symbol $\{xhkl\}$ Groths dem Symbol $(kx\bar{h}l)$ von Bravais. Bei Groth ist daher $x = h - k$, bei Bravais $x + h + k = 0$.

Will man die Bezeichnungsart von Bravais in diejenige übersetzen, welche in diesem Buch angewendet ist, so verfährt man auf folgende Weise.

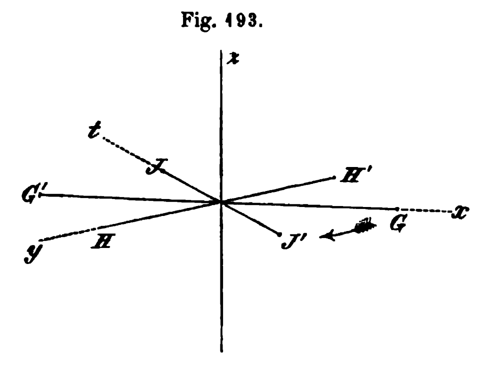


Fig. 193.

Es sei das Symbol der Fläche nach Bravais $(\bar{x}hkl)$, wobei $x = -(h + k)$ ist; und es mag z. B. h der kleinste der 3 ersten Indizes sein. Man zieht von allen 3 ersten Indizes die Zahl h ab. Das hier gebräuchliche Symbol derselben Fläche wird daher sein:

$$(\bar{x} - \bar{h},\ 0,\ k - h,\ l).$$

Will man umgekehrt aus dem hier gebräuchlichen Symbol $(h_1 \bar{h}_2 0 h_4)$ das Symbol von Bravais erhalten, so bestimme man zuerst die Differenz $h_2 - h_1$ und addiere sie zu den ersten 3 Indizes so:

$$h_1 + (h_2 - h_1),$$
$$\bar{h}_2 + (\bar{h}_2 - \bar{h}_1),$$
$$0 + (h_2 - h_1).$$

Das Symbol von Bravais wird daher sein:

$$(h_2,\ h_1 - 2h_2,\ h_2 - h_1,\ h_4).$$

Sind die 2 Indizes des gegebenen Symbols vom gleichen Zeichen, so verwandelt man dasselbe in der Weise, daß die 2 ersten Indizes entgegensetzte Zeichen haben.

Ist beispielsweise die Fläche $(2\bar{3}04)$ gegeben, so bedeutet sie nach der Bravaisschen Bezeichnung $(2 + 1,\ \bar{3} + \bar{1},\ 1,\ 4) = (3\bar{4}14)$, wo 1 aus der Differenz $3 - 2$ erhalten wird.

Ist umgekehrt das Bravaissche Symbol $(3\bar{4}14)$ gegeben, so entspricht es unserer Bezeichnung $(3 - 1,\ \bar{4} - \bar{1},\ 1 - 1,\ 4) = (2\bar{3}04)$. Wäre das Symbol $(0\bar{5}\bar{2}4)$ gegeben, so müßte es in folgender Weise verwandelt werden:

$$(0 - \bar{2}),\ (\bar{5} - \bar{2}),\ (\bar{2} - \bar{2}),\ (2\bar{3}04),$$

worauf die frühere Operation angewendet werden kann. Fallen 2 Indizes in unserer Bezeichnung gleich aus, aber von verschiedenen Zeichen, so entsprechen sie direkt dem Bravaisschen Symbol; also $(2104) = (2 - 1,\ 1 - 1,\ 0 - 1,\ 4) = (10\bar{1}4)$, da eben $1 + 0 - 1 = 0$ ist.

Für die Beschreibung der Grundgestalten der Kristalle sind außer die im § 42 erwähnten Bücher noch folgende zu erwähnen:

Handbuch der Mineralogie von C. A. S. Hoffmann, fortgesetzt von A. Breithaupt. 4 Bde. Freiberg 1811—1817.

R. J. Haüy. Traité de Minéralogie, sec. édit. 4 vol. nebst Atlas. Paris 1822.
F. S. Beudant. Traité de Minéralogie, sec. édit. Paris 1830—1832.
Fr. Mohs. Leichtfaßliche Anfangsgründe der Naturgeschichte des Mineralreiches. 2. Aufl. Wien 1836—1839.
A. Breithaupt. Vollständiges Handbuch der Mineralogie. Dresden 1836—1847.
J. H. Hausmann. Handbuch der Mineralogie. 3 Teile. Göttingen 1828—1847.
W. v. Haidinger. Handbuch der bestimmenden Mineralogie. 2. Ausgabe. Wien 1851.
J. Phillips. Elementary introduction in Mineralogy. New edition by Brooke and Miller. London 1852.
P. Dufrénoy. Traité de Minéralogie. 2. éd. Paris 1856—1859.
C. Fr. Naumann. Elemente der Mineralogie. 14. Aufl. Bearbeitet von Zirkel. Leipzig 1901.
A. Quenstedt. Handbuch der Mineralogie. 3. Aufl. Tübingen 1877.
A. Des Cloizeaux. Manuel de Minéralogie. Tome I. Paris 1862. Tome II. 1. 1874, 2. 1894.
J. D. Dana. System of Mineralogy 6. ed. 1892. New York 1868 mit Nachträgen.
E. Dana. Textbook of Mineralogy. New York 1877, 2. ed. 1894.
G. Tschermak. Lehrbuch der Mineralogie. Wien. 1. Aufl. 1882. 5. Aufl. 1897.
C. Hintze. Handbuch der Mineralogie. I. Bd. vollständig erschienen.
C. F. Rammelsberg. Handbuch der Mineralchemie. Leipzig. 2. Aufl. 1875.

Einzelne Beschreibungen der Mineralien und der Kristalle sind in vielen wissenschaftlichen Zeitschriften zerstreut. Man findet sie vereinigt und referiert in:

Zeitschrift für Krystallographie und Mineralogie, herausgegeben von P. v. Groth. Leipzig seit 1877.

Außerdem mögen für die kristallographischen Konstanten konsultiert werden:

P. Groth. Tabellarische Übersicht der Mineralien 1874. 1898. Franz. Übersetz. 1904.
Fr. Hessenberg. Mineralogische Notizen. 11 Hefte 1856—1873.
v. Kokscharow. Materialien zur Mineralogie Rußlands. Bd. 1—8.
G. A. Kenngott. Übersicht der Resultate mineralogischer Forschungen. 13 Bde. 1844—1865.
Jahresberichte der Chemie und verwandter Wissenschaften seit 1849.
Fr. Kobell. Zur Berechnung der Kristallformen. München 1867.
C. Klein. Einleitung in die Kristallberechnung. Stuttgart 1876.
E. Mallard. Traité de cristallographie géométr. et physique. Paris 1879.
Th. Liebisch. Geometr. Krystallographie. Leipzig 1881.
Ferd. Heinrich. Lehrb. d. Krystallberechnung. Stuttgart 1886.
R. Panebianeo. Calcolo cristallografico. Padova 1888.
G. Wyrouboff. Manuel pratique de cristallographie. Paris 1889.
B. Hecht. Anleitung zur Krystallberechnung. Leipzig 1893.
N. Story-Maskelyne. Crystallography. Oxford 1895.
E. Dana. A Text-book of Mineralogy. New York 1898.

Kapitel V.

Die Harmonien der Kristalle.

a) Physikalische Verhältnisse.

§ 59. Entstehung der Kristalle. Glaszustand.

Wenn eine Flüssigkeit mit Kristallen in Berührung tritt, aus denen sie durch Schmelzung entstanden ist, kann bewirkt werden, daß die Kristalle entweder zunehmen oder abnehmen. Tritt keins von beiden ein, so hat die Flüssigkeit die Temperatur des Schmelzpunktes der betreffenden Kristalle. Der Schmelzpunkt bezieht sich auf einen bestimmten äußern Druck. Sinkt die Temperatur unter den Schmelzpunkt, so kommt die Flüssigkeit in einen unterkälteten Zustand. Die Kristalle, welche in diese unterkältete Flüssigkeit getaucht werden, wachsen um so schneller, je tiefer die Temperatur der Flüssigkeit ist.

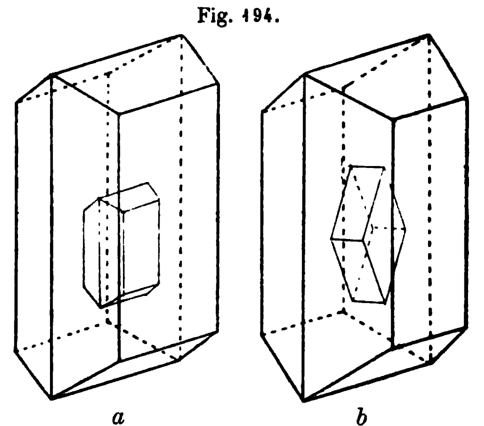
Beispiel. Das reine Benzil schmilzt bei 95° C. Folgende Zahlen geben, nach G. Tammann (1898), in Millimeter die mittlere Wachstumsgeschwindigkeit der Benzilkristalle bei verschiedenen Temperaturen an.

t^0	80°	70°	60°	50°	40°	30°	20°
Geschw. in mm	305,5	431,5	436,7	436,2	437,2	437,8	437,4.

Wie man sieht, ist schon bei 60°, d. h. 35° unterhalb des Schmelzpunktes (95°) das Maximum der Wachstumsgeschwindigkeit erreicht und es bleibt auch beim weitern Sinken der Temperatur nahezu auf dieser Höhe bestehen.

Das Maximum der Wachstumsgeschwindigkeit erfolgt also hier bei 35° Unterkältung; bei andern Kristallen wie Piperin und Betol bei 20°, für Mannit bei 25°, für Erythrit und Antipyrin bei 60°, für Dinitrophenol bei 75° usw.

Fig. 194.

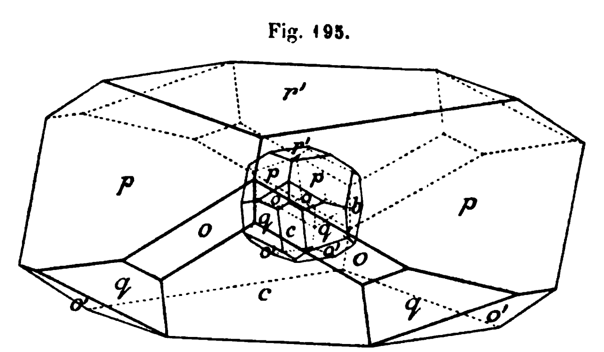


Das Maximum der Wachstumsgeschwindigkeit kann für verschiedene Richtungen eines Kristalls bei einer und derselben Temperatur eintreten. Ist das der Fall, so beginnen die Kristalle mit einer gewissen Gestalt, und wachsen fort, ohne die Gestalt zu verändern, siehe Fig. 194a.

Oder es kann das Maximum der Wachstumsgeschwindigkeit für verschiedene Richtungen eines Kristalls bei verschiedenen Temperaturen eintreten. In diesem Fall wird der betreffende Kristall fortwachsen, aber seine Gestalt wird sich verändern. Die Fig. 194b

zeigt eben, wie die Gestalt des kleinen Kristalls nach dem Wachstum sich verändert hat. Ein schönes Beispiel liefert auch die Fig. 195, welche das Bild des von G. Wulff dargestellten Mohrschen Salzes wiedergibt. Der kleine Kristall verändert sich nach und nach während des Wachstums. Beobachtet man eine solche Erscheinung, so ist es erlaubt auf obige Erklärung zurückzugreifen.

Fig. 195.



Die Bildung der Kristalle in einer aus Schmelzung entstandenen Flüssigkeit folgt einem ähnlichen Gesetz wie die Wachstumsgeschwindigkeit. Wenn eine solche Flüssigkeit unterkältet wird, krystallisiert sie nicht sogleich, wohl aber mehr oder weniger schnell je nach der Tiefe der Temperatur. Wenn man aber diese Flüssigkeit lange Zeit in ihrem Schmelzpunkt erhält, so entstehen selbständig Kristallisationskerne, von denen aus die Kristallisation weiter vor sich geht.

Man kann daher unter Schmelzpunkt oder Umwandlungspunkt diejenige Temperatur verstehen, bei welcher die Flüssigkeit nicht lange Zeit sich erhalten kann ohne zu kristallisieren.

Es ist höchst interessant das Gesetz zu erforschen, nach welchem die Entstehung der Kristallisationskerne in kurzer Zeit erfolgt.

Das Piperin schmilzt bei 129°; wird die Piperinflüssigkeit unterkältet und zählt man die Kristallisationskerne, welche in ein paar Minuten bei veschiedenen Temperaturen entstehen, so erhält man, nach G. Tammann, folgende Zahlen:

Temperatur:	90°	80°	70°	60°	50°	40°	30°	20°	10°	0°
Anzahl der Kerne:	0	0	2	11	25	54	35	4	2	0.

Wie man sieht, wächst die Anzahl der entstehenden Kristallisationskerne, je tiefer die Temperatur unter den Sehmelzpunkt sinkt, erreicht ihr Maximum bei etwa 129 — 40° = 89° Unterkältung und geht zurück, sobald die Temperatur unter diesen Maximalpunkt gelangt.

Während das Maximum der Wachstumsgeschwindigkeit der Piperinkrystalle bei 20° Unterkältung eintritt, erreicht die Anzahl der Kerne ihr Maximum bei etwa 90°.

Gelänge es, die Piperinflüssigkeit von 129° plötzlich auf 0° zu bringen, so würden sich keine Kristallisationskerne bilden, auch wenn die Temperatur noch tiefer sinkt. Mit weiterer Abkühlung wird die Flüssigkeit immer dicker und unbeweglicher bis das Piperin vollständig fest wird ohne zu kristallisieren. Man nennt eine so entstandene feste Substanz ein Glas oder einen amorphen Körper. Es ist begreiflich, daß jede aus Schmelzung entstandene Flüssigkeit

zu Glas übergeführt werden kann, wenn nur das Gesetz der selbständigen Kristallisation bekannt ist. Das Verfahren besteht also darin, daß man die Flüssigkeit schnell recht tief unterkältet.

Es ist eine bekannte Tatsache, daß flüssige Gesteinsmagmen sich zu Glas verfestigen, wenn sie rasch abgekühlt werden. Sie erscheinen bald feinkristallinisch, bald auch grobkristallinisch, je nach der Schnelligkeit ihrer Unterkältung.

Wir wollen jetzt eine zweite Art der Krystallbildung kennen lernen.

Wenn eine Lösung in Berührung tritt mit Kristallen, aus denen sie entstanden ist, so kann bewirkt werden, daß die Kristalle entweder zunehmen oder abnehmen. Tritt keines von beiden ein, so ist die Lösung gesättigt. Die Sättigung einer Lösung bezieht sich auf eine gewisse Temperatur und einen gewissen Druck. Druck und Temperatur bedingen den Sättigungszustand. Sinkt die Temperatur, so wird die Lösung übersättigt.

Die Kristalle, welche in eine übersättigte Lösung getaucht werden, wachsen um so schneller, je tiefer die Temperatur ist. Das Maximum der Wachstumsgeschwindigkeit wird gewöhnlich erreicht, wenn die Temperatur 20° unter diejenige des Sättigungszustandes gefallen ist. Das Gesetz, welches diese Art des Kristallwachstums beherrscht, hat eine große Ähnlichkeit mit dem Gesetz, welchem das Wachstum der Kristalle in einer unterkälteten Schmelze folgt.

Ebenso wie eine Schmelze unterkältet werden kann, ohne daß sich in einer recht kurzen Zeit Kristallisationskerne selbständig bilden, kann auch eine Lösung übersättigt werden, ohne daß darin Kristallisationskerne entstehen. Das Maximum der Anzahl von Kristallisationskernen wird bei einem bestimmten untersättigten Zustand eintreten, der von der Art der Lösung abhängig ist.

Andere Arten der Kristallbildung sind bekannt, so z. B. durch chemische Reaktion oder durch elektrische Einwirkung. Erfolgt eine chemische Reaktion, so kann die neu entstehende Verbindung sich in einer übersättigten Lösung befinden und es scheiden sich selbständig Kristalle aus.

§ 60. Erklärung der vorhergehenden Erscheinungen.

Denkt man sich, daß die Materie aus kleinsten Molekülen bestehe, so werden diese, wenn sie sich bewegen können, aneinander anstoßen und zur Ruhe kommen; dabei nehmen sie gleiche Orientierung an, wenn keine störende Kraft dagegen wirkt. Nur wenn gleiche Orientierung der Teilchen möglich ist, können wir uns denken, daß ein Kristall entsteht resp. weiterwächst. Ist die Temperatur der betreffenden Teilchen so tief, daß irgend welche Beweglichkeit der Teilchen aufhört, so wird es unmöglich, daß die Teilchen bei ihrer Annäherung gleiche Orientierung annehmen.

Soll also eine gewisse Anzahl von Kristallisationskernen entstehen, sei es aus einer übersättigten Lösung, sei es aus einer unterkälteten Flüssigkeit, so müssen die Teilchen eine bestimmte Beweglichkeit resp. weder zu tiefe noch zu hohe Temperatur behalten, da die Temperatur der Geschwindigkeit proportional ist. Wäre die Temperatur zu hoch resp. die Beweglichkeit zu groß,

so könnten die Teilchen nicht leicht zur Ruhe kommen, also die Bildung der Kerne veranlassen und das Wachstum hervorrufen.

Aus diesen Betrachtungen geht hervor, daß sowohl für das Maximum der Anzahl der Kristallisationskerne als auch für das Maximum der Wachstumsgeschwindigkeit eine mittlere Temperatur die günstigste sein muß, wie eben die Beobachtungen bestätigen.

Die Kräfte, welche bei diesen Erscheinungen in Frage kommen, sind folgende:

1. Die Kohäsion. Sie bewirkt das Anziehen der in der Nähe befindlichen Teilchen und das Festhalten derselben aneinander;
2. Die Adhäsion. Durch diesen Ausdruck bezeichnet man die Wirkung, welche zwischen Flüssigkeit und festen Theilchen besteht;
3. Ferner kommt in Betracht: die Bewegungsgröße, welche von der Geschwindigkeit und der Masse der Teilchen abhängt.

Wir können schlechtweg die Summe der Adhäsion und Bewegungsgröße mit Kapillarität bezeichnen; sie ist nämlich diejenige resultierende Wirkung, welche eine Flüssigkeit auf einen mit ihr in Berührung getretenen Körper ausübt, der für uns der Kristall oder die Teilchen sind.

Wenn ein Kristall mit einer Flüssigkeit in Berührung kommt und es tritt weder Zunahme noch Abnahme desselben ein, so halten sich Kohäsion und Kapillarität überall das Gleichgewicht. Ist die Kapillarität etwas kleiner als die Kohäsion, so wächst der Kristall, ist umgekehrt jene größer als diese, so löst sich der Kristall auf, resp. er schmilzt ab. Die absolute Gleichheit zwischen Kohäsion und Kapillarität entspricht dem Sättigungszustand resp. dem Schmelzpunkt.

§ 61. Kapillarität. Erzeugungskraft.

Wenn eine Flüssigkeit mit einer zweiten Flüssigkeit oder mit einem festen Körper, wie einem Kristall, in Berührung kommt, so entsteht eine Spannung in der Berührungsfläche. Um diese Berührungsfläche vollständig zu vernichten, ist eine Kraft nötig, welche Kapillarität heißt und pro Flächeneinheit gemessen wird. Denke man sich, daß ein Zylinder mit einer transversalen Fläche versehen ist, durch welche er in Berührung treten kann mit einer Flüssigkeit. Unter dieser Bedingung werden Zylinder und Flüssigkeit aneinander haften. Soll der Zylinder von der Flüssigkeit vollständig gerissen werden, so ist eine Zugkraft nötig. Diejenige Zugkraft pro Flächeneinheit, welche gerade genügt, um diesen Riß hervorzurufen, ist die Kapillarität. Genau so haben wir die Kohäsion definiert. Die Kapillarität ist daher eine Flächenkraft; sie kann auch nur dort erscheinen, wo eine Fläche vorhanden ist, und als solche ist sie von der physikalischen Beschaffenheit der Fläche abhängig. Sind zwei parallele Flächen im Kristall vorhanden, von denen wir wissen, daß dieselbe Kohäsion darauf wirken muss, und sind sie physikalisch verschieden, z. B. die eine rauh, die andere glatt, so ist die sich auf sie beziehende Kapillarität verschieden.

Wenn also zwei Flächen vorliegen, von denen die eine genau das Abbild der anderen ist, wie bei zwei parallelen Flächen des Kristalls der Fall ist, so wird die auf einer Fläche wirkende Kapillarität verschieden sein können von derjenigen, welche auf das Abbild jener Fläche wirkt. Die Kapillarität braucht also nicht harmonisch in bezug auf das Harmoniezentrum zu sein.

Wir können daher mit Hilfe der Kapillarität, d. h. mit der Angriffsweise einer Flüssigkeit, die Flächenbeschaffenheit der Kristalle erforschen, wenn ihre Kohäsion bekannt ist.

Bei dem Wachstum der Kristalle oder bei ihrer Auflösung kommt nicht die Kohäsion allein in Betracht, denn das ist unmöglich, sondern auch die Kapillarität; und diese ebenfalls nicht allein, denn die Kohäsion ist dabei unvermeidlich. Wo also Wachstumserscheinungen von Kristallen in Frage kommen, handelt es sich stets um eine Kraft, welche die Resultante von Kohäsion und Kapillarität ist. Eine solche resultierende Kraft, welche wir schlechtweg die Erzeugungskraft des Kristalles nennen können, ist im allgemeinen verschieden für die verschiedenen Flächen; sie wird also auch Minimum und Maximum haben, genau wie die Kohäsion. Der Unterschied zwischen Kohäsion und Kapillarität wird hauptsächlich darin bestehen, daß die Kohäsion nach beiden Sinnen einer Richtung stets dieselbe ist, während die Erzeugungskraft nicht dieselbe zu sein braucht.

Wie in § 7 gesagt wurde, bringt die Erzeugungskraft diejenige Gestalt hervor, welche wir Tracht der Kristalle genannt haben. Infolgedessen wird die Tracht dazu dienen, die Eigenschaft der Erzeugungskraft zu kennen. Erzeugungskraft und Tracht sind innig miteinander verknüpft; die erstere ist die Ursache der letzteren oder wird durch die letztere definiert. Wo immer Kristalle entstehen, zeigt es sich, daß alle einzelnen Individuen in demselben Ort mit derselben Tracht begleitet sind. Das sehen wir immer nicht nur bei den künstlich erzeugten Kristallen, sondern auch in den Drusen und Adern der Gebirge. Diese Tatsachen beweisen, daß bei dem Wachstum der Kristalle für alle Individuen in einem und demselben Ort dieselbe Erzeugungskraft geherrscht hat.

Würde die Erzeugungskraft für alle Vektoren proportional der Kohäsion sein, so würde die Tracht der Kristalle ihre bezügliche Grundgestalt annehmen; also sind Grundgestalt und Kohäsion reziprok, die eine dient dazu, um die andere zu definieren. Wir sind von der Kohäsion ausgegangen, und wir haben daraus die möglichen Grundgestalten der Kristalle abgeleitet. Schlagen wir den umgekehrten Weg ein, so gelangen wir zu den Eigenschaften der Kohäsion, welche bei den Kristallen gelten, sodaß wir uns praktisch ausdrücken können: die aus den Beobachtungen sich ergebenden Grundgestalten der Kristalle sind der Art, als ob senkrecht zu den Flächen der Grundgestalten Kohäsionskräfts wirken würden, welche die Eigenschaft der Minima und der Rationalität hätten.

Dieselbe Reziprozität treffen wir auch zwischen den mittleren Trachten der Kristalle und der auf die Flächen wirkende Kapillarität resp. Erzeugungskraft.

Letztere gewinnt eine Bedeutung, wenn sie auf die Kristalltracht bezogen wird. Wir werden in den folgenden Paragraphen von den mittleren Trachten sprechen; dabei werden wir von der Untersuchung der Flächen ausgehen, da wir keine Annahme über die Erzeugungskraft wagen dürfen.

§ 62. Begrenzung der Kristalltracht.

Wir wollen noch einmal den Unterschied zwischen Grundgestalt und Tracht der Kristalle hervorheben.

Steht uns eine sehr große Anzahl von Kristallgestalten von einer und derselben chemischen Zusammensetzung zu Gebote, die unter verschiedenen äußeren Bedingungen entstanden sind, so wird die mittlere Gestalt derselben alles Zufällige nicht enthalten. Eine solche mittlere Gestalt wird der Ausdruck sein von einer mittleren Erzeugungskraft, und diese kann nur proportional der Kohäsion sein. Wir haben diese mittlere Kristallgestalt Grundgestalt genannt.

Die Grundgestalt ist daher ein rein geometrisches Polyeder, dessen Flächen Ebenen sind, und einfache rationale Indizes haben, die über die III. Ableitung nicht hinausgehen.

Treffen wir dagegen von allen Kristallgestalten eine Auswahl, nämlich berücksichtigen wir nur solche, welche unter derselben Erzeugungskraft entstanden sind, so wird die mittlere Gestalt derselben nicht immer die Grundgestalt sein. Eine solche mittlere Kristallgestalt wird von Flächen begrenzt sein, die eine gewisse physikalische Beschaffenheit haben werden. Eine solche mittlere Gestalt wird ein Naturgegenstand sein. Wir haben sie Tracht genannt. Bei den Grundgestalten haben wir bestimmte Harmonieelemente erkannt. Auch die Tracht der Kristalle muß mit solchen versehen sein.

Wir werden bald sehen, daß die Flächen der Kristallgestalt physisch derart beschaffen sind, daß die Harmonie derselben ersichtlich ist. In der Grundgestalt sind die Flächen deshalb harmonisch beschaffen, weil die Zonen, welche ihnen parallel gehen, harmonische Zonenbüschel bilden. Die Flächen der Kristalltracht müssen selbst die harmonischen Bilder erzeugen.

Hat die Kristalltracht genau dieselbe Harmonie wie die entsprechende Grundgestalt, so heißt sie holoharmonisch. Sind zwei verschiedene Kristalltrachten erforderlich, um die Harmonie der entsprechenden Grundgestalt zu erzeugen, so heißen sie hemiharmonisch. Sind vier derselben notwendig, so heißen sie tetartoharmonisch. Die Kristalltrachten werden ogdoharmonisch genannt, wenn acht dazu beitragen müssen, um die Harmonie der entsprechenden Grundgestalt zustande zu bringen.

Wir werden zum Studium der Holoharmonie, der Hemiharmonie, der Tetartoharmonie, der Ogdoharmonie etc. übergehen und uns mit der Harmonie der Flächen näher befassen; ein Kristall wird eben erst durch Untersuchung der physikalischen Beschaffenheit seiner Flächen erforscht werden können. Keine andern Wege stehen uns zu Gebote, als von den Flächen aus das Innere der Kristalle zu beobachten und zu untersuchen.

§ 63. Die physikalische Beschaffenheit der Kristallflächen. Lichtfiguren und Lichtbilder.

Die physischen Eigenschaften der Fläche spielen bei der Kristalltracht eine wichtige Rolle, insofern als von der Fläche und der mit ihr im Zusammenhang stehenden Kapillarität das Wachstum des Kristalls zum großen Teil abhängt. Die physische Beschaffenheit einer Kristallfläche kann nämlich glatt, rauh, drusig, einfach und mehrfach gestreift etc. auftreten. Diese verschiedene Beschaffenheit einer Fläche wird durch Nebenflächen hervorgebracht, welche die Rauheit, die Streifung, die Drusen der Kristallflächen bewirken. Betrachtet man solche Flächen in einem Goniometer, so wird man bemerken, daß sie nicht einen einzigen Reflex des Signals hervorzurufen vermögen, was ein Beweis dafür ist, daß das Licht des Signals nicht nur von einer einzigen glatten Fläche zurückgeworfen wird. Sie erzeugt eine sogenannte Lichtfigur (Asterie).

Das Vorhandensein einer Lichtfigur ist ein Beweis dafür, daß der eingestellte Flächenort von zahlreichen Flächen (Nebenflächen) besetzt ist. Die Erfahrung hat sogar ergeben, daß alle Kristallflächen Lichtfiguren erzeugen, die mehr oder weniger zu einem einzigen Bildreflex verschmelzen, was sovicl heißt, als daß keine Kristallfläche als absolut glatt und eben betrachtet werden darf.

Bei der Behandlung der Grundgestalt haben wir als Krystallflächen solche Flächen oder Ebenen definiert, welche zu einem Kohäsionsminimum senkrecht stehen und folglich einfache rationale Indizes haben, die nicht höher als bis zur Zahl 3 gehen. Die Fläche der Grundgestalt ist infolgedessen eine ideale Ebenenfläche, welche ein einziges Signalbild erzeugt. Die Örter der Flächen der Grundgestalt stimmen mit den Lagen der Kohäsionsminima überein.

Die Fläche der Kristalltracht ist der Zusammenhang von unendlich vielen Flächen, die nebeneinander stehende Lichtreflexe geben und zusammengenommen eine Lichtfigur erzeugen. Denkt man sich den Mittelpunkt dieser Lichtfigur gefunden, so stellt er die Lage der Fläche dar, welche der Kristalltracht angehört. Also ist auch die Fläche der Krystalltracht eine ideale Fläche; ihr Dasein ist aber durch die Lichtfigur gegeben und wird auch durch die Lichtfigur definiert, und zwar nur durch diese.

Die Lage einer Fläche der Kristalltracht ist um so genauer zu bestimmen, je präziser der Mittelpunkt der ihr entsprechenden Lichtfigur angegeben werden kann.

Die Fig. 196 gibt, nach C. Viola, die Lichtfigur einer der Hauptflächen {100} des Kalzits, die schematisch in Fig. 197 dargestellt und mit A, B, C bezeichnet sind. Der Mittelpunkt dieser Lichtfigur ist durch ein kleines Kreuz angegeben, er entspricht der Fläche (100). Diese ist die Lage der Fläche, welche sowohl der Kristalltracht als auch der Grundgestalt angehört. Die radialen Lichtbilder entsprechen einer schrägen Liniierung der Kalzitflächen.

Die Fig. 198 gibt, nach C. Viola, die Lichtfigur einer der Flächen $\{11\bar{1}\}$ desselben Krystalls wieder, die mit D, E, F in Fig. 197 bezeichnet sind. Das

Zentrum der Lichtfigur ist auch ihr Mittelpunkt und gibt die Lage der Fläche $(11\bar{1})$ an; der helle Ring entspricht einer ganz merkwürdigen physischen Beschaffenheit der genannten Fläche.

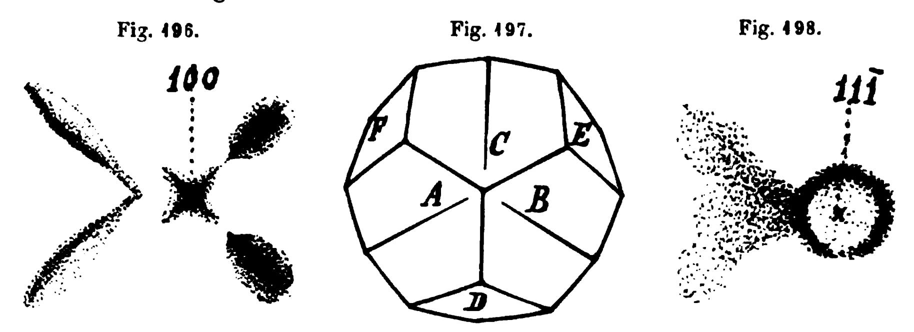


Fig. 196. Fig. 197. Fig. 198.

Es ist einleuchtend, daß der Mittelpunkt einer Lichtfigur der am stärksten beleuchteten Stelle am nächsten kommt. Das will heißen, daß dieser Mittelpunkt der Massenmittelpunkt ist, wenn man unter Masse der Lichtfigur die Helligkeit derselben bezeichnet.

Die Fläche (0001) des Muscovits, welche diejenige der ausgezeichneten Spaltbarkeit ist, zeigt, nach G. Tschermak, eine sechsstrahlige Lichtfigur, Fig. 199, entsprechend der hexagonalen Grundgestalt des Glimmers.

Die vollkommene Spaltungsfläche (001) des Baryts zeigt, nach G. Tschermak, eine achtstrahlige Lichtfigur, Fig. 200, welche der diharmonischen Ausbildung dieser Fläche vollkommen entspricht.

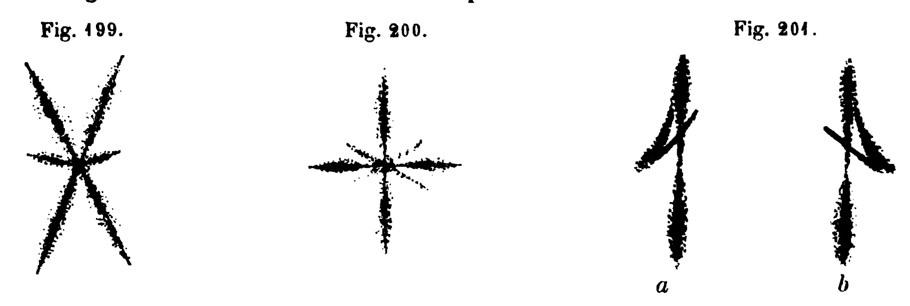


Fig. 199. Fig. 200. Fig. 201.

Die pyramidalen Endflächen des Quarzes liefern unregelmäßige Lichtfiguren, Fig. 201 a und Fig. 201 b, nach G. Tschermak, welche bald nach links, bald nach rechts die Unregelmäßigkeit zeigen.

Das Zentrum der Lichtfiguren von Muskovit- und Barytflächen entspricht der Lage der Fläche (001). Bei den Lichtfiguren des Quarzes ist es der Mittelpunkt des vertikalen Balkens, welcher den Ort der Flächen (110) resp. (011) andeutet. Die von L. Bucca beschriebene Anwachsstreifen des Eisenglanzes von Ätna liefern Lichtfiguren.

§ 64. Ätzung, Ätzfiguren, Lichtbilder.

Man dürfte fast erwarten, daß eine Kristallfläche, wenn sie gleichmäßig angegriffen wird, eine gleichmäßige Abnutzung erleidet. Das ist aber nie der

Fall, auch dann nicht, wenn die Kristallfläche vollkommen glatt oder glatt gemacht worden ist. Ja ist es auch fast unmöglich, eine Fläche vollkommen glatt zu machen; und ständen Mittel zur Verfügung das zu erreichen, so würde man sich nicht vorstellen, wie die Fläche angegriffen werden könnte.

Der erste Angriff auf die Fläche erfolgt nur in gewissen Punkten und Stellen, von wo aus die Abnutzung fortschreitet. Wegen dieser verschiedenen Abnutzung einer Fläche entstehen sichtbare Vertiefungen resp. Erhöhungen, die aus sehr kleinen Flächen gebildet sind, welche Ätzflächen heißen. Der Vorgang zur Erzeugung von Ätzflächen heißt Ätzung. Aus obigem geht hervor, daß die Ätzung leicht ein Mittel geben könnte, um die physische Beschaffenheit einer Fläche deutlich sichtbar zu machen. Man bedient sich gewöhnlich zu dieser Operation der Ätzfüssigkeiten, die mehr oder weniger stark den Krystall aufzulösen vermögen. Aber auch durch passende Reibung oder Schleifung oder durch Stoß können auf den Ätzflächen ähnliche Abnutzungsflächen hervorgerufen werden.

Die Ätzflächen begrenzen Gestalten, welche Ätzfiguren heißen. Sie werden eingeteilt in Ätztäler, wenn sie Vertiefungen und in Ätzhügel, wenn sie Erhöhungen sind.

Wird mit Hilfe eines Fernrohrs (des Goniometers) das beleuchtete in großer Entfernung liegende Signal durch die Ätzflächen reflektiert beobachtet, so nehmen wir Lichtbilder wahr, welche große Ähnlichkeit haben mit den durch die natürliche Beschaffenheit der Kristallfläche erzeugten Lichtfiguren. Die natürliche Beschaffenheit der Kristallfläche ergibt sich ebenfalls durch Vertiefungen und Erhöhungen, welche Ätzfiguren bilden und natürliche Ätzfiguren heißen.

Um die Ätzfiguren zu studieren, gibt es zwei Methoden. Entweder werden die Ätzfiguren durch das Mikroskop oder durch das Goniometer mit Hilfe der ihnen entsprechenden Lichtbilder studiert.

Durch die erste Methode tritt die Gestalt der einzelnen Ätzfiguren auf, durch die zweite summieren sich alle Ätzfiguren zu einem einzigen Lichtbild; durch die letzte Methode zeigt sich die Beschaffenheit der ganzen Fläche, was auch die einzelnen Figuren sein mögen, oder wie sie auch durch zufällige Störungen verändert sein könnten.

Darum ziehen wir die Methode der Lichtbilder für das Studium der physikalischen Beschaffenheit der Kristallfläche vor.

Was wir von den Ätzfiguren wissen, läßt sich, nach H. Baumhauer, folgendermaßen zusammenfassen:

1. Die Stelle des ersten Angriffs durch Ätzung und die Anordnung der Angriffsstellen auf einer Kristallfläche sind fast immer zufällig, oder keinem bekannten Gesetze unterworfen.
2. Die Größe und Gestalt der Ätzfiguren auf einer Kristallfläche sind oft verschieden auf den verschiedenen Angriffsstellen. Sie haben aber doch bestimmte Hauptzüge gemeinschaftlich.
3. Die Gestalt der Ätzfiguren ändert sich mit der Art der Ätzung.

4. Die Lichtbilder, welche sich nach den Hauptzügen der Ätzfiguren richten, bestimmen die physikalische Beschaffenheit der ihnen entsprechenden Flächen.

§ 65. Erklärung dieser Erscheinung.

Da die Erzeugungskraft ebenso wie die Kohäsion Minima und Maxima hat und haben muß, so werden die Flächen in der Nähe der Minima- und Maximaflächen mannigfaltig ausfallen. An Stelle einer einzigen Hauptfläche müssen wir deshalb eine große Anzahl von Flächen erwarten, die aber alle in der Nähe der Hauptflächen und somit auch der Hauptzonen liegen müssen. Die Hauptzüge der Lichtbilder werden daher die Hauptzonen und die Einheitszonen angeben; sie werden diese um so genauer angeben, je mannigfaltiger die Ätzung vor sich gehen wird, da das mittlere Lichtbild einer Fläche die zufälligen Störungen nicht enthalten wird.

§ 66. Harmonische Beschaffenheit der Kristallflächen.

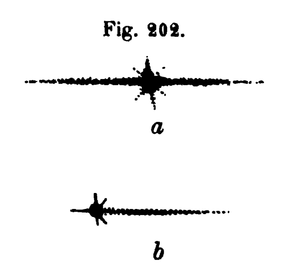
Um die harmonische Beschaffenheit der Kristalltrachten zu erforschen, ist vorerst nach dieser Richtung hin mit der Untersuchung ihrer Kristallflächen zu beginnen.

Wir haben schon gesehen, daß die Flächen der Grundgestalten monoharmonisch, diharmonisch, triharmonisch oder hexaharmonisch sind oder sein können, und nur so sein können.

Die Flächen der Kristalltrachten können nun in der Weise erscheinen, daß sie entweder die volle Harmonie zeigen, welche die entsprechenden Flächen der Grundgestalt besitzen oder nur einen Teil derselben.

Ähnlich wie bei den Harmonien der Kristalltracht (§ 62, S. 144) nennen wir hier **holoharmonisch** eine Fläche, wenn sie die volle Harmonie besitzt, die der entsprechenden Fläche der Grundgestalt zukommt. Das Lichtbild einer holoharmonischen Fläche genügt daher vollständig, um die volle Harmonie daraus zu erhalten. **Hemiharmonisch** wird eine Fläche genannt, sobald zwei verschiedene Lichtbilder erforderlich sind und zur Erzeugung der ihnen zukommenden vollen Harmonie genügen. Ähnlich wird eine Fläche **tetartoharmonisch** genannt, wenn vier verschiedene Lichtbilder zur Hervorbringung der ihr zugehörenden vollen Harmonie genügen.

Fig. 202.



Wir werden über die Harmonie der Kristallflächen genauen Aufschluß erlangen, wenn wir zuerst die Beschaffenheit der Richtungen ins Auge fassen.

Eine **Richtung** kann entweder **einwertig** oder **zweiwertig** sein. Das Lichtbild einer einwertigen Richtung wird nach beiden Sinnen genau gleich sein, wie die Fig. 202 a zeigt. Eine einwertige Richtung hat also denselben Wert nach beiden Sinnen, d. h. sie hat nur einen physikalischen Wert.

Bei einer zweiwertigen Richtung wird das Lichtbild nach einem Sinn verschieden sein von dem Lichtbild nach dem andern Sinn, wie die Fig. 202b zeigt. Eine zweiwertige Richtung hat also verschiedene Werte nach beiden Sinnen, d. h. sie hat zwei physikalische Werte.

Irgend welche Kristallfläche ist ihrer Harmonie nach gegeben, wenn zwei Hauptrichtungen derselben gegeben sind. Wir haben bei diesen zwei Richtungen die Hypothesen aufzustellen, daß sie einwertig oder zweiwertig sein können. Nun untersuchen wir der Reihe nach die mono-, di-, tri- und hexaharmonischen Flächen.

Die **monoharmonischen Flächen.** Wir erinnern daran, daß eine Fläche monoharmonisch genannt wird, wenn die zwei Hauptrichtungen bedeutend voneinander verschieden sind. In diesem Fall schließen die beiden Richtungen einen Winkel ein, der nicht sehr weit von 90° sein kann.

Bei Einwertigkeit der beiden Richtungen sind zwei Fälle möglich, nämlich eine Holoharmonie der Fläche, wie das Lichtbild Fig. 203a schematisch zeigt, und Hemiharmonie der Fläche, welche dem Lichtbild der Fig. 203b entspricht.

Ist eine der beiden Richtungen einwertig und die andere zweiwertig, so liegt eine hemimorphe Hemiharmonie der Fläche vor. Dabei kann die zweiwertige Richtung, auch hemimorphe Richtung genannt, entweder die Länge der Fläche sein, wie bei dem Lichtbild der Fig. 203c, oder die Breite der Fläche sein, wie beim Lichtbild der Fig. 203d.

Fig. 203.

a b c d e

Sind endlich beide Hauptrichtungen zweiwertig, so entsteht eine Tetartoharmonie der Fläche, wie das Lichtbild Fig. 203e angibt.

Die **diharmonischen Flächen.** Wie schon oben dargelegt wurde, wird eine Fläche diharmonisch genannt, sobald die zwei sie bestimmenden Hauptrichtungen wenig voneinander verschieden sind und einen Winkel einschließen, der nicht sehr weit von 90° sein darf. Wegen diesem Umstand dürfen beide Richtungen entweder nur einwertig oder nur zweiwertig sein. Wir werden sehen, wie weit das möglich ist.

Sind beide Richtungen einwertig, so entstehen zwei verschiedene Harmonien, nämlich:

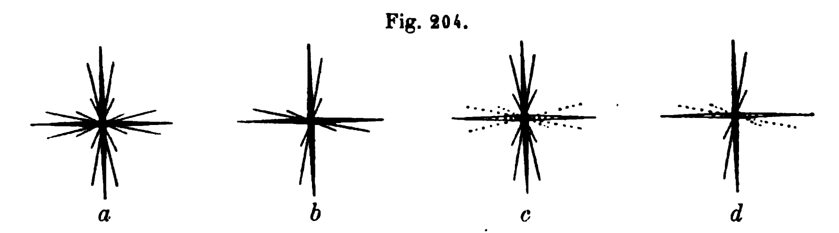
Die Holoharmonie, wie das Lichtbild der Fig. 204 a angibt und die Hemiharmonie, wie das Lichtbild der Fig. 204 b zeigt.

Falls beide Richtungen zweiwertig werden sollten, so würden zwar beide gleichwertig bleiben; aber die dazwischen liegenden Richtungen, die man gewöhnlich mit [1$\bar{1}$0] und [110] bezeichnet hat, würden sich als ungleichwertig herausstellen. Diese Annahme ist daher unzulässig.

Beide Richtungen können dadurch einwertig sein, daß eine Fläche auf beiden Seiten ein verschiedenes Lichtbild erzeugt, wie dasselbe der monoharmonischen Fläche eigen ist; zu bemerken ist aber, daß die zwei Lichtbilder sich kreuzen. Die Fig. 204 c zeigt einen solchen Fall, wobei das untere Lichtbild durch punktierte Linien angegeben ist.

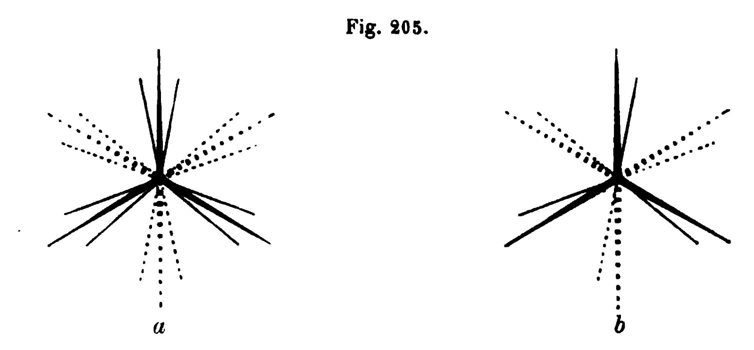
Außerdem wird sich eine Tetartoharmonie ergeben, wenn beide Richtungen zwar gleichwertig sind, wie in Fig. 203 b, aber verschieden auf beiden Seiten der Fläche, wie das Lichtbild der Fig. 204 d gibt, wobei das untere Lichtbild ebenfalls durch punktierte Linien angegeben ist.

Fig. 204.



Die **triharmonischen Flächen.** Wir wiederholen, daß eine Fläche triharmonisch oder hexaharmonisch ist, wenn die bestimmenden Hauptrichtungen nahezu gleichwertig sind und einen Winkel einschließen, der nicht weit von 60° ist. Der Unterschied zwischen einer hexaharmonischen und einer triharmonischen Fläche liegt darin, daß bei jener die drei Hauptrichtungen einwertig, bei dieser zweiwertig sind.

Fig. 205.



Aus dieser Bedingung ergibt sich, daß die möglichen Harmonien bei der triharmonischen Fläche nur aus der Annahme hervorgehen können, daß die drei Hauptrichtungen zweiwertig sind. Dieses angenommen, entstehen zwei Harmonien.

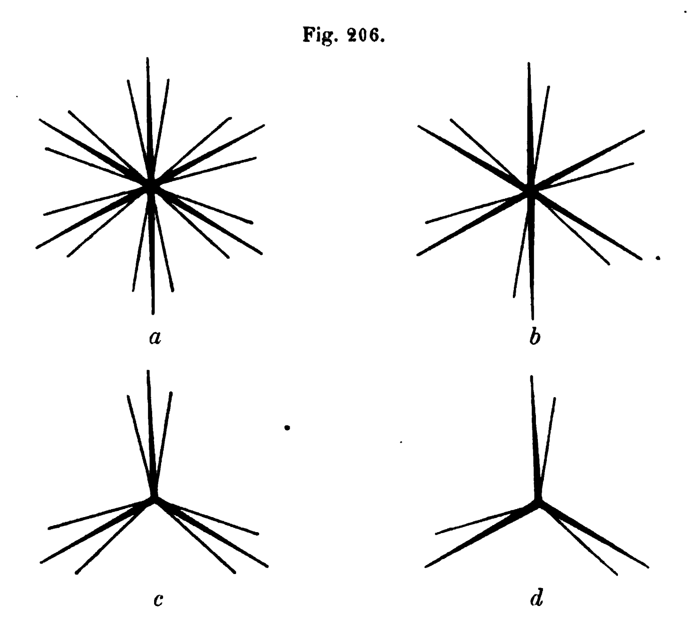
Die Holoharmonie. Sie ist durch das Lichtbild Fig. 205 a dargestellt. Auf beiden Seiten der Fläche kann dasselbe Lichtbild nicht entstehen; denn wäre dies der Fall, so würde die Fläche selbst eine Harmonieebene, was zur Folge hätte, daß die Fläche selbst in der Grundgestalt nicht eine triharmonische sondern eine hexaharmonische Fläche wäre, da das Harmoniezentrum immer vorhanden ist. Auf der andern Seite der Fläche muß sich deshalb ein Lichtbild ergeben, wie die punktierten Linien der Fig. 205 a zeigen.

Die Hemiharmonie. Fig. 205 b zeigt das Lichtbild dieser Harmonie. Aus denselben Gründen, wie soeben dargetan wurde, muß das Lichtbild auf der andern Seite der Fläche erscheinen, wie durch die punktierten Linien derselben Fig. 205 b angegeben ist.

Die **hexaharmonischen Flächen.** Hier müssen alle drei Hauptrichtungen entweder einwertig oder zweiwertig sein. Sind alle drei Richtungen einwertig, so entstehen:

Die Holoharmonie, wie die Fig. 206 a zeigt und die Hemiharmonie, vgl. Fig. 206 b. Sind zweitens alle drei Richtungen zweiwertig, so entsteht das Lichtbild der Fig. 206 c, gleich ausgebildet auf beiden Seiten der Fläche;

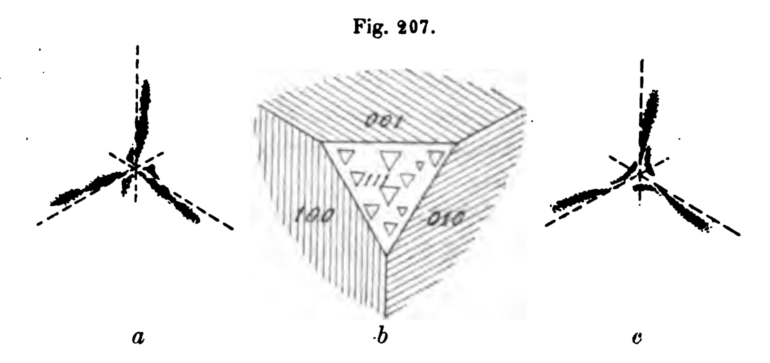
Fig. 206.



die Fläche muß daher eine Harmonieebene sein. Eine solche Hemiharmonie ist grundverschieden von der Holoharmonie der Fig. 205 a. Zweitens entsteht aus der Zweiwertigkeit der drei Hauptrichtungen die Tetartoharmonie, welche in Fig. 206 d dargestellt ist. Es ist nicht ausgeschlossen, daß die Holoharmonie und die Hemiharmonie der triharmonischen auch der hexaharmonischen Fläche angehören können; dann aber unter dem Gesichtspunkt aufgefaßt, daß jene eine Hemiharmonie und diese eine Tetartoharmonie der hexaharmonischen Fläche sei.

Als Beispiel sei hier die triharmonische Fläche (111) des Pyrits FeS^2, nach Fr. Becke, angeführt. Diese Fläche (111) ist in Fig. 207b abgebildet; die Ätzfiguren erscheinen als kleine vertiefte gleichseitige Dreiecke, deren Seiten nicht den Kanten der Fläche (111) genau parallel laufen. Das sieht man aus den in Fig. 207a und Fig. 207c dargestellten Lichtfiguren. Die punktierten

Fig. 207.



a b c

Linien sollen die Normalen zu jenen Kanten darstellen. Diese Fläche (111) des Pyrits zeigt also die Hemiharmonie, wie sie schematisch in Fig. 205b angegeben wurde.

Zwei solche Flächen des Pyrits sind erforderlich, die eine nach dem einen Sinn, die andere nach dem entgegengesetzten Sinn hemiharmonisch gedreht, um die vollständige triharmonische Fläche der Grundgestalt hervorzurufen.

§ 67. Harmonische Beschaffenheit der Kristallzonen.

Unter Zonen kann man nicht genügend einen Büschel parallel einer Richtung gehenden Ebenenflächen verstehen, wie bei den Grundgestalten. Bei den Kristalltrachten muß eine Zone aus der ihr eigenen Lichtfigur definiert werden; denn wir erhalten die Einsicht in eine Zone, wenn wir die Signalbilder beobachten, die durch die Zone gewonnen werden.

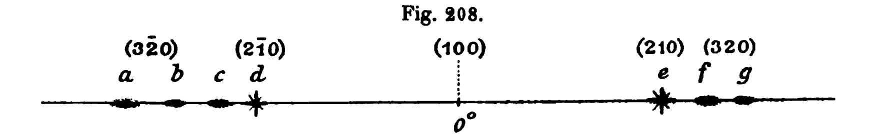
Liegen zahlreiche Flächen einer Richtung nahezu parallel, so entsteht im Gesichtsfeld des Goniometers eine Figur von Signalbildern, die nach einem Kreis geordnet sind. Man nennt eine solche Lichtfigur eine Lichtschnur. Die Mittellinie dieser Lichtschnur ist also ein Kreis. Die zur Ebene desselben senkrechte Grade heißt Achse der Zone.

Die Zonenachse wird um so genauer zu bestimmen sein, je präziser die Mittellinie der Lichtschnur gezogen werden kann. Eine so durch die Lichtschnur definierte Zonenachse stimmt mit der Zonenachse der entsprechenden Grundgestalt überein.

Die Fig. 208 gibt ein Beispiel einer Lichtschnur. Sie stellt, nach C. Viola, eine Zone des Pyrits dar. Die Mittellinie einer solchen Lichtschnur ist leicht anzugeben und somit auch die entsprechende Zonenachse. Kann durch Justierung des Goniometers die Mittellinie der Lichtschnur genau in den Äquator des Goniometers gebracht werden, so stimmt die Zone der Kristalltracht mit der entsprechenden Zone der Grundgestalt überein.

Wie bei den Kristallflächen, so können auch bei den Kristallzonen verschiedene Harmonien sich zeigen. Solche Harmonien hängen natürlich mit den Harmonien zusammen, welche den die Zone bildenden Flächen eigen sind. Wir werden die Harmonien der Zonen studieren mit Hilfe der Lichtschnüre, welche sie erzeugen.

Fig. 208.



Ist eine Zone derart beschaffen, daß aus ihrer Lichtschnur sofort die volle Harmonie hervorgeht, welche ihr als Zone der Grundgestalt zukommt, so heißt sie holoharmonisch. Hemiharmonisch wird wohl die Zone sein, deren Lichtschnur nicht die der Zone zukommende volle Harmonie zeigt, sondern nur einen Teil davon derart, daß die volle Harmonie sich erst ergibt, wenn zwei verschiedene Lichtschnüre derselben Fläche zur Deckung gelangen.

Gehen wir nun über zur Untersuchung, wie viele Harmonien bei den Zonen möglich sind. Wir beschränken uns auf die Haupt- und Einheitszonen der Kristalle, da wir auf dieselben die Harmonie der Kristalle aufbauen.

Eine **monoharmonische Zone** wird aus einem monoharmonischen und einem zweiten beliebigen Flächenpaar gebildet, das di-, tri- oder hexaharmonisch sein kann.

Fig. 209.

a. 100 101 102 001 1̄02 1̄01 1̄00

b. 100 101 102 001 1̄02 1̄01 1̄00

c. 100 210 110 120 010 1̄20 1̄10 2̄10 1̄00

d. 100 210 110 120 010 1̄20 1̄10 2̄10 1̄00

In der Fig. 209 a, b sind die Lichtschnüre von zwei monoharmonischen Zonen abgebildet. Man sieht, daß nur diese zwei Fälle möglich sind; die eine Zone heißt holoharmonisch, die andere hemiharmonisch.

Eine **diharmonische Zone** wird aus zwei monoharmonischen oder diharmonischen Flächenpaaren gebildet. Sind die zwei Hauptflächenpaare diharmonisch, so kann daraus natürlich nur eine Harmonie der diharmonischen Zone entstehen, nämlich die Holoharmonie, wie sie schematisch in Fig. 209 c dargestellt ist. Sind sie dagegen monoharmonisch, so kann sowohl eine drehende Hemiharmonie als auch eine hemimorphe Hemiharmonie entstehen; erstere ist in Fig. 209 d schematisch abgebildet.

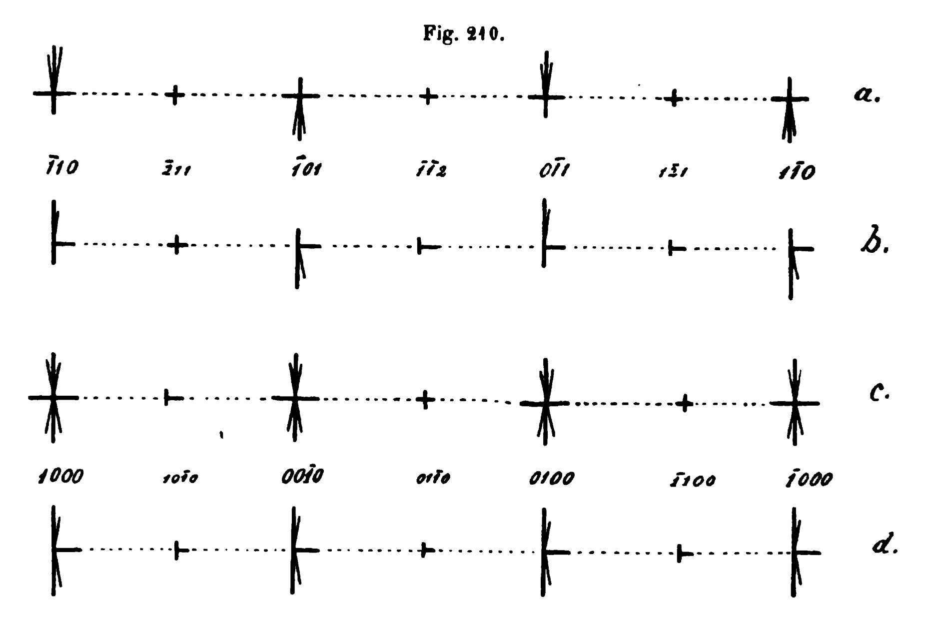
Genau die gleichen Unterschiede ergeben sich bei den **triharmonischen** und bei **hexaharmonischen Zonen.**

Die Fig. 210 a stellt die Holoharmonie und die Fig. 210 b die Hemiharmonie einer triharmonischen Zone schematisch dar.

Desgleichen zeigt Fig. 210 c die Holoharmonie und Fig. 210 d die Hemiharmonie einer hexaharmonischen Zone.

Die hemiharmonische Zone der Fig. 210 b ist offenbar drehend, so wie die Zone der Fig. 210 d. Sind aber die Hauptflächen dieser Zone hemimorph nach der Richtung der Zone, so werden die Zonen selbst hemimorph.

Fig. 210.



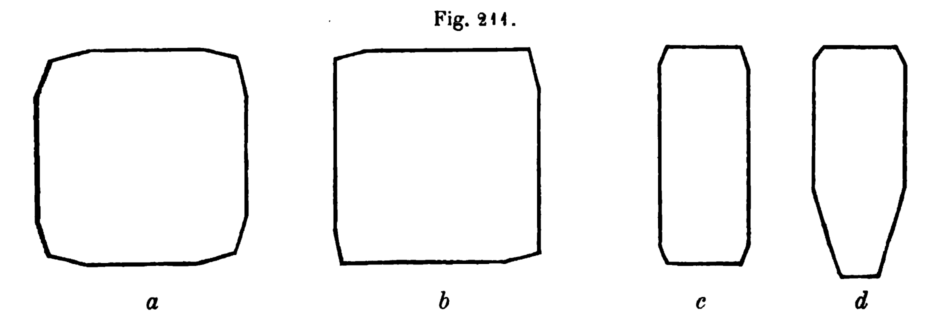
Auch aus diesen Lichtschnüren ist ersichtlich, das der Unterschied zwischen einer triharmonischen und einer hexaharmonischen Zone in der Umgebung der Zone liegt; es sind nämlich die Lichtschnüre für beide Zonen gleich, dagegen ist die radiale Strahlung der Lichtbilder für beide Zonen verschieden.

Übersichtlicher können wir die einzelnen Harmonien in der Projektion darstellen.

Schneiden wir die einzelnen Zonen durch eine senkrechte Ebene, so zeigt sich in diesem Schnitt genau die Harmonie der betreffenden Zone. Fig. 211 und Fig. 212 geben schematisch solche Bilder wieder. Dabei bedeuten Fig. 211 a

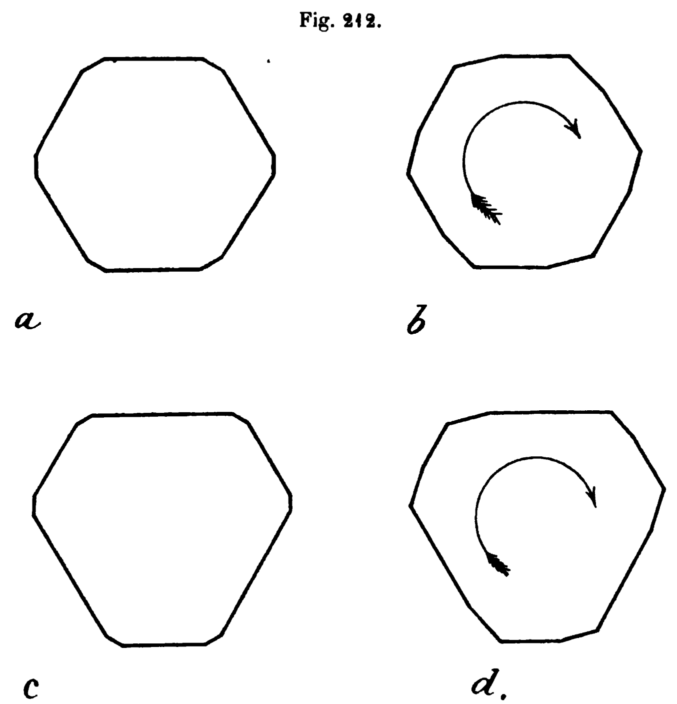
eine diharmonische Zone holoharmonisch wie Fig. 209 c; Fig. 211 b eine diharmonische Zone hemiharmonisch nach rechts drehend; Fig. 211 c eine

Fig. 211.



monoharmonische Zone holoharmonisch, und Fig. 211 b dieselbe aber hemimorph. In Fig. 212 sind triharmonische und hexaharmonischen Zonen dargestellt, wo die gleichen Buchstaben die gleiche Bedeutung haben wie die in Fig. 210.

Fig. 212.



§ 68. Grad des Hemimorphismus bei den Flächen und bei den Zonen.

Wir haben hervorgehoben, daß der Mittelpunkt eines Lichtbildes die Lage der Fläche angibt, welche zur Kristalltracht gehört.

Stellt man das Lichtbild als eine besetzte Fläche dar, wo jeder beleuchtete Punkt von einer Masse besetzt ist, nämlich der Lichtstärke, so versteht man

unter Mittelpunkt des Lichtbildes den Massenmittelpunkt der besetzten Fläche. Ist die Fläche holomorph, so stimmt der Mittelpunkt des Lichtbildes mit der Lage der Fläche, welche zur Grundgestalt gehört. Kommt der Mittelpunkt etwas seitlich von dieser Lage zu liegen, so ist die Fläche der Kristalltracht hemimorph. Der Unterschied zwischen dem Mittelpunkt des Lichtbildes und der Lage der Fläche der Grundgestalt, in Bogen ausgedrückt, gibt den Grad des Hemimorphismus der Fläche.

Desgleichen verhält es sich mit einer Kristallzone. Die Mittellinie einer Lichtschnur ist diejenige Linie, um welche alle Lichtbilder der Lichtschnur sich das Gleichgewicht halten in bezug auf ihre Stärke, sie ist also diejenige Linie, welche alle Massenmittelpunkte der Lichtbilder verbindet. Kann eine solche Mittellinie in den Äquator des Goniometers gebracht werden, so stellen die einzelnen Lichtbilder wirklich eine Zone dar, da ihre bezüglichen Flächen parallel einer Geraden sind, und diese Zone ist daher holomorph. Schließt dagegen die Mittellinie einen gewissen Winkel mit dem Äquator ein, so ist die Zone hemimorph, da die betreffenden Flächen gegen einem Ende der Zone etwas geneigt sind; und der Winkel selbst gibt den Grad des Hemimorphismus.

§ 69. Geschichtliches. Literatur.

Die wichtigsten Untersuchungen über Ätzerscheinungen fangen mit F. Leydolt (1854) an. Er unterschied Ätzhügel und Ätzgräben, benutzte die Ätzfiguren für die Vergleichung der physikalischen Zustände der Flächen, studierte die Lichtbilder (Asterie) der Ätzfiguren nach D. Brewsters (1853) Methode und führte diese Beobachtungsart für die Untersuchung der Zwillingskristalle ein; er sprach auch die Vermutung aus, daß den Ätzflächen einfache rationale Indizes zukommen. Auch glaubte Leydolt, daß die durch Ätzung hervorgebrachten Vertiefungen die Gestalten der kleinsten Kristallteilchen darstellten. V. von Ebner (1883—1884) untersuchte die Lösungsflächen des Kalkspates und des Aragonits und beobachtete die verschiedenen Ätzflächen, welche zeitlich aufeinander folgen. J. Strüver, 1869, machte aufmerksam auf die Beschaffenheit der Flächen für die Kristallstruktur.

Auf die verschiedene Form der Ätzfiguren und auf ihre Verteilung auf den Kristallflächen haben G. Rose (1856—1873), C. Klein (1880), G. Tschermak (1882), H. Baumhauer (1869—1898), Fr. Becke (1883—1894), J. Beckenkamp (1888—1899) hauptsächlich aufmerksam gemacht.

Durch die Ätzmethode wurde auf die Symmetrie resp. Grundgestalt der verschiedenen Mineralien geschlossen zuerst von Leydolt, dann aber auch von G. Tschermak, W. C. Brögger, A. Hamberg u. a. m. Unermüdlich hat hauptsächlich über die Ätzung der Kristalle nach jeder Richtung hin H. Baumhauer gearbeitet. Mit Hilfe der verschiedenen Gestalten, welche die Ätzfiguren annehmen, wenn die Ätzung verschieden eingerichtet wird, die Ätzungsmittel geändert und verschieden konzentriert werden, hat Baumhauer zuerst mit dem Irrtum Leydolts aufgeräumt, daß die Gestalten der Ätzfiguren diejenige der kleinsten Kristallteilchen sein sollen. Aus seinen scharfen

Beobachtungen geht hervor, daß die Ätzflächen nicht rationale Flächen, d. h. nicht Flächen mit kleinen rationalen Indizes sein können. Baumhauers Untersuchungen haben sich nicht nur auf die Gestalt der Ätzfiguren beschränkt, sondern auch auf die durch dieselben erzeugten Lichtbilder ausgedehnt.

Hochinteressant sind die Untersuchungen und Messungen Fr. Beckes über die Ätzfiguren und die mit denselben verbundene Geschwindigkeit der Auflösung. Dieser Forscher unterschied die Hauptätzflächen, welche bei allen Örtern des Kristalles auftreten, von den Nebenätzflächen, welche sich nicht bei allen geätzten Örtern wiederholen.

Indem Becke die Begriffe der primären und sekundären Ätzflächen einführte, knüpfte er an die entsprechenden Bezeichnungen v. Ebners »primäre« und »sekundäre« Lösungsgestalten an. Er geht dabei, ebenso wie v. Ebner, von der Vorstellung aus, daß im ersten Moment der Ätzung die Ausbildung einer von primären Ätzflächen mit sehr einfachen Indizes umschlossenen Figur angestrebt wird, daß aber diese primären Ätzflächen sich auf die Dauer nicht erhalten, sondern daß bei weiterer Ätzung aus denselben andere, die sekundären Ätzflächen mit komplizierterem Symbol hervorgehen. Ferner konstatierte Becke die Tatsache, daß die Ätzflächen den geätzten Kristallflächen nahe rücken und in bestimmten Zonen bleiben. Aus Beckes Beobachtungen geht der wichtige Schluß hervor, daß die primären Ätzflächen die Flächen des größten Lösungswiderstandes oder der kleinsten Lösungsgeschwindigkeit sind.

Durch die rege Forschung Baumhauers ist die Ätzmethode für das Studium der Kristalle wertvoll und ein Mittel der Untersuchung geworden, welches für die Ermittelung der Zwillingskristalle, der sogenannten mimetischen Kristalle (G. Tschermak), der Symmetrieeigenschaften und der Isomorphie der Kristalle unentbehrlich ist.

Die Kenntnis der Kristallstruktur ist durch die Ätzmethode nicht weit gekommen; durch dieselbe ist man nicht auf die kleinsten Kristallteilchen gekommen, und man wird auch nicht darauf kommen, wie Baumhauer trefflich bemerkt hat.

Die Ätzversuche haben bedeutend zum Grundgesetz der Kristalle beigetragen, denn alle Ätzflächen spielen dieselbe Rolle wie die natürlichen Kristallflächen; damit ersetzen die künstlichen Ätzflächen das, was zuweilen den einzelnen Individuen fehlt oder fehlen kann. Auf die Wichtigkeit der Ätzversuche in diesem Sinne hat V. Goldschmidt aufmerksam gemacht.

Andere Untersuchungen über Ätzung und Auflösung der Kristalle rühren hauptsächlich her von A. Hamberg (1890), F. Rinne (1894), F. v. Kobell (1862), L. Wulff (1880, 1894), G. Molengraff (1888—1890), L. Sohncke (1875), F. Klocke (1878—1880), K. Haushofer (1865), H. Laspeyres (1876), O. Meyer (1883), S. Penfield (1891) u. a. m. P. v. Groth (1894) hat in seiner physikalischen Kristallographie die Theorie der Symmetrieeigenschaften durch die Auflösungserscheinungen bei den Kristallen unterstützt, und dadurch dem Kristalle einen wirklichen Naturgegenstand zugeschrieben.

Über Geschichte und Literatur der Ätzmethode sehe man »Die Resultate der Ätzmethode« von H. Baumhauer (Leipzig 1894) und »Über Ätzfiguren, Lichtfiguren und Lösungskörper mit Beobachtungen am Kalzit« von V. Goldschmidt und Fr. E. Wright (Stuttgart 1903).

Über Entstehung und Bildung der Kristalle gibt es eine ungemein reiche Literatur. Wir wollen folgendes hervorheben:

H. Behrens. Die Krystalliten. Kiel 1874.

O. Lehmann. Über das Wachstum der Kristalle. Ztschr. f. Krystall. **1**, 470; ferner **8**, 433.

D. L. Frankenheim. Über Entstehen und das Wachsen der Krystalle usw. Pogg. Ann. 1860, **3**, 1.

De Watteville. C. R. de l'Ac. de Sc. (1897), **124**, 400.

G. Tammann. Über die Abhängigkeit der Zahl der Kerne, welche sich in verschiedenen unterkühlten Flüssigkeiten bilden, von der Temperatur. Ztschr. f. phys. Chem. 1898, **25**, 441.

K. Schaum. Über die Krystallisation des unterkühlten Benzophenons. Ztschr. f. phys. Chem. 1898, **25**, 722.

W. Ostwald. Studien über die Bildung und Umwandlung fester Körper. Ztschr. f. phys. Chem. **22**, 289.

H. Vater. Über den Einfluß der Lösungsprozesse auf die Krystallisation des Calciumcarbonates. Ztschr. f. Krystall. **31**, 538. Mit Literatur.

Über Wachstum und Auflösung der Kristalle behandeln besonders:

L. Lecoq de Boisbaudran; verschiedene Schriften vom Jahre 1878 und 1879.

P. Curie. Sur la formation des cristaux et sur les const. capillaires de leurs diverses faces. Bull. d. Soc. Minér. de Fr. 1885, **8**, 145.

L. Sohncke. Über Spaltungsflächen und natürliche Krystallflächen. Ztschr. f. Krystall. 1888, **13**, 214.

G. Wulff. Zur Frage der Geschwindigkeit des Wachstums und der Auflösung der Krystallflächen. Ztschr. f. Krystall. **34**, 449.

G. A. Hulett. Beziehungen zwischen Oberflächensp. und Löslichkeit. Ztschr. f. phys. Chem. 1901, **37**, 385.

G. Spezia. Auflösungsversuche über Quarz und Opal. R. Accad. Sc. Torino. Atti (1898), **33**, 289 und 876.

b) Beschreibung der Harmonien der Kristalle.

§ 70. Gang der Untersuchung, Kristallformen.

Man beobachtet bei den Kristallen Flächen und Zonen, welche mit gewissen Harmonien behaftet sind. Man wird auch bei den Kristallen gewisse Harmonien konstatieren, die sich aus denjenigen der Flächen und Zonen ergeben müssen. Eine Grundgestalt ergibt sich als hinreichend bestimmt, wenn ihre Hauptflächen und ihre Hauptzonen bekannt sind; deshalb wird es auch möglich sein, die Harmonie zu erforschen, welche einer Kristalltracht zukommt, wenn die Harmonien der Hauptflächen und Hauptzonen erforscht sein werden. Wir sehen daher, daß der Gang der Untersuchung, um die möglichen Harmonien der Kristalle herauszufinden, der sein wird, vorerst die Harmonien

der Hauptflächen und der Hauptzonen zu studieren. Wir werden bei der Beschreibung der einzelnen Harmonien die Einteilung der Kristalle in drei- und viergliedrige, in viergliedrige, in dreigliedrige und sechsgliedrige anwenden, da bei verschiedenen Grundgestalten (prismatisch oder tafelartig) doch dieselbe Harmonie sich zeigen kann.

Alle Flächen von gleicher Entwicklung, welche harmonisch zusammenhängen, erzeugen im Kristall ein Gebilde, welches Kristallform heißt. Diese für die Grundgestalten geltende Definition findet ihre Gültigkeit auch bei den Trachten der Kristalle, wenn wir nur die Bedingung »gleiche Entwicklung« durch »physikalische Beschaffenheit« ersetzen. Also heißt Kristallform bei den Trachten der Kristalle dasjenige Gebilde, welches durch Flächen zusammengesetzt ist, die physikalisch gleich beschaffen sind und harmonisch zusammenhängen. Die Kristallform erhält das Symbol $H\{h_1 h_2 h_3\}$, wo H die Bezeichnung der Harmonie bedeutet.

So sind die in Fig. 213 und 214, S. 161, dargestellten Tetraeder 2 Kristallformen, welche zusammen das Oktaeder bilden. Die Flächen des ersten Tetraeders sind unter sich physikalisch-gleich beschaffen und stellen sich den Flächen des zweiten Tetraeders gegenüber, da sie eine andere physikalische Beschaffenheit zeigen. Das eine Tetraeder kann z. B. glatte, das andere rauhe Flächen haben. Wird das eine Tetraeder »positiv« genannt, so heißt das andere »negativ«. Auch wenn beide Tetraeder gleichzeitig auftreten und das vollständige Oktaeder bilden, wird es notwendig sein, beide als 2 getrennte Kristallformen anzusehen.

Wir werden bei den Kristalltrachten Kristallformen kennen lernen, wie solche uns schon bei den Grundgestalten entgegengetreten sind. Durch das Studium der einzelnen Kristallformen wird es dann ein Leichtes sein, die Kristalltrachten selbst sich vorzustellen resp. sie aufzubauen.

§ 71. Zusammenstellung der Harmonien der Kristalle.

Durch Anpassung der möglichen Harmonien von Flächen und Zonen gelangen wir zu allen möglichen Harmonien der Kristalle, welche wir folgendermaßen zusammenfassen können, und folgende Bezeichnung H erhalten.

I. Drei- und viergliedrige Kristalle.
1. Holoharmonie $= (34)^s$.
2. Gyroedrische Hemiharmonie $= (34)$.
3. Tetraedrische Hemiharmonie $= (33)^s$.
4. Pentagonale Hemiharmonie $= (33)^\sigma$.
5. Tetartoharmonie $= (33)$.

II. Viergliedrige Kristalle.
6. Holoharmonie $= (24)^s$.
7. Gyroedrische Hemiharmonie $= (24)$.
8. Pyramidale Hemiharmonie $= (04)^\sigma$.
9. Sphenoidische Hemiharmonie $= (42)^s$.
10. Sphenoidische Tetartoharmonie $= (42)$.

11. Hemimorphe Hemiharmonie = $(04)^s$.
12. Hemimorphe Tetartoharmonie = (04).

III. Dreigliedrige Kristalle.

13. Holoharmonie = $(63)^s$.
14. Rhomboedrische Hemiharmonie = (63).
15. Gyroedrische Hemiharmonie = (23).
16. Hemimorphe Hemiharmonie = $(03)^s$.
17. Hemimorphe Tetartoharmonie = (03).

IV. Sechsgliedrige Kristalle.

18. Holoharmonie = $(26)^s$.
19. Gyroedrische Hemiharmonie = (26).
20. Pyramidale Hemiharmonie = $(06)^\sigma$.
21. Trigonotypische Hemiharmonie = $(23)^s$.
22. Pyramidale Tetartoharmonie = $(03)^\sigma$.
23. Hemimorphe Hemiharmonie = $(06)^s$.
24. Hemimorphe drehende Tetartoharmonie = (06).

Zu diesen 24 Harmonien kommen noch folgende 5 hinzu, welche zu den dreigliedrigen gehören, aber ebenfalls zu den sechsgliedrigen Kristallen gezählt werden können. Wir werden später sehen, weshalb diese 5 Harmonien unter diese Kategorie gerechnet werden dürfen. Nehmen wir also noch die 5 Harmonien zu den sechsgliedrigen Kristallen hinzu, so erhalten wir:

25. Skalenoedrische Hemiharmonie = $(63)^s$.
26. Rhomboedrische Tetartoharmonie = (63).
27. Gyroedrische Tetartoharmonie = (23).
28. Hemimorphe Tetartoharmonie = $(03)^s$.
29. Hemimorphe Ogdoharmonie = (03).

I. Drei- und viergliedrige Kristalle.

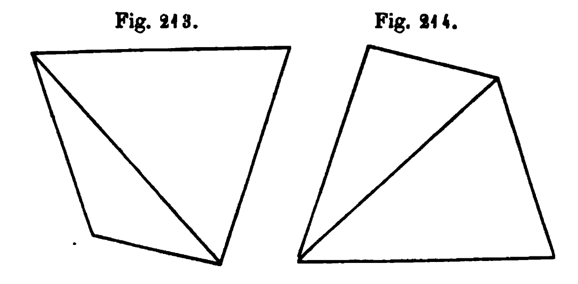
§ 72. Allgemeines Merkmal.

Drei gleich herrschende diharmonische Flächen und Zonen sind vorhanden. Das Hexaeder, das Oktaeder und das Rhombendodekaeder sind darin die herrschenden Kristallformen. Es kann aber mehr das Hexaeder vorherrschen, oder mehr das Oktaeder oder endlich mehr das Dodekaeder; deshalb teilen sich die drei- und viergliedrigen Kristalle (auch isoharmonische Kristalle genannt) in hexaedrische, oktaedrische und dodekaedrische. Aus den Harmonien dieser Einheitsformen werden sich die möglichen Harmonien der drei- und viergliedrigen Kristalle entwickeln.

Zu bemerken ist, daß alle Flächen des Hexaeders, sowie alle seine Zonen harmonisch gleich sein müssen, da sie unter sich gleiche Bedeutung in der Gestalt haben. Würde man z. B. annehmen, daß einige Flächenpaare holoharmonisch und andere hemiharmonisch wären, so würde daraus folgen, daß einige Flächenpaare andere Entwicklung erlangen, als die übrigen Flächenpaare,

also eine Gestalt liefern, welche nicht zu den drei- und viergliedrigen Kristallen gehören kann. Es müssen also auch infolgedessen alle Flächen des Hexaeders physikalisch gleich beschaffen sein.

Das Oktaeder unterscheidet sich in dieser Beziehung beträchtlich von einem Hexaeder. Diese Kristallform kann sich in zwei teilen, welche je aus 4 Flächen besteht und Tetraeder heißen. Ein Tetraeder kann deshalb physikalisch verschieden sein von dem andern, wie oben bemerkt wurde (§ 70, S. 159). Wir können also bei dem Oktaeder die Flächen verschieden harmonisch, und zwar abwechselnd verschieden harmonisch annehmen. Zwei verschiedene zu einem Oktaeder sich ergänzende Tetraeder sind in Fig. 213 und Fig. 214 abgebildet.


Fig. 213. Fig. 214.

Das Dodekaeder kann nicht in verschieden isoharmonische Formen geteilt werden, deshalb müssen alle seine Flächen harmonisch gleich beschaffen sein. Eine Verschiedenheit seiner Flächen würde dreigliedrige oder viergliedrige Gestalten hervorrufen, also Ergebnisse, welche gegen die Annahme sind, daß die Kristalle drei- oder viergliedrig sein sollen.

Nachdem die Bedingungen gegeben sind, nach denen sich die Harmonien der Flächen richten sollen, gehen wir dazu über, die Harmonien der Kristalle selbst zu entwickeln, wie sie in § 71 angeordnet sind.

§ 73. Holoharmonie = $(34)^s$.

Die 3 Flächenpaare des Hexaeders sind holoharmonisch, vgl. Fig. 218 a. Sie sind daher Harmonieebenen. Es folgt weiter, daß die Kristalltrachten 3 diharmonische, 4 triharmonische und 6 monoharmonische Axen besitzen müssen. Eine Holoharmonie hat daher dieselben Harmonieelemente wie die entsprechende Grundgestalt, und eine Tracht allein reicht vollständig hin, um sofort alle Harmonieelemente der Grundgestalt anzugeben.

Die Kristallformen der Holoharmonie sind dieselben, wie die Kristallformen der entsprechenden Grundgestalten, die wir bei den hexaedrischen, dodekaedrischen und oktaedrischen Grundgestalten kennen gelernt haben.

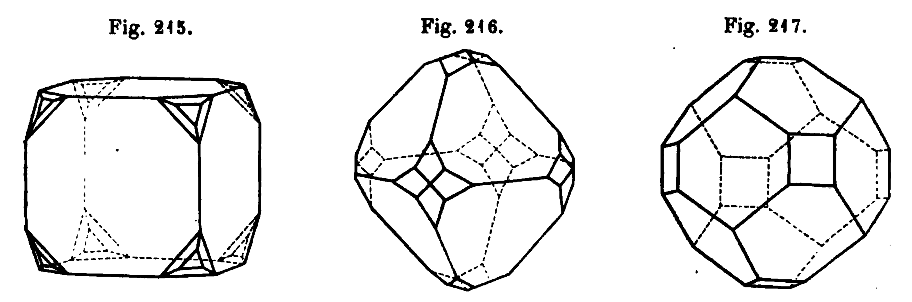
Wir bezeichnen die Holoharmonie mit dem Symbol $(34)^s$ um anzudeuten, daß eine triharmonische Zone (3), eine diharmonische Zone (4) und eine Harmonieebene (s), welche den beiden Zonen gemeinschaftlich ist, die Holoharmonie vollständig charakterisieren.

Als **Beispiele** mögen eingeführt werden:

Das **Bleisulfid** (Bleiglanz) = *SbS*, Fig. 215, spaltbar vollkommen nach

{100}; das Fluorkalzium (Flußspat) = CaF^2, Fig. 216, spaltbar vollkommen nach {111}; das Kupfer = Cu, Fig. 217.

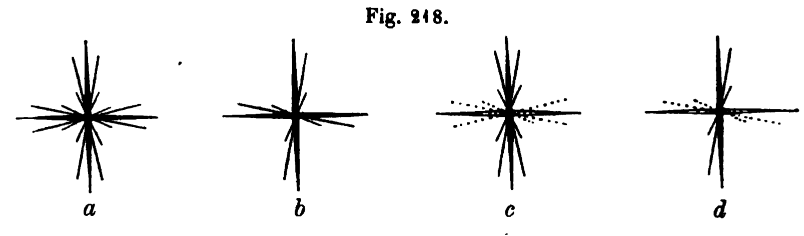
Fig. 215. Fig. 216. Fig. 217.



§ 74. Gyroedrische Hemiharmonie = (34).

Die 3 Flächenpaare des Hexaeders sind hemiharmonisch drehend, siehe Fig. 218 b, deshalb können keine Harmonieebenen, wohl aber Harmonieachsen vorkommen. Es gibt 3 diharmonische, 4 triharmonische und 6 monoharmonische Achsen. Sind 2 solche hemiharmonische Trachten, die sich nicht decken können, vorhanden, also enantiomorphen Charakter haben, so erzeugen sie zusammen die früher behandelte Holoharmonie.

Fig. 218.



Kommt also die gyroedrische Hemiharmonie bei einem Kristall vor, so muß auch die ergänzende (zu der Holoharmonie) sich zeigen, damit die Grundgestalt vollständig zum Vorschein kommt.

Auch die Oktaeder- und Rhomberdodekaederflächen sind hemiharmonisch drehend. Ist die Grundgestalt bekannt oder ist das isoharmonische Merkmal der Kristalle festgestellt, so genügt es, nur eine der Einheitsflächen auf ihre Harmonie zu prüfen, damit die gyroedrische Hemiharmonie (34) bestimmt sei. Mit der Bezeichnung (34) will man andeuten, daß eine triharmonische (3) und eine diharmonische Achse (4) die Merkmale dieser Hemiharmonie seien. Auch die äußere Gestalt muß die gyroedrische Harmonie zutage treten lassen. Die Einheitsformen bleiben zwar dieselben wie bei der Holoharmonie, nämlich:

Hexaeder	{100}
Oktaeder	{111}
Rhombendodekaeder. .	{110};

die Kristallformen der II. und III. Ableitung sind dagegen verschieden. Wir wollen sie aus irgend welcher gegebenen Fläche entwickeln. Liegt z. B. die Fläche (123) vor, so sind damit gleichzeitig folgende 4 Flächen gegeben:

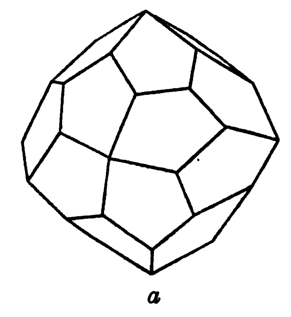
$$(123),\ (2\bar{1}3),\ (\bar{1}\bar{2}3),\ (\bar{2}13),$$

da die Zone [001] diharmonisch ist. Nun sind aber auch [010] und [100] diharmonisch, daher werden noch folgende Flächen mit obigen 4 harmonisch zusammenhängen:

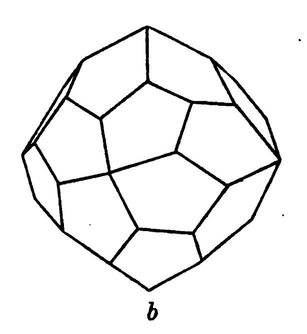
$$\begin{array}{llll}
(21\bar{3}) & (1\bar{2}\bar{3}) & (\bar{2}\bar{1}\bar{3}) & (\bar{1}2\bar{3}) \\
(231) & (3\bar{2}1) & (\bar{2}\bar{3}1) & (\bar{3}21) \\
(\bar{3}2\bar{1}) & (2\bar{3}\bar{1}) & (3\bar{2}\bar{1}) & (\bar{2}3\bar{1}) \\
(312) & (1\bar{3}2) & (3\bar{1}2) & (\bar{1}32) \\
(\bar{1}3\bar{2}) & (\bar{3}1\bar{2}) & (1\bar{3}\bar{2}) & (3\bar{1}\bar{2}).
\end{array}$$

Diese allgemeine Kristallform besteht aus 24 Flächen, nicht Flächenpaaren, da das Harmoniezentrum nicht vorhanden sein kann. Sie heißt Pentagon-Ikositetraeder und wird mit (34) {123} oder im allgemeinen mit (34) $\{h_1 h_2 h_3\}$ bezeichnet, vgl. Fig. 219 a, b. Zwei enantiomorphe Pentagon-Ikositetraeder, wenn sie harmonisch gelegen sind und durch eine Harmonieebene zur Deckung gelangen, bringen das Hexakisoktaeder hervor.

Fig. 219.



a

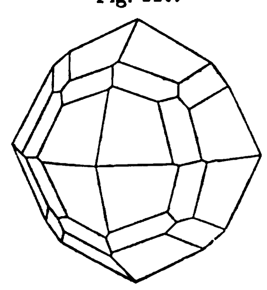


b

Ist einer der drei Indizes Null oder sind zwei Indizes untereinander gleich, so entstehen die drei schon bei den Grundgestalten behandelten Kristallformen. Die Kristallformen der II. und III. Ableitung werden daher sein:

Tetrakishexaeder	$\{h_1 h_2 0\}$
Triakisoktaeder	$\{h_1 h_1 h_3\}$ $h_1 > h_3$
Ikositetraeder	$\{h_1 h_1 h_3\}$ $h_1 < h_3$
Pentagon-Ikositetraeder . .	$\{h_1 h_2 h_3\}$.

Fig. 220.



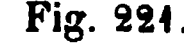
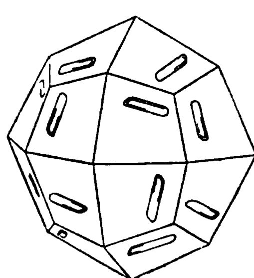


Fig. 221.



Beispiel: Chlorammonium NH^4Cl, Fig. 220, 221. In der Fig. 221 sind

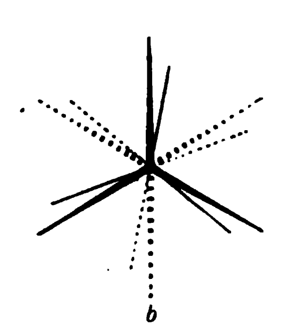
die Ätzfiguren nach G. Tschermak angegeben, welche das Fehlen der Harmonieebenen beweisen. Hierher gehören auch Chlorkalium, Chlornatrium, Chlorsilber usw.

§ 75. **Tetraedrische Hemiharmonie** = $(33)^s$.

Die Hexaederflächen dürfen, da sie diharmonisch sind, entweder holoharmonisch oder hemiharmonisch drehend sein, damit ist die Ableitung der Harmonien der Kristalle mit Hilfe der Hexaederfläche schon erledigt.

Wir wenden jetzt die Oktaederflächen als Hauptflächen an; sie können vorerst holoharmonisch sein, Fig. 222 a.

Fig. 222.



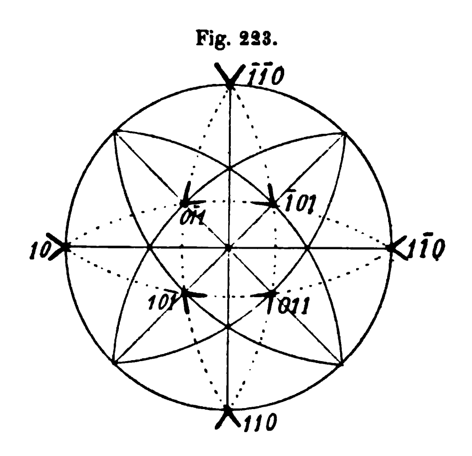
a b

Würden zwei Flächen eines Flächenpaares physikalisch gleich beschaffen sein, so würde auch bei den Kristalltrachten die Holoharmonie $(34)^s$, wie vorher, auftreten. Wir lassen also deshalb diese Harmonie unberücksichtigt.

Dagegen können zwei parallele holoharmonische Oktaederflächen physikalisch verschieden beschaffen sein.

Die Harmonieelemente, welche vorhanden sein werden, sind offenbar folgende: 4 Triharmonieachsen, 6 Harmonieebenen und somit zugleich 3 Monoharmonieachsen, die mit den diharmonischen Zonen zusammenfallen. Wir können diese Hemiharmonie hinreichend mit $(33)^s$ bezeichnen, indem mit diesem Symbol zwei triharmonische Achsen (3) und eine Harmonieebene (s) angedeutet sind, welche den zwei triharmonischen Zonen gemeinschaftlich angehören. Die Hexaederflächen erscheinen dann hemiharmonisch, Fig. 204 c, S. 150, und zwar sind die Hauptrichtungen auf diesen Flächen die Diagonalen. Die Flächen des Rhombendodekaeders werden dagegen hemimorph sein (siehe Fig. 203 d, c, S. 149), indem die Flächen {100} nicht Harmonieebenen sind, welche die Flächen {110} in den großen und kleinen Diagonalen schneiden.

Fig. 223.



In der Fig. 223 ist die tetraedrische Hemiharmonie dargestellt. Durch starke kurze Linien sind die Lichtfiguren auf den Flächen $\{110\}$ angegeben, während die Harmonieebenen durch die Pole $\{110\}$ festgestellt sind.

Aus dieser Anordnung geht hervor, daß die 4 Zonen $[111]$, $[\bar{1}11]$, $[\bar{1}\bar{1}1]$ und $[1\bar{1}1]$ hemimorph d. h. zweiwertig sein müssen. Das sieht man auch aus der Stellung der Lichtfiguren in bezug auf die punktiert gezeichneten Zonenkreise. Die Hauptformen sind folgende:

Hexaeder	$\{100\}$
Rhombendodekaeder	$\{110\}$
Tetraeder positiv . . .	$\{111\}$
Tetraeder negativ . . .	$\{1\bar{1}1\}$.

Man kann also auch aus der Ausbildung der Tetraederflächen, Fig. 224, die tetraedrische Hemiharmonie erkennen. Aber die wichtigsten Flächen, welche hier in Betracht kommen, sind diejenigen der II. und III. Ableitung.

Ist eine Fläche gegeben, z. B. (123), so werden damit auch folgende 6 Flächen inbegriffen sein:

$$(123),\quad (231),\quad (312),$$
$$(213),\quad (132),\quad (321),$$

welche an die Stelle einer Tetraederfläche treten. Und da alle 4 Tetraederflächen physikalisch gleich beschaffen sind, so folgen daraus noch die nächsten 18 Flächen:

$$(\bar{1}\bar{2}3)\quad (\bar{2}\bar{3}1)\quad (\bar{3}\bar{1}2)$$
$$(\bar{2}\bar{1}3)\quad (\bar{1}\bar{3}2)\quad (\bar{3}\bar{2}1)$$
$$(\bar{1}2\bar{3})\quad (\bar{2}3\bar{1})\quad (\bar{3}1\bar{2})$$
$$(\bar{2}1\bar{3})\quad (\bar{1}3\bar{2})\quad (\bar{3}2\bar{1})$$
$$(1\bar{2}\bar{3})\quad (2\bar{3}\bar{1})\quad (3\bar{1}\bar{2})$$
$$(2\bar{1}\bar{3})\quad (1\bar{3}\bar{2})\quad (3\bar{2}\bar{1}).$$

Fig. 224.

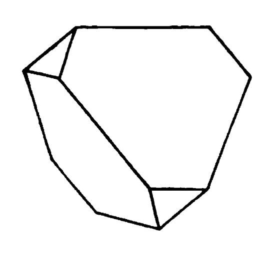
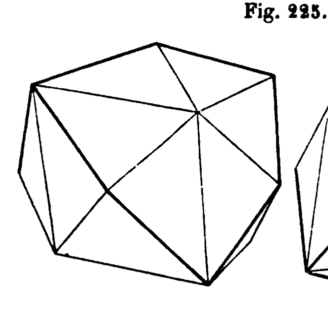
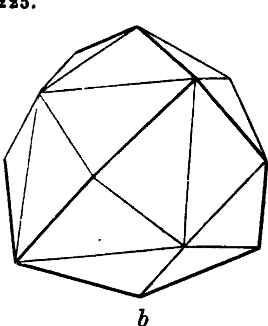


Fig. 225.





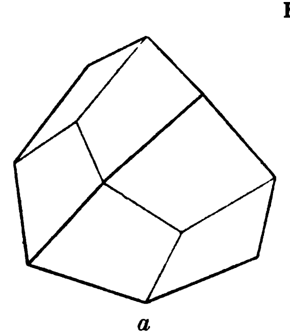
a *b*

Aus der gegebenen Fläche (123) bildet sich daher eine aus 24 Flächen bestehende Kristallform, die eine große Ähnlichkeit mit einem Tetraeder besitzt, wobei an Stelle jeder Tetraederfläche 6 Flächen erscheinen. Man nennt eine solche Kristallform **Hexakistetraeder** und bezeichnet sie mit $(33)^s\{123\}$ oder allgemein mit $(33)^s\ \{h_1 h_2 h_3\}$. Die Fig. 225 a, b stellen zwei Hexakis-

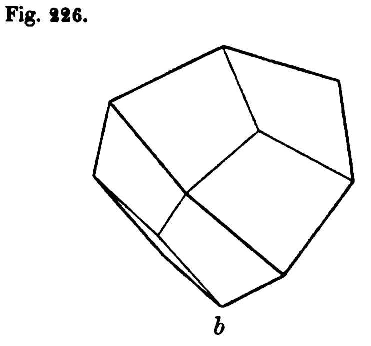
tetraeder dar, welche gegenseitig harmonische Lage haben. Werden sie übereinander gelegt, so erzeugen sie das Hexakisoktaeder der entsprechenden Grundgestalt. Wir haben also vor uns ein positives $(33)^s$ $\{123\}$ und ein negatives Hexakistetraeder $(33)^s$ $\{1\bar{2}3\}$.

Ist einer der drei Indizes Null, so entsteht das Tetrakishexaeder (S. 104).

Fig. 226.



a

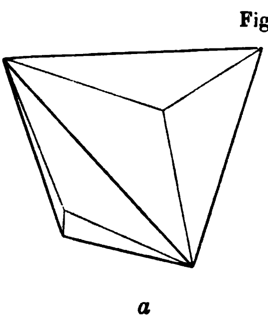


b

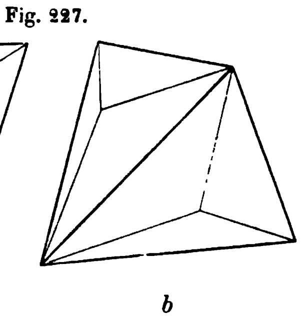
Sind zwei Indizes gleich, so gehen daraus zwei Kristallformen hervor, nämlich das Deltoiddodekaeder, Fig. 226 a, b und das Triakistetraeder Fig. 227 a, b. Die Kristallformen der II. und II. Ableitung sind also folgende:

Tetrakishexaeder	$\{h_1 h_2 0\}$	
Deltoiddodekaeder	$\{h_1 h_1 h_3\}$	$h_1 > h_3$
Triakistetraeder	$\{h_1 h_1 h_3\}$	$h_1 < h_3$.
Hexakistetraeder	$\{h_1 h_2 h_3\}$.	

Fig. 227.



a



b

Fig. 228.

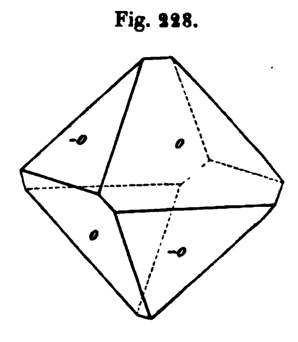


Fig. 229.

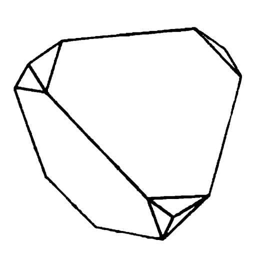
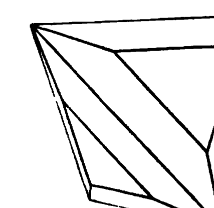


Fig. 230.



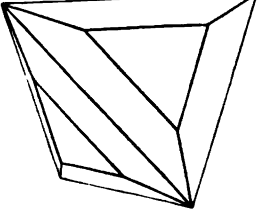


Fig. 231.

Beispiele:

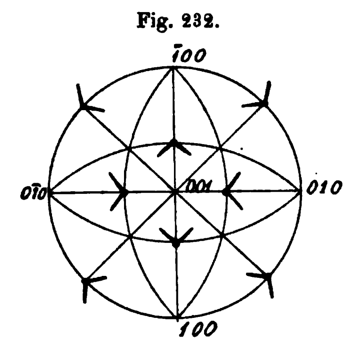
Kupferkies $CuFeS^2$, Fig. 228. Ein Tetraeder ist mit *o*, *o* ..., das negative mit —*o*, —*o* ... angedeutet.

Fahlerz $(AsSb)^2S^7(Cu^2FeZn)^4$, Fig. 229, 230, 231, wobei die in Fig. 231 angegebenen Buchstaben folgende Bedeutung haben: $t = (33^s)\{111\}$ positiv, $i = \{211\}$ positiv, $-i = \{2\bar{1}1\}$ negativ und $d = \{110\}$.

§ 76. Pentagonale Hemiharmonie = $(33)^\sigma$.

Die Flächen des Rhombendodekaeders sind hemimorph, wie die Fig. 203 c, S. 149, zeigt. Damit werden die Flächen {100} zu Harmonieebenen, nicht aber die Flächen {110}. Gleichzeitig müssen die Flächen {100} monoharmonisch ausfallen, Fig. 203 a, S. 149, resp. Fig. 214 c, S. 150, und die triharmonischen Flächen {111} hemiharmonisch, Fig. 222 b, S. 164. Diese pentagonale Hemiharmonie wird also durch folgende Harmonieelemente charakterisiert: 3 Harmonieebenen {100}, 4 Harmonieachsen {[111]}, 3 Harmonieachsen {[100]} und das Harmoniezentrum.

Fig. 232.



Wir können die pentagonale Hemiharmonie durch $(33)^\sigma$ bezeichnen, wobei zwei triharmonische Achsen (3) in den Vordergrund gestellt sind und eine Harmonieebene (σ) hinzutritt, welche nicht durch jene Richtungen geht. Diese Harmonie ist in Fig. 232 schematisch dargestellt, die Lichtfiguren auf {110} sind darin ebenfalls durch kurze starke Linien angegeben.

Aus dieser Anordnung geht hervor, daß keine der Zonen {[100]}, {[110]}, {[111]} hemimorph sein kann.

Die Hauptformen sind folgende:

Hexaeder	{100}
Oktaeder	{111}
Rhombendodekaeder	{110}.

Eine solche Harmonie wäre daher aus dieser Formenentwicklung nicht zu erkennen, wenn man von den Lichtfiguren absehen würde.

Wir gehen über zu den Formen der II. und III. Ableitung.

Ist das Flächenpaar (123) gegeben, so hängen harmonisch folgende 3 Flächenpaare zusammen:

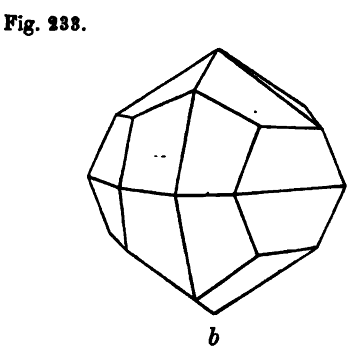
$$(123),\quad (231),\quad (312),$$

da [111] eine triharmonische Richtung ist. Nun sind aber auch {100} Harmonieebenen, somit kommen noch folgende 9 Flächenpaare hinzu:

$$\begin{matrix} 1\bar{2}3 & 2\bar{3}1 & 3\bar{1}2 \\ \bar{1}\bar{2}3 & \bar{2}\bar{3}1 & \bar{3}\bar{1}2 \\ \bar{1}23 & \bar{2}31 & \bar{3}12. \end{matrix}$$

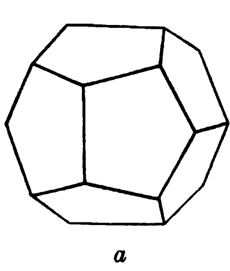
Ein solches aus 24 Flächen bestehendes Gebilde heißt Dyakisdodekaeder und wird mit $(33)^{\sigma}$ (123) resp. $(33)^{\sigma}$ (213) bezeichnet. Es gibt davon natürlich ein positives und ein negatives, Fig. 233 a, b. Wird einer der drei Indizes Null, so folgt daraus das Pentagondodekaeder $(33)^{\sigma}$ (120) resp. $(33)^{\sigma}$ (210),

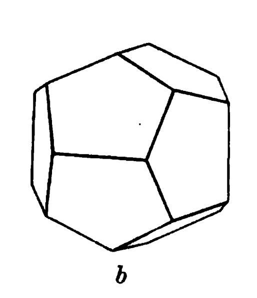
Fig. 233.



a b

Fig. 234.





a b

Fig. 234 a, b. Sind 2 der drei Indizes untereinander gleich, so entstehen das Ikositetraeder und das Triakisoktaeder. Die Kristallformen der II. und III. Ableitung sind daher folgende:

Positives Pentagondodekaeder . . .	$\{h_1 h_2 0\}$	
Negatives Pentagondodekaeder . .	$\{h_2 h_1 0\}$	
Ikositetraeder	$\{h_1 h_1 h_3\}$	$h_1 < h_3$
Triakisoktaeder	$\{h_1 h_1 h_3\}$	$h_1 > h_3$
Positives Dyakisdodekaeder . . .	$\{h_1 h_2 h_3\}$	$(33)^{\sigma}$
Negatives Dyakisdodekaeder . . .	$\{h_2 h_1 h_3\}$.	

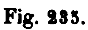


Fig. 235.

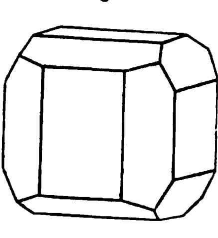
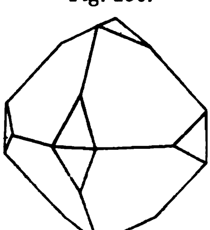




Fig. 236.



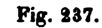
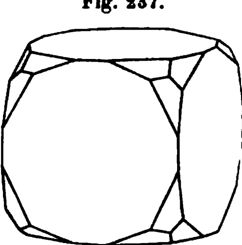


Fig. 237.



Beispiele:

Pyrit FeS^2, Fig. 235, 236, 237. Siehe J. Strüver, 1869.

Zinnjodid SnJ^4, Fig. 238 und 239.

Die Fig. 238 zeigt die Verbindung von zwei Formen, nämlich dem Oktaeder {111} und dem Pentagondodekaeder {210}. Kommen diese zwei Formen gleich stark zur Entwicklung, so entsteht die in Fig. 239 dargestellte Gestalt. Diese ist keine regelmäßige Form, denn von den 20 Dreiecken, aus welchen sie besteht, sind 8 triharmonisch {111} und die übrigen 12 monoharmonisch $(33)^{\sigma}$ {210}.

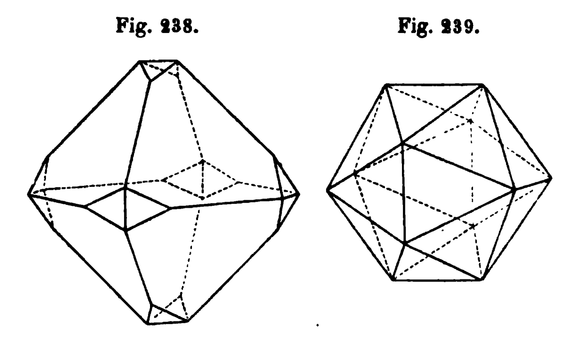


Fig. 238. Fig. 239.

§ 77. Tetraedrische Tetartoharmonie = (33).

Die Flächen des Rhombendodekaeders sind hemimorph wie in Fig. 203 e, S. 149. Dabei erscheinen die Flächen des Oktaeders hemiharmonisch und physikalisch ungleich. Es folgt daraus, daß nur vier Harmonieachsen triharmonisch und drei Harmonieachsen monoharmonisch für die Harmonie der Gestalt zurückbleiben werden. Man kann die Form einfach mit (33) bezeichnen.

Eine solche Tetartoharmonie ist in Fig. 240 abgebildet, wobei wiederum die kleinen starken Linien die Lichtfiguren in {110} angeben. Es sind vier solche Tetartoharmonien notwendig, um die Holoharmonie der Grundgestalt hervorzurufen.

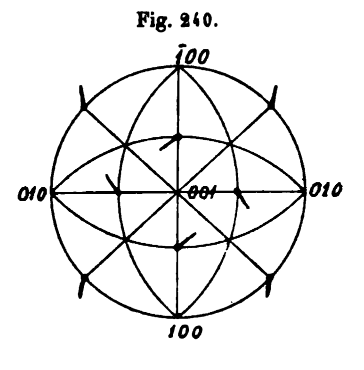


Fig. 240.

Aus dieser Anordnung geht hervor, daß die vier Zonen [111], [$\bar{1}$11], [$\bar{1}\bar{1}$1] und [1$\bar{1}$1] hemimorph, d. h. zweiwertig sein müssen.

Die Oktaederform wird also aus zwei Formen bestehen, nämlich aus einem positiven und einem negativen Tetraeder, ähnlich wie bei der tetraedrischen Hemiharmonie $(33)^s$.

Die Hauptformen werden somit wieder folgende sein:

Hexaeder	{100}
Tetraeder positiv . . .	{111}
Tetraeder negativ . . .	{1$\bar{1}$1}
Rhombendodekaeder . .	{110}.

Wir wollen nunmehr sehen, wie sich die Formen der II. und III. Ableitung hier gestalten.

Ist die Fläche (123) gegeben, so hängen folgende drei Flächen harmonisch zusammen:

(123), (231), (312).

Sie treten an Stelle einer Tetraederfläche; und da vier Tetraederflächen vorhanden sind, so haben wir noch folgende 9 Flächen zu rechnen, die mit (123) harmonisch zusammenhängen:

$$(\bar{1}\bar{2}3)\quad(\bar{2}\bar{3}1)\quad(\bar{3}\bar{1}2)$$
$$(\bar{1}2\bar{3})\quad(\bar{2}3\bar{1})\quad(\bar{3}1\bar{2})$$
$$(1\bar{2}\bar{3})\quad(2\bar{3}\bar{1})\quad(3\bar{1}\bar{2}).$$

Ein aus diesen 12 Flächen bestehendes Gebilde heißt **tetraedrisches Pentagondodekaeder**. Es werden vier solcher tetraedrische Pentagondodekaeder sein, die zusammen das Hexakisoktaeder bilden, nämlich ein positives (33) {123}, ein negatives (33) $\{2\bar{1}3\}$, und für je eines derselben ein rechtes (33) {123}, (33) $\{2\bar{1}3\}$ und ein linkes (33) {213}, (33) $\{1\bar{2}3\}$.

Fig. 241.

a b

Die Fig. 241 a gibt ein positives rechtes und Fig. 241 b ein negatives rechtes **tetraedrisches Pentagondodekaeder** wieder.

Ist einer der drei Indizes Null, so entsteht das Pentagondodekaeder und wiederum ein positives {120} und ein negatives {210}. Sind zwei Indizes untereinander gleich, so folgt entweder das **Triakistetraeder** $\{h_1 h_1 h_3\}$, wobei $h_1 < h_3$ ist, oder das **Deltoiddodekaeder** $\{h_1 h_1 h_3\}$ mit $h_1 > h_3$.

Die Kristallformen der II. und III. Ableitung sind also:

Pentagondodekaeder		rechtes (33)	$\{h_1 h_2 0\}$	
		linkes	$\{h_2 h_1 0\}$	
Triakistetraeder		positives	$\{h_1 h_1 h_3\}$	$h_1 < h_3$
		negatives	$\{h_1 h_1 h_3\}$	$h_1 < h_3$
Deltoiddodekaeder		positives	$\{h_1 h_1 h_3\}$	$h_1 > h_3$
		negatives	$\{h_1 h_1 h_3\}$	$h_1 > h_3$
Tetraedisches Pentagondodekaeder .	positiv-	linkes	$\{h_1 h_2 h_3\}$	
		rechtes	$\{h_2 h_1 h_3\}$	
	negativ-	linkes	$\{h_2 \bar{h}_1 h_3\}$	
		rechtes	$\{h_1 \bar{h}_2 h_3\}$.	

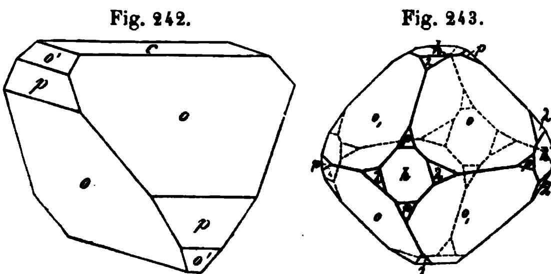


Fig. 242. Fig. 243.

Beispiele:

Weinsaures Antimonoxydkalium, nach Brooke, Fig. 242. Darin bedeuten *o*, *o*... das positive Tetraeder, *o*, *o* ... das negative, *c*{001}, *p*{110}.

Baryumnitrat $(BaNa^3)^2$, Fig. 243. Nach **A. Scacchi** und **H. Baumhauer**. Hier ist das positive Tetraeder *o* gleich mehr ausgebildet, wie das negative o_1.

II. Viergliedrige Kristalle.

§ 78. Allgemeines Merkmal.

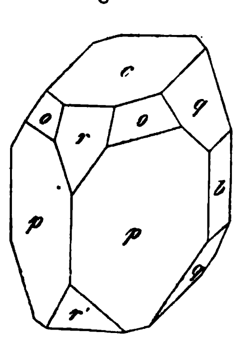
Bei diesen Kristallen ist eine diharmonische Zone oder Fläche vorherrschend. Zwei andere Hauptglieder sind monoharmonisch, und zwar herrschen entweder zwei monoharmonische Zonen vor, wenn die diharmonische Fläche vorwaltet und der Kristall tafelartig ist, oder es herrschen zwei monoharmonische Flächen vor, wenn die diharmonische Zone prädominiert und der Kristall prismatisch ist. Man bemerke, daß die monoharmonischen Hauptglieder gleiche Entwicklung in der Grundgestalt erlangen, also müssen sie auch harmonisch und physikalisch gleich beschaffen sein. Die diharmonische Zone kann natürlich holomorph oder hemimorph sein, so wie die diharmonische Fläche physikalisch gleich oder ungleich beschaffen sein kann.

§ 79. Holoharmonie = $(24)^s$.

Die drei Hauptglieder, Flächen oder Zonen, sind holoharmonisch, Fig. 204 a, S. 150, für die diharmonische Fläche, 203 a, S. 149, für die monoharmonischen Flächen. Die diharmonische Zone ist holomorph, Fig. 209 b, S. 153. Es folgt daraus, daß die diharmonische Fläche Harmonieebene sein muß und die diharmonische Zone eine Harmonieachse; durch dieselben müssen daher 2 + 2 Harmonieebenen gehen und in die diharmonische Fläche 2 + 2 Harmonieachsen fallen.

Die Holoharmonie hat also dieselbe Harmonieeigenschaft wie die entsprechende Grundgestalt, und eine Tracht der Kristalle reicht allein hin, um alle Harmonieelemente anzugeben, welche der Grundgestalt zukommen.

Fig. 244.



Die bei dieser Holoharmonie vorkommenden Kristallformen müssen dieselben sein, welche wir bei den viergliedrigen Grundgestalten kennen gelernt haben.

Wir bezeichnen diese Holoharmonie mit $(24)^s$, um anzugeben, daß eine diharmonische (4) und eine monoharmonische Achse (2) mit einer Harmonieebene (*s*) verbunden sind, um die Kristalltracht vollständig zu bestimmen.

Als Beispiel mag das schwefelsaure Eisen (Eisenvitriol) angeführt sein, Fig. 244. Nach von Zepharovich.

§ 80. Gyroedrische Hemiharmonie = (24).

Die drei Hauptglieder sind hemiharmonisch drehend, also ist die diharmonische Fläche hemiharmonisch, wie die Fig. 204 b, S. 150, angibt; und die monoharmonischen Flächen sind hemiharmonisch, wie Fig. 203 b, S. 149, zeigt. Daraus muß gefolgert werden, daß die Harmonieebenen nicht vorhanden sein können. Es bleiben daher nur eine diharmonische Achse [001] und 2 + 2 monoharmonische Achsen [100], [010], [110], [1$\bar{1}$0] übrig.

Hat man zwei solche Hemiharmonien, die sich nicht decken können, also enantiomorph sind, so erzeugen sie zusammen die frühere Holoharmonie, wenn ihre Orientierung derart ist, daß sie gegenseitig harmonisch in Bezug auf eine durch [001] und [010] gehende Harmonieebene gelegen sind. Kommt also die gyroedrische Hemiharmonie bei einem Kristall vor, so müssen zwei solche enantiomorph gleichzeitig auftreten. Ist die Grundgestalt bekannt, so genügt es, die Kristalle auf die Harmonie zweier Hauptflächen zu prüfen, um die gyroedrische Hemiharmonie festzustellen.

Mit der Bezeichnung (24) wollen wir andeuten, daß eine diharmonische Achse (4) und eine monoharmonische Achse (2) die Kristalltracht vollständig bestimmen.

Auch die Gestalt muß die gyroedrische Hemiharmonie zutage treten lassen. Zwar sind die Einheitsformen hier, wie sie bei der Holoharmonie auftreten, nämlich:

Basis	{001}
Quadratisches Prisma 1. Art .	{110}
Quadratisches Prisma 2. Art .	{100}
Quadratische Bipyramide 1. Art	{111}
Quadratische Bipyramide 2. Art	{101}.

Die Kristallformen der II. und III. Ableitung sind dagegen verschieden von denjenigen der Holoharmonie. Wir wollen sie aus einer beliebig gegebenen Fläche z. B. (123) entwickeln. Mit dieser Fläche sind zugleich auch folgende 4 gegeben:

$$(123),\quad (2\bar{1}3),\quad (\bar{1}\bar{2}3),\quad (\bar{2}13),$$

da sie harmonisch im Bezug auf die diharmonische Richtung gelegen sind.

Außerdem hängen folgende zwei Flächen harmonisch zusammen:

$$(123),\quad (21\bar{3}),$$

da [110] monoharmonische Richtung ist.

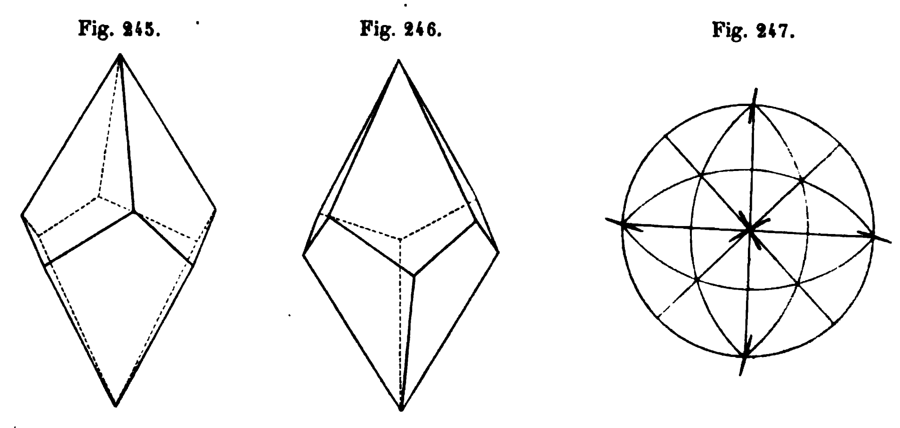


Fig. 245. Fig. 246. Fig. 247.

Wenn man also die diharmonische Richtung [001] noch einmal berücksichtigt, so erhalten wir folgende 4 zusammenhängende Flächen:

$$(21\bar{3}),\quad (1\bar{2}\bar{3}),\quad (\bar{2}\bar{1}\bar{3}),\quad (\bar{1}2\bar{3}).$$

Diese allgemeine aus 8 Flächen bestehende Kristallform heißt Trapezoeder, Fig. 215, 216 und daher nennt man die hier behandelte Hemiharmonie auch trapezoedrische. Das Trapezoeder wird mit (21) {123} resp. (21) {213} bezeichnet. In der Fig. 217 ist die trapezoedrische Hemiharmonie angegeben, wobei die kleinen stark gezogenenen Linien die Lichtfiguren auf den Flächen (001), (100) und (010) andeuten.

Fig. 218.

Ist einer der drei Indizes Null, so folgen aus dem Trapezoeder spezielle Kristallformen; nämlich, wenn der dritte Index Null ist, ein quadratisches Prisma 3. Art genannt. Zwei quadratische Prismen 3. Art, also (21) {120} und (21) {210}, ergänzen sich zu einem biquadratischen Prisma. Ist dagegen einer der zwei ersten Indizes Null, so entsteht eine quadratische Bipyramide der 2. Art. Sind endlich die zwei Indizes untereinander gleich, so erhalten wir eine quadratische Bipyramide der 1. Art.

Also werden die Kristallformen der II. und III. Ableitung folgende sein:

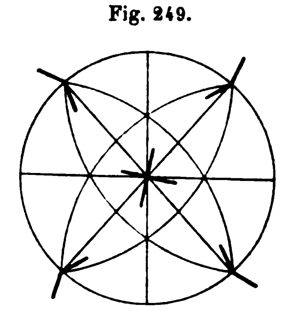
Quadratisches Prisma der 3. Art . $\{h_1 h_2 0\}$
Quadratische Bipyramide der 2. Art $\{h_1 0 h_3\}$
Quadratische Bipyramide der 1. Art $\{h_1 h_1 h_3\}$
Trapezoeder . . . . $\{h_1 h_2 h_3\}$.

Beispiel: Schwefelsaures Strychnin, Fig. 218, sie zeigt, nach Des Cloizeaux, die Ätzfiguren auf (001) einerseits nach rechts (b), anderseits nach links (a) gedreht.

§ 81. Pyramidale Hemiharmonie = $(01)^\sigma$.

Die diharmonische Fläche (001) ist hemiharmonisch drehend, siehe Fig. 184b, und die vier monoharmonischen Flächen sind hemimorph, wobei die hemimorphe Richtung parallel der Fläche (001) geht, Fig. 213d. Also ist die diharmonische Zone [001] holomorph. Daraus folgt, daß (001) eine Harmonieebene darstellt, während die Richtung [001] eine Diharmonieachse ist. Da die diharmonische Fläche (001) hemiharmonisch drehend erscheint, so wird es eine linke und eine rechte pyramidale Hemiharmonie geben. Durch Zusammentreten von beiden entsteht die Holoharmonie. Mit der Bezeichnung $(01)^\sigma$ will man andeuten, daß eine Harmonierichtung diharmonisch (1) und eine Harmonieebene (σ) vorhanden sind, welche letztere nicht durch die erstere geht. In der Fig. 219 ist die pyramidale Hemiharmonie schematisch

Fig. 219.



dargestellt; die kurzen stark gezogenen Linien des Bildes geben die Lichtfiguren auf (001), (010) und (100) an..

Nicht nur aus den Lichtfiguren, sondern auch aus den Kristallformen wird diese Hemiharmonie bestimmt. Die Einheitsformen sind folgende:

Basis	(001)
Quadratisches Prisma 1. Art .	{110}
Quadratisches Prisma 2. Art .	{100}
Quadratische Bipyramide 1. Art	{111}
Quadratische Bipyramide 2. Art	{101}.

Für die Kristallformen der II. und III. Ableitung gehen wir von irgend welcher Fläche z. B. (123) aus. Mit derselben sind folgende 4 Flächen harmonisch gegeben:

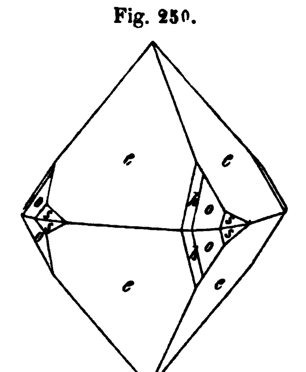
$$(123),\quad (2\bar{1}3),\quad (\bar{1}\bar{2}3),\quad (\bar{2}13).$$

Und da die Fläche (001) eine Harmonieebene ist, so hängen damit noch folgende 4 Flächen harmonisch zusammen:

$$(12\bar{3}),\quad (2\bar{1}\bar{3}),\quad (\bar{1}\bar{2}\bar{3}),\quad (\bar{2}1\bar{3}).$$

Es entsteht ein allgemeines Gebilde, zusammengesetzt aus 4 Flächenpaaren, bei welchem das Harmoniezentrum vorhanden ist. Man nennt diese Kristallform eine quadratische Bipyramide der 3. Art. Ist der dritte Index Null, so wird die Kristallform ein quadratisches Prisma der 3. Art. Die Formen der II. und III. Ableitung sind daher folgende:

Fig. 250.



Quadratisches Prisma der 3. Art .	$(h_1 h_2 0)$
Quadratische Bipyramide der 1. Art	$(h_1 h_1 h_3)$
Quadratische Bipyramide der 2. Art	$(h_1 0 h_3)$
Quadratische Bipyramide der 3. Art	$(h_1 h_2 h_3)$.

Beispiel. Scheelit $CaWO^4$, siehe Fig. 250, wobei $e\{101\}$, $o\{111\}$, $h\{313\}$, $s\{131\}$, nach Dauber, bedeuten.

§ 82. Sphenoidische Hemiharmonie = $(42)^s$.

Die diharmonische Fläche (001) ist zwar holoharmonisch, aber ihre Holoharmonie entsteht durch Ergänzung von beiden Seiten, die jede für sich monoharmonisch ist, siehe Fig. 204c, S. 150. Man sieht, daß zwei Harmonieebenen vorhanden sein müssen, welche die Lichtfiguren auf (001) harmonisch teilen; sie fallen mit (100) und (010) zusammen. Die Zone [001] bleibt zwar diharmonisch, aber ihre Achse ist eine monoharmonische Harmonieachse. Außerdem treten noch zwei Monoharmonieachsen derselben Art auf, die mit [110] und [1$\bar{1}$0] zusammenfallen. Die Zone [001] ist offenbar holomorph. Es müssen bei einem Kristall stets zwei solche Hemiharmonien auftreten, wenn sie die Holoharmonie der Grundgestalt hervorrufen sollen.

Mit der Bezeichnung $(42)^s$ will man sagen, daß eine diharmonische Achse (4) zwar vorhanden ist, aber ihre Richtung monoharmonisch (2) wirkt, und daß durch dieselbe die Harmonieebene (*s*) geht.

Die Fig. 251 zeigt die sphenoidische Hemiharmonie in schematischer Darstellung; die kurzen stark ausgezogenen Linien deuten die Lichtfiguren auf (001) und $(00\bar{1})$, und auf (100) und (010) an. Jede Fläche (100) und (010) ist hemimorph, aber der Sinn des Hemimorphismus ist abwechselnd für beide Flächenpaare (100) und (010).

Diese Hemiharmonie wird auch aus den Kristallformen zu erkennen sein. Die Einheitsformen sind folgende:

Basis	{001}
Quadratisches Prisma 1. Art . .	{110}
Quadratisches Prisma 2. Art . .	{100}
Sphenoid 2. Art positives . .	{101}
Sphenoid 2. Art negatives . .	{011}
Quadratische Bipyramide 1. Art .	{111}.

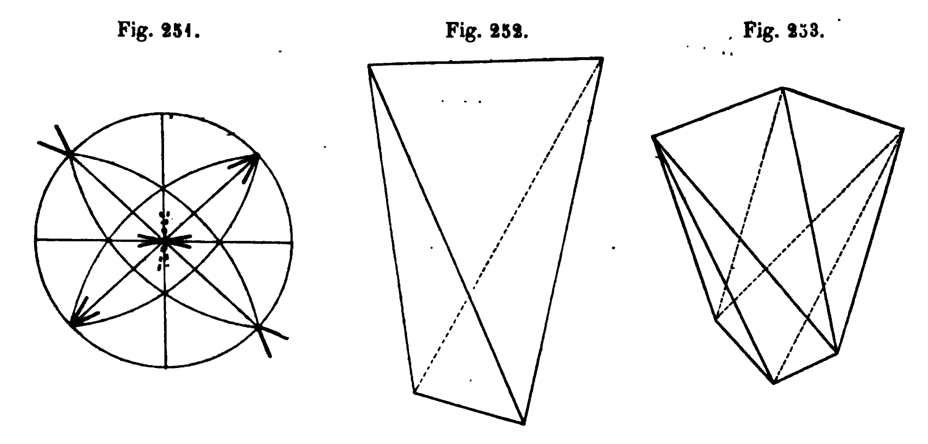


Fig. 251. Fig. 252. Fig. 253.

Fig. 252 gibt das Sphenoid wieder. Um auch die Kristallformen der II. und III. Ableitung zu entwickeln, geht man von einer Fläche z. B. wieder von (123) aus. Damit sind harmonisch verbunden die 4 Flächen:

$$(123),\ (1\bar{2}3),\ (\bar{1}\bar{2}3),\ \bar{1}23),$$

da die Richtung [001] monoharmonisch ist und durch dieselbe 2 Harmonieebenen gehen. Andererseits folgen noch die 4 Flächen:

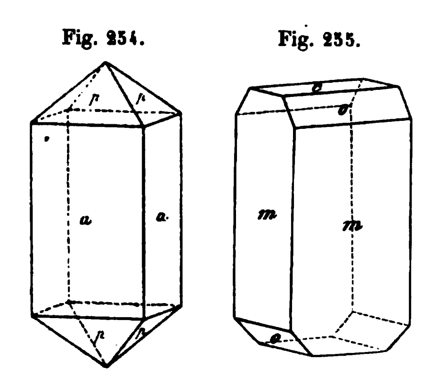
$$(21\bar{3}),\ (2\bar{1}\bar{3}),\ (\bar{1}\bar{2}3),\ (\bar{2}13).$$

Die aus diesen 8 Flächen gebildete allgemeine Kristallform heißt Skalenoeder, vgl. Fig. 253. Es gibt natürlich ein positives und ein negatives Skalenoeder; letzteres ist aus den folgenden 8 Flächen gebildet:

$$(213),\ (2\bar{1}3),\ (\bar{2}\bar{1}3),\ (\bar{2}13),$$
$$(12\bar{3}),\ (1\bar{2}\bar{3}),\ (\bar{1}\bar{2}\bar{3}),\ (\bar{1}2\bar{3}).$$

Sind beide Skalenoeder diharmonisch gelegen, so bringen sie die biquadratische Bipyramide hervor. Ist der dritte Index Null, so entsteht ein biquadratisches Prisma. Ist einer der zwei ersten Indizes Null, so hat man das Sphenoid 2. Art; und sind endlich beide ersten Indizes gleich, so folgt die quadratische Bipyramide 1. Art. Somit sind die Kristallformen der II. und III. Ableitung folgende:

Fig. 254. Fig. 255.



Sphenoid 2. Art positives $(42)^s$ $\{h_1\,0\,h_3\}$
Sphenoid 2. Art negatives $(42)^s$ $\{0\,h_1\,h_3\}$
Quadratische Bipyramide 2. Art $\{h_1\,h_1\,h_3\}$
Biquadratisches Prisma . . $\{h_1\,h_2\,0\}$
Skalenoeder . . . . . . $\{h_1\,h_2\,h_3\}$.

Beispiele:

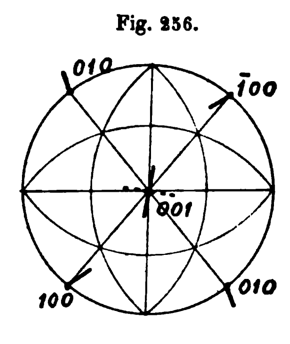
Saures Kaliumphosphat KH^2PO^4, Fig. 254, nach Mitscherlich.

Harnstoff CH^4N^2O, Fig. 255, nach Schabus und P. v. Groth, wobei $a\{110\}$, $p\{111\}$, $mm\{100\}$, $v\{101\}$, $c\{001\}$ bedeuten.

§ 83. Sphenoidische Tetartoharmonie = (42).

Die Hauptmerkmale bleiben hier dieselben wie bei der vorigen Hemiharmonie. Nur wird die diharmonische Fläche (001) nicht nur beiderseits abwechselnd monoharmonisch, sondern auch hemiharmonisch drehend, nach der Fig. 204 d, S. 150, und die monoharmonischen Flächen (100) und (010) werden tetartoharmonisch nach der Fig. 203 e, S. 149. Die Bezeichnung (42) spricht das vollständig aus, denn das einzige Harmonieelement ist eine Harmonieachse, welche monoharmonisch (2) und einwertig ist, daher ihre entsprechende Zone diharmonisch (4) erscheint. Die Fig. 256 zeigt die sphenoidische Tetartoharmonie in schematischer Darstellung, die kurzen stark ausgezogenen Linien deuten die Lichtfiguren auf (001), (00$\bar{1}$), (100) und (010) an.

Fig. 256.



Diese Tetartoharmonie wird auch aus den Kristallgestalten zu erkennen sein, deren Einheitsformen sind:

Basis . . . . (001)
Quadratisches Prisma 1. Art . . . {110}
Quadratisches Prisma 2. Art . . . {100}
Sphenoid 1. Art positives . . . {111}
Sphenoid 1. Art negatives . . . {1$\bar{1}$1}
Sphenoid 2. Art positives . . . {101}
Sphenoid 2. Art negatives . . . {011}.

Für die Entwicklung der Kristallformen der II. und III. Ableitung kann man wieder von einer Fläche z. B. (123) ausgehen. Mit dieser Fläche sind folgende gegeben:

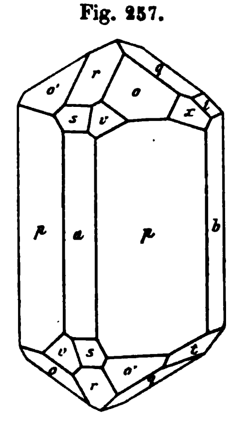
$$(123),\ (\bar{1}\bar{2}3),$$

da die Richtung [001] monoharmonisch ist; da sie aber auch einwertig ist, so folgen noch die Flächen:

$$(2\bar{1}\bar{3})\ \text{und}\ (\bar{2}1\bar{3}).$$

Diese 4 Flächen bilden ebenfalls ein Sphenoid und zwar der 3. Art. Aus 4 solchen harmonisch gelegenen Sphenoiden entsteht eine biquadratische Bipyramide. Ist der dritte Index Null, so erscheint das quadratische Prisma der 3. Art. Wenn einer der zwei ersten Indizes Null ist, so erhalten wir ein Sphenoid 2. Art, und sind endlich die zwei ersten Indizes untereinander gleich, so folgt das Sphenoid der 1. Art. Wir haben also als Kristallformen der II. und III. Ableitung folgende Gebilde:

Fig. 257.



Quadratische Prismen der 3. Art rechte		$\{h_1 h_2 0\}$
Quadratische Prismen der 3. Art linke		$\{h_2 h_1 0\}$
Sphenoide der 1. Art positive		$\{h_1 h_1 h_3\}$
Sphenoide der 1. Art negative		$\{h_1 \bar{h}_1 h_3\}$
Sphenoide der 2. Art positive		$\{h_1 0 h_3\}$
phenoide der 2. Art negative		$\{0 h_1 h_3\}$
Sphenoide der 3. Art positive	rechte	$\{h_1 h_2 h_3\}$
	linke	$\{h_2 h_1 h_3\}$
Sphenoide der 3. Art negative	rechte	$\{h_1 \bar{h}_2 h_3\}$
	linke	$\{h_2 \bar{h}_1 h_3\}$.

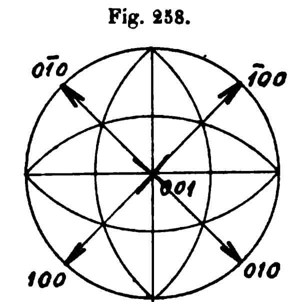
Beispiel: Schwefelsaures Magnesium $MgSO^4, 7H^2O$, Fig. 257, wobei $ab\{100\}$, $pp\{110\}$, r und $q\{101\}$ und $\{110\}$, $o\{111\}$, $o'\{1\bar{1}1\}$, s und $t\{201\}$ und $\{021\}$, $v\{211\}$, $x\{121\}$, nach A. Brooke, bedeuten.

§ 84. Hemimorphe Hemiharmonie $= (04)^s$.

Diese Harmonie ist insofern hemimorph, als eine Richtung und zwar [001] hemimorph, d. h. zweiwertig erscheint. Man gelangt dazu, indem man der Fläche (001) zwei physikalische Werte gibt, nämlich den ersten auf der einen Seite und den zweiten auf der anderen Seite derselben. Hemimorph sind auch die monoharmonischen Flächen (100) und (010) nach Fig. 203 c, S. 149. Dagegen bleibt die diharmonische Fläche (001) holoharmonisch nach der Fig. 204 a, S. 150.

Mit dem Symbol $(04)^s$ will man das Vorhandensein einer diharmonischen Achse [001] (4), durch welche die Harmonieebene (s) geht, bezeichnen. Es sind natürlich 2 + 2 Harmonieebenen vorhanden, nämlich (100), (010), (110) und ($1\bar{1}0$).

Fig. 258.



In der Fig. 258 ist diese Hemiharmonie schematisch dargestellt, wobei wiederum die Lichtfiguren auf (001), (100) und (010) durch kurze stark ausgezogene Linien dargestellt sind.

Diese Hemimorphie wird sich nicht nur aus den Lichtfiguren, sondern auch aus den Kristallformen ergeben.

Man nennt nun die einzige Fläche (001) nicht mehr Basis, sondern, nach Groth, Pedion.

Die Einheitsformen sind folgende:

Pedion positives	(001)
Pedion negatives	(00$\bar{1}$)
Quadratisches Prisma 1. Art	{110}
Quadratisches Prisma 2. Art	{100}
Quadratische Pyramide 1. Art positive	{111}
Quadratische Pyramide 1. Art negative	{$\bar{1}\bar{1}\bar{1}$}
Quadratische Pyramide 2. Art positive	{101}
Quadratische Pyramide 2. Art negative	{$\bar{1}$0$\bar{1}$}.

Die zwei Pedion sind zwar holoharmonisch, aber physikalisch grundverschieden beschaffen. Das eine ist glatt oder gibt eine deutliche radiale Lichtfigur, das andere ist matt und zeigt eine verschwommene Lichtfigur. Auf der letzteren kann aber durch besondere Ätzung eine deutlichere Lichtfigur erzeugt werden.

Die Kristallformen der II. und III. Ableitung können aus irgend welcher Fläche z. B. (123) entwickelt werden.

Mit der Fläche (123) sind offenbar die 8 Flächen gegeben:

(123), (213), ($\bar{1}$23), ($\bar{2}$13), ($\bar{1}\bar{2}$3), ($\bar{2}\bar{1}$3), (1$\bar{2}$3), (2$\bar{1}$3).

Sie bilden eine biquadratische Pyramide. Ist der dritte Index Null, so entsteht das biquadratische Prisma. Sind beide ersten Indizes untereinander gleich, so folgt die quadratische Pyramide 1. Art, und ist einer der zwei ersten Indizes Null, so bekommen wir die quadratische Pyramide 2. Art, siehe Fig. 259.

Die Kristallformen der II. und III. Ableitung sind also folgende:

Biquadratische Prismen	$\{h_1 h_2 0\}$
Quadratische Pyramiden 1. Art positive	$\{h_1 h_1 h_3\}$
Quadratische Pyramiden 1. Art negative	$\{h_1 h_1 \bar{h}_3\}$
Quadratische Pyramiden 2. Art positive	$\{h_1 0 h_3\}$
Quadratische Pyramiden 2. Art negative	$\{h_1 0 \bar{h}_3\}$
Biquadratische Pyramiden positive	$\{h_1 h_2 h_3\}$
Biquadratische Pyramiden negative	$\{h_1 h_2 \bar{h}_3\}$.

Beispiele:

Tetrathionsaures Kalium: $K^2S^4O^6$, siehe Fig. 260, wobei *vm* {110}, *a* {100}, *c* (001), *qq* {011}, *op* {11$\bar{1}$}, *v* {1$\bar{3}\bar{3}$} bedeuten.

Kieselzinkerz: $Zn^2(OH)^2SO^3$, siehe Fig. 261, nach A. Schrauf. Hier ist $c\,(001)$, $ab\,\{100\}$, $p\,\{110\}$, $r'q'\,\{301\}$, $rq\,\{101\}$, $o\,\{12\bar{1}\}$.

Fig. 259.

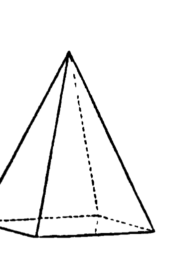


Fig. 260.

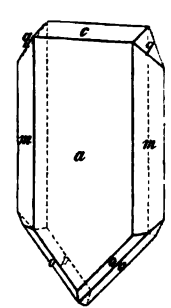


Fig. 261.

§ 85. Hemimorphe Tetartoharmonie = (04).

Auch hier wie in der vorigen Hemiharmonie ist die Richtung [001] hemimorph; folglich sind auch hier die zwei Flächen (001) und (00$\bar{1}$) physikalisch verschieden und die Flächenpaare (100) und (010) hemimorph wie in der Fig. 203 c, S. 149, angegeben ist.

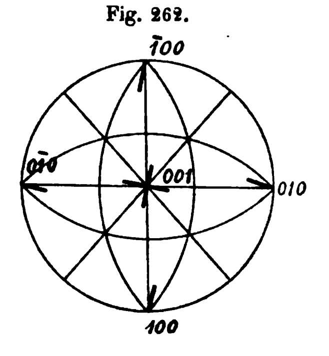
Bei der vorliegenden Harmonie tritt der Fall ein, daß die Fläche (001) hemiharmonisch drehend erscheint, siehe Fig. 204 b, S. 150, folglich besitzt diese Tetartoharmonie kein anderes Harmonieelement als die diharmonische Achse [001].

Mit dem Symbol (04) will man sagen, daß eben nur dieses eine Harmonieelement (4) vorhanden ist.

Fig. 262 zeigt diese Tetartoharmonie in schematischer Darstellung, die Lichtfiguren auf den Flächen (001), (100) und (010) sind durch kurze stark ausgezogene Linien angedeutet.

Diese Tetartoharmonie wird sich nicht nur aus den Lichtfiguren, sondern wie bei den andern Harmonien auch aus den Kristallformen ergeben.

Fig. 262.



Die Einheitsformen sind folgende:

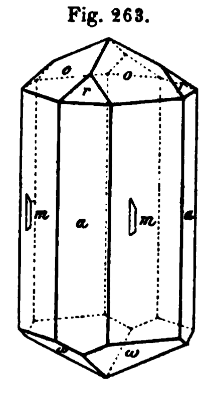
Pedion	positives	(001)
	negatives	(00$\bar{1}$)
Quadratisches Prisma 1. Art		{110}
Quadratisches Prisma 2. Art		{100}
Quadratische Pyramide 1. Art	positive	{111}
	negative	{$\bar{1}\bar{1}\bar{1}$}
Quadratische Pyramide 2. Art	positve	{101}
	negative	{$\bar{1}\bar{1}0$}.

Die Kristallformen der II. und III. Ableitung entwickeln sich aus irgend welcher allgemeinen Fläche z. B. (123).

Mit der Fläche (123) sind harmonisch zusammenhängend:

$$(123),\ (2\bar{1}3),\ (\bar{1}\bar{2}3),\ (\bar{2}13).$$

Fig. 263.



Sie bilden eine quadratische Pyramide der 3. Art. Zwei quadratische Pyramiden der 3. Art setzen zusammen die biquadratische Pyramide. Und zwei der letzteren bilden die biquadratische Bipyramide, welche zur viergliedrigen Grundgestalt gehört. Wir werden daher hier mit vier quadratischen Pyramiden der 3. Art zu tun haben, nämlich mit einer positiven und einer negativen, und je mit einer rechten und einer linken Pyramide. Diese geht in eine Pyramide der 1. Art über, wenn die zwei ersten Indizes untereinander gleich sind, und in eine Pyramide der 2. Art, wenn einer der ersten zwei Indizes Null ist. Wird der dritte Index Null, so entsteht das quadratische Prisma der 3. Art.

Die Kristallformen der II. und III. Ableitung sind somit folgende:

Quadratische Prismen 3. Art	rechte		$\{h_1 h_2 0\}$
	linke		$\{h_2 h_1 0\}$
Quadratische Pyramiden 1. Art	positive		$\{h_1 h_1 h_3\}$
	negative		$\{h_1 h_2 \bar{h}_3\}$
Quadratische Pyramiden 2. Art	positive		$\{h_1 0\ h_3\}$
	negative		$\{h_1 0\ \bar{h}_3\}$
Quadratische Pyramiden 3. Art	rechte	positive	$\{h_1 h_2 h_3\}$
		negative	$\{h_1 h_2 \bar{h}_3\}$
	linke	positive	$\{h_2 h_1 h_3\}$
		negative	$\{h_2 h_1 \bar{h}_3\}$.

Beispiel: Rechtsweinsaures Antimonyl-Baryum, Fig. 263; es ist $a\{100\}$, $m\{100\}$, $o\{111\}$, $w\{\bar{1}\bar{1}\bar{1}\}$, $r\{201\}$. Auf den Flächen *m* sind, nach H. Traube, Ätzfiguren zu sehen, welche auf die Tetartoharmonie hindeuten.

III. Dreigliedrige Kristalle.

§ 86. Allgemeines Merkmal.

Die dreigliedrigen Kristalle zeichnen sich aus durch das Vorherrschen von entweder einer triharmonischen Zone oder einer triharmonischen Fläche und dadurch, daß alle Kristallformen aus 3 oder 3 × 2 Flächenpaaren bestehen. Die dreigliedrigen Kristalle können tafelartig oder prismatisch sein, jenachdem die triharmonische Fläche oder Zone vorherrscht.

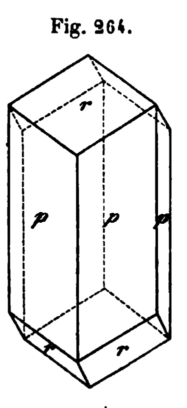
§ 87. Holoharmonie $= (63)^s$.

Sowohl die triharmonische Zone, Fig. 210 a, S. 154, als auch die triharmonische Fläche ist holoharmonisch, siehe Fig. 205 a, S. 150. Daraus folgt, daß die

triharmonische Zone eine Harmonieachse angibt, und daß durch dieselbe 3 Harmonieebenen gehen. Werden letztere mit $(1\bar{1}0)$, $10\bar{1})$ und $(01\bar{1})$ bezeichnet, so sind die Richtungen $[\bar{2}11]$, $[1\bar{2}1]$ und $[11\bar{2}]$ Harmonieachsen und zwar monoharmonische; nun folgt weiter, daß das Harmoniezentrum vorhanden sein muß.

Wir haben bei dieser Harmonie genau dieselben Eigenschaften wie bei der entsprechenden Grundgestalt, § 52. Also reicht die Holoharmonie vollständig hin, um alle Harmonieelemente und alle Kristallformen zu bestimmen, welche der entsprechenden Grundgestalt zukommen. Mit der Bezeichnung $(63)^s$ wollen wir andeuten, daß eine triharmonische Richtung (3) vorhanden und daß diese einwertig ist infolge des Harmoniezentrums. Diese letzte Eigenschaft ist durch den Index (6) ausgesprochen, da, wenn die triharmonische Richtung nach beiden Sinnen gerechnet wird, man 6 Mal jede Fläche harmonisch bekommt. Ferner ist in dem Symbol angedeutet, daß durch die triharmonische Richtung die Harmonieebene (*s*) geht.

Fig. 264.



Als Beispiel mag das Hydrochinon, $C^6H^6O^2$, angeführt werden, Fig. 264, nach P. v. Groth; dort bedeuten *pp* $\{10\bar{1}\}$ und *r* $\{110\}$.

§ 88. Rhomboedrische Hemiharmonie = (63).

Diese Hemiharmonie entsteht aus der vorigen Holoharmonie dadurch, daß die triharmonische Fläche hermiharmonisch wird, nach Fig. 205 b, S. 150. Daraus ergibt sich die Bezeichnung (63), indem die Harmonieebene (*s*) ausbleibt.

Zwei rhomboedrische Hemiharmonien bringen, wenn sie in bezug auf eine der triharmonischen Zone angehörende Harmonieebene gegenseitig eine harmonische Lage haben, die frühere Holoharmonie hervor. Zwei solche Hemiharmonien müssen bei einem Kristall vorkommen, wenn daraus die Grundgestalt hervorgehen soll.

Fig. 265.

In der Fig. 265 ist diese Hemiharmonie schematisch dargestellt, die Lichtfiguren auf (110), (101) und (011), (111) und $(1\bar{1}0)$, $(\bar{1}01)$, $(01\bar{1})$ sind wieder mit kurzen stark ausgezogenen Linien markiert.

Auch die Gestalt wird die rhomboedrische Harmonie zutage treten lassen.

Die Einheitsformen bleiben zwar dieselben wie bei der vorigen Holoharmonie, nämlich:

Basis	$\{111\}$
Rhomboeder 1. Art . . .	$\{110\}$
Rhomboeder 2. Art . . .	$\{100\}$
Spitzes Rhomboeder 1. Art	$\{11\bar{1}\}$
Hexagonales Prisma 2. Art	$\{1\bar{1}0\}$.

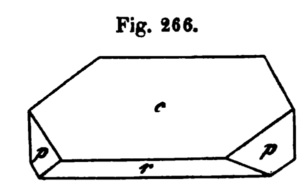
Die Kristallformen der II. und III. Ableitung lassen sich aus irgend welcher allgemeinen Fläche entwickeln. Z. B. mit der Fläche (123) sind zugleich auch die Flächenpaare gegeben:

(123), (231) (312),

da die Richtung [111] triharmonisch und das Harmoniezentrum vorhanden ist.

Eine aus diesen 3 Flächenpaaren gebildete Kristallform heißt **Rhomboeder der 3. Art**, {123}. Ist die Summe der 3 Indizes Null, also $h_1 + h_2 + h_3 = 0$, so entsteht das **hexagonale Prisma der 3. Art**. Erhält das Symbol einer Fläche die Form $(h_1 h_2 h_2)$, wobei h_1 und h_2 positiv sind, so entstehen stumpfe Rhomboeder und zwar der 1. Art, wenn $h_1 < h_2$ und der 2. Art, wenn $h_1 > h_2$ ist. Spitze Rhomboeder werden gebildet, falls h_1 und h_2 verschiedene Zeichen haben. Ist ferner $2h_2 + h_1 > 0$, so ist das Rhomboeder von der 1. Art, und für $2h_2 + h_1 < 0$ wird das Rhomboeder von der 2. Art.

Fig. 266.



Bei der rhomboedrischen Hemiharmonie treten also folgende Kristallformen der II. und III. Ableitung auf:

Stumpfe Rhomboeder $\{h_1 h_2 h_2\}$
der 1. Art für $h_1 < h_2$ und der 2. Art für $h_1 > h_2$
Spitze Rhomboeder $\{\bar{h}_1 h_2 h_2\}$
der 1. Art für $2h_2 + h_1 > 0$ und der 2. Art für $2h_2 + h_1 < 0$

Rhomboeder der 3. Art $\begin{cases}\text{rechte} \quad . \ \{h_1 h_2 h_3\} \\ \text{linke} \quad . \ \{h_2 h_1 h_3\}\end{cases}$ $h_1 + h_2 + h_3 \gtreqless 0$

Hexagonales Prisma 1. Art $\{1\bar{2}1\}$

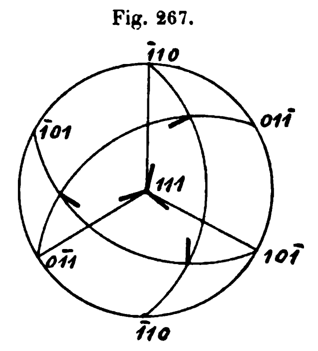
Hexagonale Prismen 3. Art $\begin{cases}\text{rechte} \quad . \ \{h_1 h_2 h_3\} \\ \text{linke} \quad . \ \{h_2 h_1 h_3\}\end{cases}$ $h_1 + h_2 + h_3 = 0$.

Beispiel: Naphtalin ($C^{10}H^8$), nach P. v. Groth, siehe Fig. 266, hier bedeuten c {111}, rpp {110}.

§ 89. Gyroedrische Hemiharmonie = (23).

Ist das Harmoniezentrum bei der Holoharmonie (63)^s nicht vorhanden, so entsteht die gyroedrische Hemiharmonie. Sie wird durch die triharmonische hemiharmonisch drehende Fläche (111), nach Fig. 206 d, S. 151, und die monoharmonische auch drehende Fläche (1$\bar{1}$0), nach Fig. 203 b, S. 149, hervorgebracht. Daher werden eine triharmonische Achse [111] und drei monoharmonische Achsen {[1$\bar{1}$0]} vorhanden sein. Die Bezeichnung (23) findet dadurch ihre Berechtigung.

Fig. 267.



Die Fig. 267 gibt in stereographischer Projektion eine schematische Darstellung der Lichtbilder auf (111), {110} und {1$\bar{1}$0}.

Die Einheitsformen werden sein:

Basis	{111}
Hexagonales Prisma 2. Art	{1$\bar{1}$0}
Rhomboeder 1. Art . . .	{110}
Rhomboeder 2. Art . . .	{100}
Spitzes Rhomboeder 1. Art	{11$\bar{1}$}.

Um die Kristallformen der II. und III. Ableitung zu bestimmen, gehen wir z. B. wieder von der Fläche (123) aus. Damit sind, da die Achse [111] triharmonisch ist, vorerst folgende Flächen gegeben:

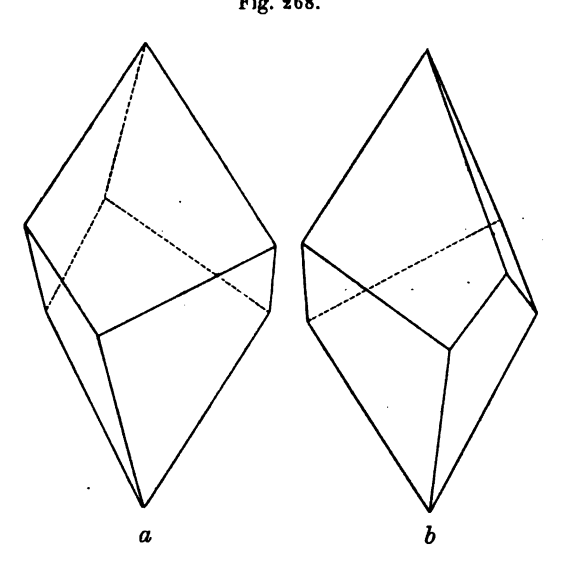
(123), (231), (312).

Ferner sind noch die monoharmonischen Achsen [1$\bar{1}$0], [$\bar{1}$01] und [01$\bar{1}$] vorhanden, daher mit den vorigen 3 noch folgende 3 Flächen harmonisch zusammenhängend:

($\bar{1}\bar{3}\bar{2}$), ($\bar{3}\bar{2}\bar{1}$), ($\bar{2}\bar{1}\bar{3}$).

Die 6 Flächen bilden das Trapezoeder links- und rechtsdrehend, wie es in Fig. 268 a, b abgebildet ist.

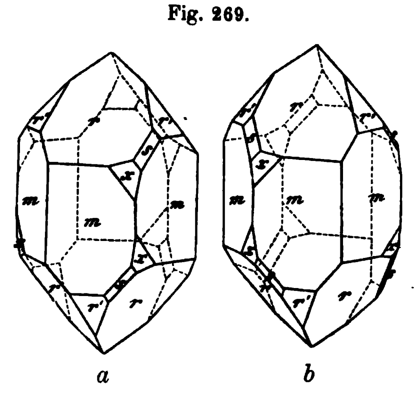
Fig. 268.



Aus diesem Trapezoeder lassen sich alle Kristallformen der II. und III. Ableitung leicht entwickeln. Es sind folgende:

Trigonale Prismen {1$\bar{2}$1} resp. {$\bar{1}$2$\bar{1}$}
Ditrigonale Prismen $\{h_1 h_2 h_3\} h_1 + h_2 + h_3 = 0$
Rhomboeder 1. Art $\{h_1 h_2 h_2\}$ $\{\bar{h}_1 h_2 h_2\}$
stumpfe $h_1 < h_2$,
spitze $2h_2 + h_1 > 0$
Rhomboeder 2. Art $\{h_1 h_2 h_2\}$ $\{\bar{h}_1 h_2 h_2\}$
stumpfe $h_1 > h_2$,
spitze $2h_2 + h_1 < 0$
Trapezoeder rechte $\{h_1 h_2 h_3\}$, linke $\{h_2 h_1 h_3\}$.

Fig. 269.



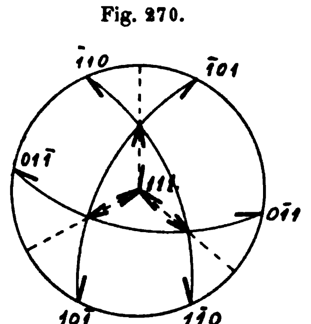
Beispiel: Quarz (SiO^2), Fig. 269 ab, wobei r\{110\}, r'\{113\}, m\{11$\bar{2}$\}, s\{14$\bar{1}$\}, x\{23$\bar{3}$\} links und resp. rechts bedeuten.

Die drehenden Lichtfiguren, welche durch künstliche Ätzung auf r\{110\} des Quarzes hervorgebracht wurden, sind schon in Fig. 201 a, b, S. 146, gegeben.

§ 90. Hemimorphe Hemiharmonie $= (03)^s$.

Ist die triharmonische Zone bei der Holoharmonie zweiwertig, so entsteht diese Hemiharmonie. Das Harmoniezentrum fällt aus und damit fallen zugleich auch die drei monoharmonischen Achsen weg, die parallel der Fläche (111) waren. Es verbleiben also eine triharmonische Achse [111] und drei durch sie gehende Harmonieebenen, die wir im Symbol mit (*s*) andeuten.

Fig. 270.



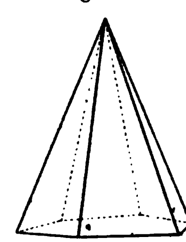
Um diese Hemiharmonie schematisch darzustellen, sei die Fig. 270 beigegeben. Hier sind die Lichtfiguren auf (111), (110), (101), (011) und auf dem Prisma $\{1\bar{1}0\}$ zur Ansicht gebracht.

Auch die Gestalt wird diese Hemiharmonie zu Tage treten lassen, nämlich durch alle jene Formen, welche der triharmonischen Zone nicht angehören, da sie zweiwertig ist. Die Einheitsformen werden sein:

Pedion	positives	(111)
	negatives	$(\bar{1}\bar{1}\bar{1})$
Trigonale Pyramide 1. Art	positive	{110}
	negative	$\{\bar{1}\bar{1}0\}$
Trigonale Pyramide 2. Art	positive	{100}
	negative	$\{\bar{1}00\}$
Spitze trigonale Pyramide 1. Art	positive	$\{11\bar{1}\}$
	negative	$\{\bar{1}\bar{1}1\}$
Hexagonales Prisma 2. Art		$\{1\bar{1}0\}$.

Die übrigen Kristallformen lassen sich wieder aus einer beliebigen Fläche, z. B. (123) entwickeln. Mit dieser Fläche sind nämlich folgende 6 Flächen zugleich gegeben:

Fig. 271.



$$(123),\ (213),\ (231),\ (132),\ (312),\ (321),$$

welche eine ditrigonale Pyramide bestimmen. Fig. 271 gibt das Bild einer solchen Pyramide. Ist die Summe der 3 Indizes Null, also $h_1 + h_2 + h_3 = 0$, so entsteht daraus ein ditrigonales Prisma. Wenn wir noch die übrigen Bedingungen berücksichtigen, welchen die 3 Indizes genügen sollen, wie wir sie bei der früheren Hemiharmonie behandelt haben, so können wir sofort alle Kristallformen der II. und III. Ableitung anführen.

Trigonale Pyramiden 1. Art, positive und negative	$\{h_1 h_1 h_2\}$, $\{h_1 h_1 \bar{h}_2\}$ $h_1 > h_2 \quad 2h_1 > h_2$
Trigonale Pyramiden 2. Art, positive und negative	$\{h_1 h_1 h_2\}$, $\{h_1 h_1 \bar{h}_2\}$ $h_1 < h_2 \quad 2h_1 < h_2$
Trigonales Prisma 1. Art	$\{1\bar{2}1\}$, Fig. 272,
Ditrigonale Prismen	$\{h_1 h_2 h_3\}$ $h_1 + h_2 + h_3 = 0$
Ditrigonale Pyramiden, positive und negative	$\{h_1 h_2 h_3\}$ $h_1 + h_2 + h_3 \gtreqless 0$.

Beispiel: Turmalin, Fig. 273 und 274, wobei $o' = (\bar{1}\bar{1}\bar{1})$, $mm = \{10\bar{1}\}$, $p = \{\bar{2}11\}$, $r = \{110\}$, $e = \{100\}$, $t = \{21\bar{1}\}$, $\varrho = \{\bar{1}\bar{1}0\}$, $\delta = \{\bar{2}\bar{1}\bar{1}\}$.

Fig. 272.

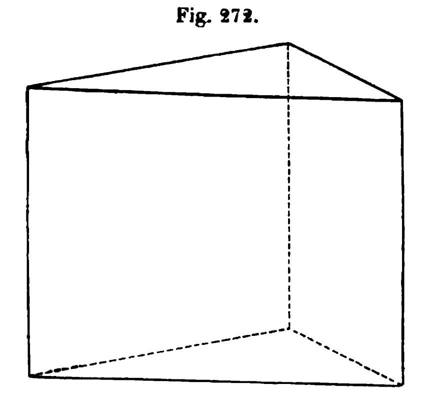


Fig. 273.

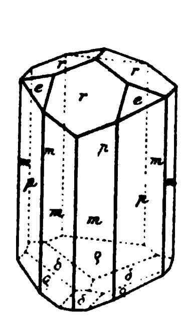
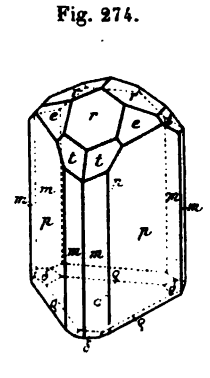


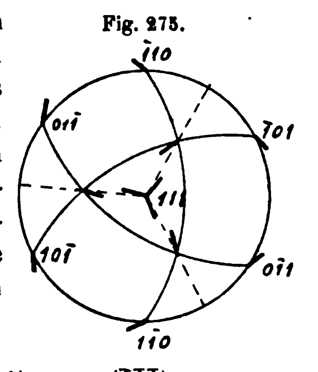
Fig. 274.



§ 91. Hemimorphe Tetartoharmonie = (03).

Wird die triharmonische Zone der soeben behandelten Hemiharmonie hemiharmonisch, so verwandelt sich diese letztere in die hier zu beschreibende Tetartoharmonie. Wegen Nichterscheinen der Harmonieebenen (s) fällt dieses Zeichen aus und es bleibt noch das Symbol (03). Die Fig. 275 zeigt die schematische Abbildung nach der früheren Konstruktion in stereographischer Projektion. Auch die Gestalten lassen diese Hemimorphie zu Tage treten durch jene Formen, welche der Zone [111] nicht angehören. Die Einheitsformen werden sein:

Fig. 275.



Pedion		(111) resp. $(\bar{1}\bar{1}\bar{1})$
Trigonale Pyramide 1. Art	positive	{110}
	negative	$\{\bar{1}\bar{1}0\}$
Trigonale Pyramide 2. Art	positive	{100}
	negative	$\{\bar{1}00\}$
Spitze trigonale Pyramide 1. Art	positive	$\{11\bar{1}\}$
	negative	$\{\bar{1}\bar{1}1\}$
Trigonales Prisma 2. Art		$\{\bar{1}10\}$ resp. $\{1\bar{1}0\}$.

Um zu den Kristallformen der II. und III. Ableitung zu gelangen, nehmen wir wieder die Fläche (123), mit der zugleich die Flächen

(123), (231), (312)

gegeben sind. Sie bilden eine trigonale Pyramide 3. Art $\{h_1 h_2 h_3\}$. Lassen wir den 3 Indizes spezielle Werte zu, so sind noch 4 Formen möglich. Die Kristallformen der II. und III. Ableitung werden also bestehen aus:

Trigonale Prismen 1. Art . . . . $\{1\bar{2}1\}$

Trigonale Pyramiden 1. Art, positive und negative $\{h_1 h_1 h_2\}$, $\{h_1 h_1 \bar{h}_2\}$
$h_1 < h_2$ $2h_1 < h_2$

Trigonale Pyramiden 2. Art, positive und negative $\{h_1 h_1 h_2\}$, $\{h_1 h_1 \bar{h}_2\}$
$h_1 > h_2$ $2h_1 > h_2$

Trigonale Prismen 3. Art $\begin{cases} \text{rechte } (03)\ \{h_1 h_2 h_3\} \\ \text{linke } (03)\ \{h_2 h_1 h_3\} \end{cases}$ $\{h_1 h_2 h_3\}$ $h_1 + h_2 + h_3 = 0$

Trigonale Pyramiden 3. Art, positive $\begin{cases} \text{rechte } (03)\ \{h_1 h_2 h_3\} \\ \text{linke } (03)\ \{h_2 h_1 h_3\} \end{cases}$ $h_1 + h_2 + h_3 \gtrless 0$

negative $\begin{cases} \text{rechte } (03)\ \{\bar{h}_1 \bar{h}_2 \bar{h}_3\} \\ \text{linke } (03)\ \{\bar{h}_2 \bar{h}_1 \bar{h}_3\}. \end{cases}$

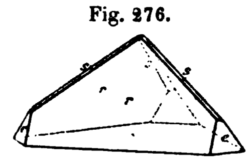


Fig. 276.

Beispiel: Natriumperjodat $NaJO^4, 3H^2O$, siehe Fig. 276, wobei $r = \{110\}$, $c = \{100\}$, $s = \{211\}$, $x = (\bar{1}\bar{1}\bar{1})$, nach P. v. Groth, bedeuten.

IV. Sechsgliedrige Kristalle.

§ 92. Allgemeines Merkmal.

Eine hexaharmonische Zone und eine hexaharmonische Fläche, welche mehr oder weniger vorherrschen, sind vorhanden. Mit denselben sind stets 6 oder 2×6 Flächen oder Flächenpaare harmonisch gelegen, die gleich herrschende Entwicklung erlangen. Die sechsgliedrigen Kristalle können prismatisch und tafelartig sein. Eine mittlere Ausbildung ist auch möglich, und sie heißt pyramidal.

§ 93. Holoharmonie $= (26)^s$.

Die zwei hexaharmonischen die Basis bildenden Flächen (0001) sind holoharmonisch nach Fig. 206 a, S. 151, daher ist auch die hexaharmonische Zone [0001] nach Fig. 210 c, S. 154, holoharmonisch und einwertig. Also ist die Fläche (0001) eine Harmonieebene und die hexaharmonische Zone eine Harmonieachse. Ferner sind die drei Flächen (1000), (0100), (0010) Harmonieebenen, ebenso die drei Flächen $(1\bar{1}00)$, $(0\bar{1}10)$, $(10\bar{1}0)$. In dieselben und in die Ebene (0001) fallen die drei Harmonieachsen [1000], [0010], [0100] resp. $[1\bar{1}00]$, $[10\bar{1}0]$, $[0\bar{1}10]$. Rechnen wir noch das Harmoniezentrum hinzu, so erhalten wir bei dieser Holoharmonie genau dieselben Harmonieverhältnisse, welche bei den entsprechenden Grundgestalten vorhanden sind, § 56. Alle Kristallformen werden hier identisch sein mit den dort schon behandelten.

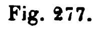
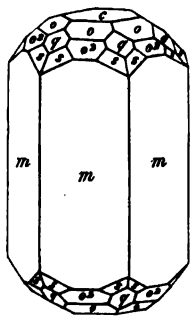


Fig. 277.



Die Bezeichnung $(26)^s$ soll aussprechen, daß eine hexaharmonische Achse (6) mit einer monoharmonischen Achse (2) verbunden ist, und daß überdies durch dieselben die Harmonieebene (s)

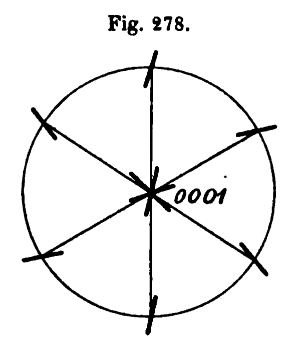
geht. Natürlich gehen durch die monoharmonische Richtung 3 + 3 Harmonieebenen (*s*).

Als Beispiel sei hier nur der Beryll $(SiO^3)^6Al^2Be^3$, Fig. 277, nach N. von Kokscharow, und das von E. Artini bestimmte Bromjod-orthonitroacetanilid angeführt.

§ 94. Gyroedrische Hemiharmonie = (26).

Ist die Fläche (0001) hemiharmonisch drehend nach Fig. 206b, S. 151, und auf beiden Seiten nach entgegengesetztem Sinne, so sind auch die monoharmonischen Flächen {1000} hemiharmonisch drehend nach Fig. 203b, S. 149. Man erhält dadurch eine Hemiharmonie, bei der keine Harmonieebene vorhanden sein kann. Somit reduzieren sich die Harmonieelemente auf eine hexaharmonische Achse [0001], und 3 + 3 monoharmonische Achsen, nämlich {[1000]} und $\{[1\bar{1}00]\}$.

Fig. 278.



Die Bezeichnung (26) spricht eben das aus, daß die Harmonieachsen (2) und (6) der Holoharmonie vorhanden sind, während die dort auftretenden Harmonieebenen, hier ausbleiben.

Zwei gyroedrische Hemiharmonien, wenn sie nach entgegengesetzten Sinnen drehend und harmonisch in bezug auf eine Harmonieebene gelegen sind, oder sich mit ihren Harmonieachsen decken, bringen übereinandergelegt die frühere Holoharmonie hervor. Daher müssen beide — enantiomorph — bei demselben Kristall vorkommen.

In Fig. 278 ist durch Lichtfiguren auf den Flächen (0001) und {1000} diese Hemiharmonie dargestellt.

Auch die Gestalt muß die gyroedrische Hemiharmonie angeben. Die Einheitsformen sind hier wie bei der Holoharmonie, nämlich:

Basis	{0001}
Hexagonales Prisma 1. Art .	{1000}
Hexagonales Prisma 2. Art .	$\{1\bar{1}00\}$
Hexagonale Bipyramide 1. Art	{1001}
Hexagonale Bipyramide 2. Art	$\{1\bar{1}01\}$.

Zur Entwicklung der Kristallformen II. und III. Ableitung wählen wir die Fläche $(1\bar{2}03)$ aus, mit welcher zugleich folgende Flächen gegeben sind:

$(1\bar{2}03)$, $(0\bar{1}23)$, $(\bar{2}013)$,
$(\bar{1}203)$, $(01\bar{2}3)$, $(20\bar{1}3)$,

da die Richtung [0001] hexaharmonisch ist; da sie aber auch einwertig sein muß, so folgen noch fernere 6 Flächen:

$(2\bar{1}0\bar{3})$, $(0\bar{2}1\bar{3})$, $(\bar{1}02\bar{3})$,
$(\bar{2}10\bar{3})$, $(02\bar{1}\bar{3})$, $(102\bar{3})$.

Die hier angegebenen 12 Flächen bilden ein hexagonales Trapezoeder, wie ein solches z. B. in Fig. 279 a, b, rechtes und linkes, dargestellt ist. Deshalb wird diese Hemiharmonie auch die »trapezoedrische« genannt.

Ist der vierte Index Null, so geht das Trapezoeder in ein dihexagonales Prisma über. Sind zwei der drei ersten Indizes Null, so entsteht eine hexagonale Bipyramide 1. Art; ist die Summe der drei ersten Indizes Null, so folgt eine hexagonale Bipyramide 2. Art.

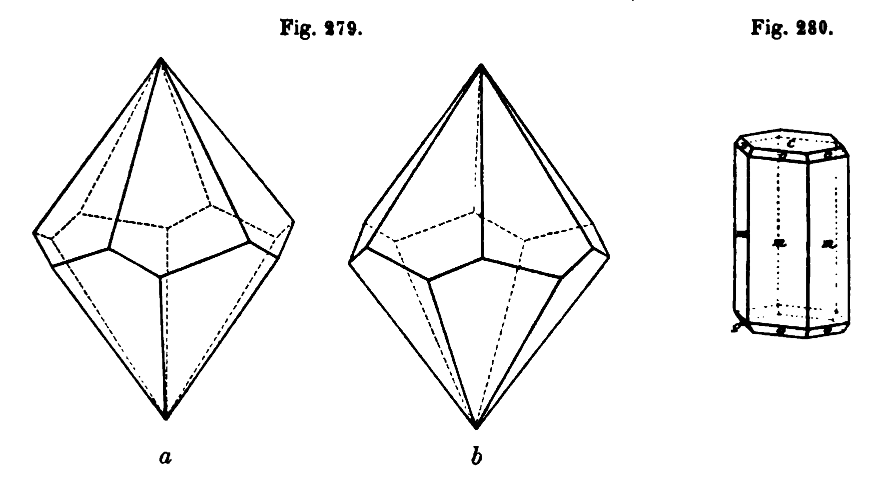
Die Kristallformen der II. und III. Ableitung werden somit sein:

Dihexagonale Prismen		$\{h_1 0 \bar{h}_3 0\}$
Hexagonale Bipyramiden 1. Art		$\{h_1 0 0\, h_4\}$
Hexagonale Bipyramiden 2. Art		$\{h_1 0 \bar{h}_1 h_4\}$
Hexagonale Trapezoeder	rechte	$\{h_1 0 \bar{h}_3 h_4\}$
	linke	$\{\bar{h}_3 0 h_1 h_4\}$.

Beispiel: Bleisalz, $(C^4H^4O^6)^2(SbO)^2Pb \cdot NO^3K$, Fig. 280, wobei $mm\{10\bar{1}0\}$, $oo\{1001\}$, $c\{0001\}$, nach H. Traube, bedeuten.

Rechts- und links-weinsaures Antimonyl-Baryum + salpetersaures Kalium $(C^4H^4O^6)^2(SbO)^2 \cdot Ba \cdot NO^3K$. Fig. 280 zeigt, nach H. Traube, eine naheliegende Gestalt, wo $c\{0001\}$, $o\{1001\}$ und $m\{1000\}$ sind.

Fig. 279. Fig. 280.

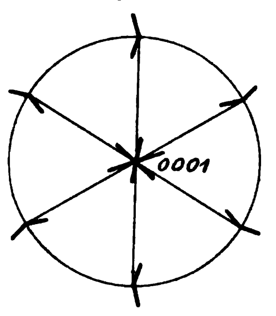


§ 95. Pyramidale Hemiharmonie = $(06)^\sigma$.

Die Fläche (0001) ist hemiharmonisch, nach Fig. 206b, S. 151. Sie ist aber auch gleichsinnig drehend nach beiden Seiten und daher auch Harmonieebene. Als Harmonieachse gilt nur die hexaharmonische Zone [0001]. Dadurch also, daß nur diese Harmonieachse (6) und nur eine Harmonieebene (σ), welche nicht durch dieselbe geht, vorhanden ist, entsteht die Bezeichnung $(06)^\sigma$. Zwei pyramidale Hemiharmonien bringen, wenn sie harmonisch gelegen sind in bezug auf eine durch [0001] gehende Harmonieebene, und wenn sie gegenseitig umgekehrt drehend sind, die Holoharmonie $(26)^s$ hervor. Sie erscheinen also beide bei einem Kristall, da sie die Grundgestalt hervorbringen müssen.

In der Fig. 281 ist durch Lichtfiguren auf den Flächen (0001) und (1000) diese Hemiharmonie schematisch dargestellt. Die Flächen (0001) müssen hemimorph sein, aber nicht in der Richtung $[0001]$, sondern nach Fig. 203 d, S. 149. Auch aus der Gestalt der Kristalle läßt sich diese pyramidale Hemiharmonie erkennen, aber nur aus den Kristallformen der II. und III. Ableitung.

Fig. 281.



Die Einheitsformen sind dieselben wie bei der gyroedrischen Hemiharmonie, nämlich:

Basis . . . . (0001)
Hexagonales Prisma 1. Art . $\{1000\}$
Hexagonales Prisma 2. Art . $\{1\bar{1}00\}$
Hexagonale Bipyramide 1. Art $\{1001\}$
Hexagonale Bipyramide 2. Art $\{1\bar{1}01\}$.

Zur Erkennung der Kristallform der II. und III. Ableitung kann man wieder wie bei der vorigen Hemiharmonie von der allgemeinen Fläche $(1\bar{2}03)$ ausgehen, mit welcher Fläche zugleich folgende 6 Flächen gegeben sind

$$(1\bar{2}03),\quad (20\bar{1}3),\quad (01\bar{2}3),$$
$$(\bar{1}203),\quad (\bar{2}013),\quad (0\bar{1}23),$$

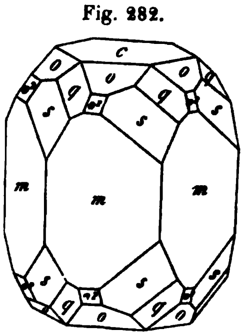
weil die Richtung $[0001]$ hexaharmonisch ist. Und da ferner (0001) Harmonieebene ist, so folgen noch die Flächen

$$(1\bar{2}0\bar{3}),\quad (20\bar{1}\bar{3}),\quad (01\bar{2}\bar{3}),$$
$$(\bar{1}20\bar{3}),\quad (\bar{2}01\bar{3}),\quad (0\bar{1}2\bar{3}),$$

welche mit den vorigen zugleich harmonisch erscheinen müssen.

Diese 12 Flächen bilden eine doppelte hexagonale Pyramide, eine Bipyramide der 3. Art. Damit ist zugleich bewiesen, daß die pyramidale Hemiharmonie das Harmoniezentrum besitzen muß, denn die Flächen $(\bar{1}203)$ und $(1\bar{2}0\bar{3})$ sind unter sich parallel; desgleichen $(20\bar{1}3)$ und $(\bar{2}01\bar{3})$, sowie $(0\bar{1}23)$ und $(01\bar{2}\bar{3})$ usw.

Fig. 282.



Ist sodann der 4. Index Null, so entsteht das hexagonale Prisma der 3. Art; sind zwei der drei ersten Indizes Null, so entsteht eine hexagonale Bipyramide der 1. Art; ist endlich die Summe der drei ersten Indizes Null, so bekommen wir eine hexagonale Bipyramide der 2. Art.

Demnach sind die Kristallformen der II. und III. Ableitung folgende:

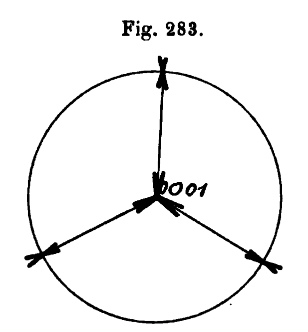
Hexagonale Prismen der 3. Art { rechte . . $\{h_1\,0\,\bar{h}_3\,0\}$; linke . . $\{\bar{h}_3\,h_1\,0\,0\}$
Hexagonale Bipyramiden der 1. Art . . . $\{h_1\,0\,0\,h_4\}$
Hexagonale Bipyramiden der 2. Art . . . $\{h_1\,0\,\bar{h}_1\,h_4\}$
Hexagonale Bipyramiden der 3. Art { rechte $\{h_1\,0\,\bar{h}_3\,h_4\}$; linke . $\{\bar{h}_3\,h_1\,0\,h_4\}$.

Beispiel: Apatit $Ca^3Cl(PO^4)^3$, Fig. 282, wobei $c = \{0001\}$, $o = \{1001\}$, $q = \{10\bar{1}1\}$, $o^2 = \{\bar{2}001\}$, $s = \{20\bar{1}1\}$, $m = \{1000\}$ bedeuten.

§ 96. Trigonotypische Hemiharmonie = $(23)^s$.

Die Fläche (0001) ist hemiharmonisch nach Fig. 206c, S. 151, und gilt als Harmonieebene. Dadurch ist die Zone [0001] triharmonisch. Durch diese Harmonierichtung gehen drei Harmonieebenen, und wo diese die Fläche (0001) schneiden, liegen 3 Harmonieachsen monoharmonisch. Damit ist die Bezeichnung $(23)^s$ erklärt.

Fig. 283.



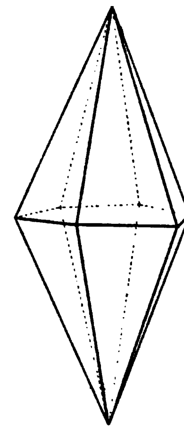
Zwei solche Hemiharmonien bringen, wenn sie in bezug auf das Harmoniezentrum harmonisch beschaffen und gelegen sind, die Holoharmonie $(26)^s$ hervor. In der Fig. 283 sind die Lichtfiguren auf (0001) und {1000} schematisch eingetragen.

Die Einheitsformen sind:

Basis	(0001)		
Trigonales Prisma 1. Art .	{1000}	resp.	{$\bar{1}$000}
Trigonales Prisma 2. Art .	{1$\bar{1}$00}	»	{$\bar{1}$100}
Trigonale Bipyramide 1. Art	{1001}	»	{$\bar{1}$001}
Trigonale Bipyramide 2. Art	{1$\bar{1}$01}	»	{$\bar{1}$101}.

Werden sodann die Kristallformen II. und III. Ableitung nach wiederholt angegebener Weise aus der beliebigen Fläche (1$\bar{2}$03) entwickelt, so sind zugleich folgende 12 Flächen gegeben

Fig. 284.



(1$\bar{2}$03), (20$\bar{1}$3), (01$\bar{2}$3), (10$\bar{2}$3), (02$\bar{1}$3), ($\bar{2}$103),
(1$\bar{2}$0$\bar{3}$), (20$\bar{1}\bar{3}$), (01$\bar{2}\bar{3}$), (10$\bar{2}\bar{3}$), (02$\bar{1}\bar{3}$), ($\bar{2}$10$\bar{3}$),

da [0001] eine triharmonische Achse ist, durch dieselbe eine Harmonieebene geht und ferner die Harmonieebene (0001) vorhanden ist. Damit lassen sich leicht folgende Kristallformen zusammenfassen:

Ditrigonale Prismen . . .	$\{h_1\,0\,\bar{h}_3\,0\}$	resp.	$\{\bar{h}_1\,0\,h_3\,0\}$
Trigonale Bipyramiden 1. Art	$\{h_1\,0\,0\,h_4\}$	»	$\{\bar{h}_1\,0\,0\,h_4\}$
Trigonale Bipyramiden 2. Art	$\{h_1\,\bar{h}_1\,0\,h_4\}$	»	$\{\bar{h}_1\,h_1\,0\,h_4\}$
Ditrigonale Bipyramiden. .	$\{h_1\,\bar{h}_2\,0\,h_4\}$	»	$\{\bar{h}_1\,h_2\,0\,h_4\}$.

Fig. 284 stellt das Bild einer ditrigonalen Bipyramide dar. Hierher gehört wahrscheinlich das Kalium-Uranchlorid (De la Provostaye).

§ 97. Pyramidale Tetartoharmonie = $(03)^\sigma$.

Die Fläche (0001) ist wie vorher Harmonieebene, jedoch hemiharmonisch drehend rechts oder links, nach Fig. 206d, S. 151. Daraufhin ist nur noch ein

Harmonieelement vorhanden, nämlich die triharmonische Achse [0001], woraus die Bezeichnung $(03)^{\sigma}$ hervorgeht.

Zwei solche Tetartoharmonien setzen, wenn sie in bezug auf das Harmoniezentrum harmonisch beschaffen und gelegen sind, die pyramidale Hemiharmonie $(06)^{\sigma}$ zusammen; sind zwei solche in bezug auf eine durch [0001] gehende Harmonieebene wieder harmonisch beschaffen und gelegen, so bringen sie die Holoharmonie $(26)^{s}$ zustande. In Fig. 285 sind die Lichtfiguren auf (0001) und {1000} schematisch dargestellt.

Die Einheitsformen sind:

Basis	(0001)		
Trigonale Prismen 1. Art . .	{1000}	resp.	{$\bar{1}$000}
Trigonale Prismen 2. Art . .	{1$\bar{1}$00}	»	{$\bar{1}$100}
Trigonale Bipyramiden 1. Art	{1001}	»	{$\bar{1}$001}
Trigonale Bipyramiden 2. Art	{1$\bar{1}$01}	»	{$\bar{1}$101}.

Entwicklung der Kristallformen II. und III. Ableitung: Mit der beliebig gegebenen allgemeinen Fläche (1$\bar{2}$03) sind zugleich folgende 6 Flächen gegeben:

$$(1\bar{2}03),\quad (\bar{2}013),\quad (01\bar{2}3),$$
$$(1\bar{2}0\bar{3}),\quad (\bar{2}01\bar{3}),\quad (01\bar{2}\bar{3}),$$

weil [0001] triharmonische Richtung und (0001) Harmonieebene ist. Diese sechsflächige Kristallform heißt trigonale Bipyramide 3. Art, siehe Fig. 286.

Fig. 285.

Fig. 286.

Durch spezielle Werte der Indizes erhalten wir die übrigen Kristallformen wie folgt:

Trigonale Prismen 3. Art	rechte .	$\{h_1\bar{h}_2 0\ 0\}$	resp.	$\{\bar{h}_1 h_2 0\ 0\}$
	linke .	$\{h_2\bar{h}_1 0\ 0\}$	»	$\{\bar{h}_2 h_1 0\ 0\}$
Trigonale Bipyramiden 1. Art . .		$\{h_1 0\ 0\ h_3\}$	»	$\{\bar{h}_1 0\ 0\ h_3\}$
Trigonale Bipyramiden 2. Art . .		$\{h_1\bar{h}_1 0\ h_3\}$	»	$\{\bar{h}_1 h_1 0\ h_3\}$
Trigonale Bipyramiden 3. Art	rechte	$\{h_1\bar{h}_2 0\ h_4\}$	»	$\{h_1\bar{h}_2 0\ h_4\}$
	linke	$\{h_2\bar{h}_1 0\ h_4\}$	»	$\{\bar{h}_2 h_1 0\ h_4\}$.

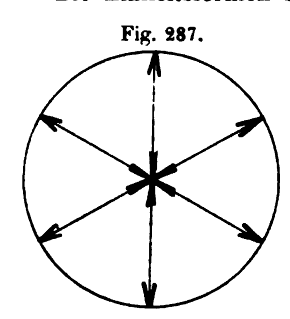
§ 98. Hemimorphe Hemiharmonie = $(06)^s$.

Die Fläche (0001) ist holoharmonisch nach Fig. 206 a, S. 151, aber auf beiden Seiten physikalisch verschieden. Dadurch ist sie nicht Harmonieebene und die Zone [0001] ist zweiwertig. Die monoharmonischen Flächen {1000} sind hemimorph nach Fig. 203 c, S. 149.

In der Fig. 287 sind die Lichtfiguren auf (0001) und {1000} schematisch eingetragen.

Die Einheitsformen sind:

Fig. 287.



Pedion	positives	(0001)
	negatives	$(000\bar{1})$
Hexagonales Prisma 1. Art		{1000}
Hexagonales Prisma 2. Art		$\{1\bar{1}00\}$
Hexagonale Pyramiden 1. Art	positive	{1001}
	negative	$\{100\bar{1}\}$
Hexagonale Pyramiden 2. Art	positive	$\{1\bar{1}01\}$
	negative	$\{1\bar{1}0\bar{1}\}$.

Die Kristallformen der II. und III. Ableitung, die sich leicht aus irgend welcher allgemeinen Fläche z. B. $(1\bar{2}03)$ entwickeln lassen, sind:

Dihexagonale Prismen		$\{h_1 \bar{h}_2 0\ 0\}$
Hexagonale Pyramiden 1. Art	positive	$\{h_1 0\ 0\ h_4\}$
	negative	$\{h_1 0\ 0\ \bar{h}_4\}$
Hexagonale Pyramiden 2. Art	positive	$\{h_1 \bar{h}_1 0\ h_4\}$
	negative	$\{h_1 \bar{h}_1 0\ \bar{h}_4\}$
Dihexagonale Pyramiden	positive	$\{h_1 \bar{h}_2 0\ h_4\}$
	negative	$\{h_1 \bar{h}_2 0\ \bar{h}_4\}$.

Fig. 288.

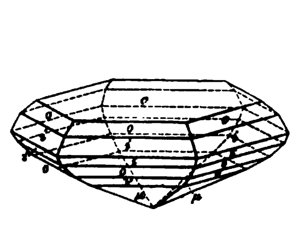


Fig. 289.

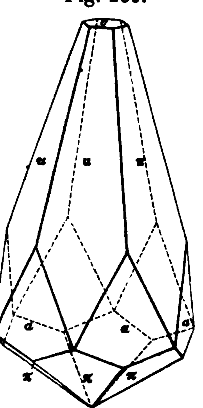
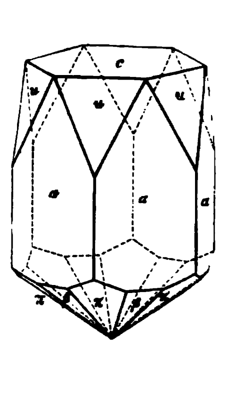


Fig. 290.



Beispiel: Jodsilber, *AgJ*, Figg. 288, 289, 290, wobei, nach v. Zepharovich, $c = (0001)$, $o = \{1001\}$ und $\{100\bar{1}\}$, $i = \{2001\}$ und $\{2001\}$, $r = \{2003\}$, $u = \{1002\}$ bedeuten. Spaltbarkeit parallel (0001).

§ 99. Hemimorphe drehende Tetartoharmonie = (06).

Ist die Fläche (0001) hemiharmonisch drehend nach Fig. 206 b, S. 151, so geht die frühere Hemiharmonie in die vorliegende Tetartoharmonie über. Während dort durch die hexaharmonische Achse (6) Harmonieebenen (*s*) gehen, und daher die Bezeichnung $(06)^s$ folgt, bleibt hier nur die hexaharmonische Achse (6) und daher reduziert sich die Bezeichnung auf (06). Die Flächen der Zone [0001] sind hemimorph nach Fig. 203 e, S. 149.

In der Fig. 291 sind die Lichtfiguren auf (0001) und {1000} schematisch eingetragen.

Die Einheitsformen sind:

Pedion	positives	(0001)
	negatives	$(000\bar{1})$
Hexagonales Prisma 1. Art		$\{1000\}$
Hexagonales Prisma 2. Art		$\{1\bar{1}00\}$
Hexagonale Pyramide 1. Art	positive	$\{1001\}$
	negative	$\{100\bar{1}\}$
Hexagonale Pyramide 2. Art	positive	$\{1\bar{1}01\}$
	negative	$\{1\bar{1}0\bar{1}\}$.

Die Kristallformen der II. und III. Ableitung nach der frühern Entwicklung sind:

Hexagonale Prismen 3. Art	rechts		$\{h_1\bar{h}_2 0\ 0\}$
	links		$\{h_2\bar{h}_1 0\ 0\}$
Hexagonale Pyramiden 1. Art	positive		$\{h_1 0\ 0\ h_4\}$
	negative		$\{h_1 0\ 0\ \bar{h}_4\}$
Hexagonale Pyramiden 2. Art	positive		$\{h_1\bar{h}_1 0\ h_4\}$
	negative		$\{h_1\bar{h}_1 0\ \bar{h}_4\}$
Hexagonale Pyramiden 3. Art	positive	rechte	$\{h_1\bar{h}_2 0\ h_4\}$
		linke	$\{h_2\bar{h}_1 0\ h_4\}$
	negative	rechte	$\{h_1\bar{h}_2 0\ \bar{h}_4\}$
		linke	$\{h_2\bar{h}_1 0\ \bar{h}_4\}$.

Fig. 291.

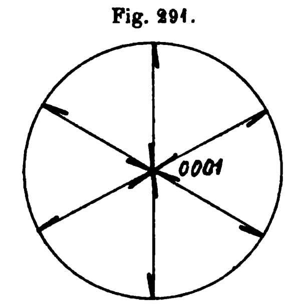
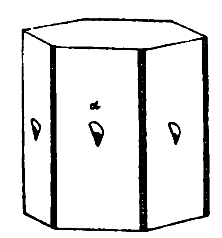


Fig. 292.



Beispiel: Nephelin, $Si^9O^{34}Al^8(Na, K)^8$, Fig. 292, wobei nur die Kristallformen (0001), $(000\bar{1})$, {1000} und kaum angedeutet $\{1\bar{1}00\}$ auftreten. Die Flächen {1000} zeigen die hemimorphen Ätzfiguren nach H. Baumhauer.

§ 100. Fünf weitere Harmonien.

Zu den sechsgliedrigen können noch die fünf Harmonien gerechnet werden, welche bei den dreigliedrigen Kristallen vorkommen. Es ist dort zuerst die Holoharmonie (63)^s bekannt gewesen. Sollte sie sich auch bei den sechsgliedrigen Kristallen zeigen, so müßten zwei derselben zugleich auftreten, die zusammen, wenn sie in bezug auf eine durch die Richtung [0001] gehende Harmonieebene harmonisch gelegen sind, die Holoharmonie (26)^s zustande bringen. Wir werden sie daher an dieser Stelle als *skalenoedrische Hemiharmonie* (63)^s bezeichnen, weil das Skalenoeder die allgemeine Kristallform ist.

Das Gleiche soll gesagt sein für die bei den dreigliedrigen Kristallen bekannte rhomboedrische Hemiharmonie (63). Tritt sie auch hier auf, so werden vier derselben gleichzeitig zum Vorschein kommen müssen, um die Holoharmonie der sechsgliedrigen Kristalle hervorzurufen. Wir bezeichnen sie darum als *rhomboedrische Tetartoharmonie* (63). Die dortige gyroedrische Hemiharmonie (23) wird hier *gyroedrische Tetartoharmonie* (23) und die zwei hemimorphen Harmonien werden hier *Tetartoharmonie* (03)^s und *Ogdoharmonie* (03).

Die Entscheidung, ob es sich um dreigliedrige oder um sechsgliedrige Kristalle handelt, kann nur auf Grund einer sehr großen Anzahl von Kristallen, aus welchen die Grundgestalt hervorgeht, getroffen werden. Zeigen sich Spaltungen im Kristall, so wird natürlich in gewissen Fällen die Entscheidung unzweifelhaft sein, ob es sich um Harmonien der drei-, oder der sechsgliedrigen Kristalle handelt.

Wir haben dagegen gesehen, daß bei allen übrigen Harmonien der Kristalle eine einzige Harmonie, d. h. eine einzige Tracht vollständig hinreicht, um die Hauptgrundgestalt, sei sie drei- und vier-, vier-, drei-, oder sechsgliedrig, zu bestimmen.

Zusatz.

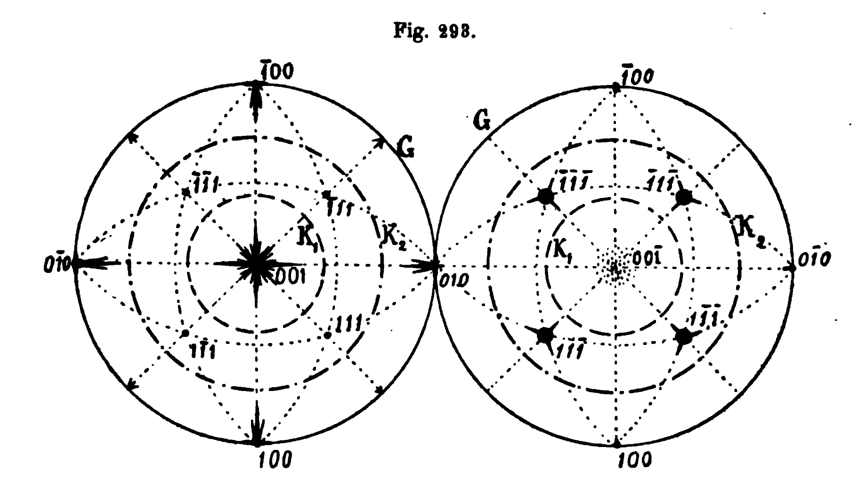
§ 101. Hemimorphismus der Kristalle.

Verschiedene Kristalle wurden hemimorph genannt.

Um eine Vorstellung zu haben, was eigentlich hemimorph sei, denke man sich eine Richtung im Kristall gezogen. Man orientiert den Kristall derart, daß diese gewählte Richtung senkrecht zur Grundebene der stereographischen Projektion zu stehen kommt. Am einfachsten geschieht dies dadurch, daß man diese Richtung zugleich parallel zur Äquatorachse des zweikreisigen Goniometers bringt, Fig. 293. Die gegebene Richtung stimmt im Kristall mit einer Zone zusammen, welche im Goniometer durch ihre entsprechende Lichtschnur bestimmt ist. Die auf dem Grundkreis gezeichneten Lichtbilder der Flächen (100), (110), (010), $(\bar{1}10)$, $(\bar{1}00)$, $(\bar{1}\bar{1}0)$, $(0\bar{1}0)$ und $(1\bar{1}0)$ geben die Lichtschnur der betrachteten Zone an. Ferner werden die Signalbilder und Lichtfiguren der Kristallflächen auf beiden Halbkugeln der Projektion aufgetragen; sie sind in der Figur nebeneinander gezeichnet. Die eine Halbkugel gibt die Flächenentwicklung auf dem einen Sinn jener Richtung und die andere Halbkugel auf

dem andern Sinn derselben Richtung. Ist die Flächenentwicklung auf der einen Halbkugel verschieden von derjenigen auf der zweiten Halbkugel, so heißt die Richtung zweiwertig oder **hemimorph**. In der Fig. 293 ist diese Verschiedenheit sehr deutlich ausgesprochen. Auf der einen Halbkugel (links) erscheint die Beleuchtung ziemlich stark auf den Orten (100), (010) und (001), während auf der anderen Halbkugel (rechts) die Beleuchtung mehr auf den Orten (11̄1̄), (1̄1̄1̄), (1̄11̄) und (11̄1̄) entwickelt ist. Die Gesamtbeleuchtung aber auf der einen Halbkugel ist dieselbe wie diejenige auf der andern Halbkugel, was mit dem Prinzip des Gleichgewichts im Einklang zu stehen scheint.

Fig. 293.



Betrachtet man die Beleuchtung, welche innerhalb eines mit dem Grundkreis konzentrischen Kreises K_2 oder K_1 zu liegen kommt, so ist sie verschieden für beide Halbkugeln der Projektion, und zwar wird sie um so verschiedener sein, je kleiner der Kreis K_2 genommen wird. Wird dieser Kreis immer kleiner und kleiner, so nähert sich jene Verschiedenheit einer gewissen **Grenze**, welche für den Hemimorphismus von Wichtigkeit ist. Bezeichnet man mit F_1 die gesamte Beleuchtung der Lichtbilder, welche im Kreis K_1 auf der linken Halbkugel vorkommen, und mit F_2 diejenige der Lichtbilder, welche im Kreis K_1 auf der anderen Halbkugel vorkommen, dann wird das Verhältnis

$$\frac{F_1 - F_2}{F_1 + F_2}$$

einer bestimmten Grenze sich nähern, wenn der angenommene Kreis K_1 immer kleiner wird. Also heißt die Grenze des aufgestellten Verhältnisses **Grad des Hemimorphismus** für die angenommene Richtung. Wir wollen ihn so kurz schreiben:

$$H = \lim \left(\frac{F_1 - F_2}{F_1 + F_2}\right).$$

Es ist begreiflich, daß es hemimorphe Richtungen geben muß in allen jenen Kristallen, welche das Harmoniezentrum nicht besitzen.

Für $F_1 > F_2$ ist H positiv,
$F_1 < F_2$ » H negativ,
$F_1 = F_2$ » H Null.

Man nennt den einen Sinn der hemimorphen Richtung positiv (analoger Pol), den andern negativ (antiloger Pol).

Ist $F_1 = F_2$, so besitzt der Hemimorphismus den Grad Null, oder die Richtung ist einwertig.

Durchgeht man alle in einem halben Umfang befindlichen Richtungen nach und nach von einem Sinn zum andern, so geht das Verhältnis H vom Wert $\frac{F_1 - F_2}{F_1 + F_2}$ bis zum Wert $\frac{F_2 - F_1}{F_1 + F_2}$ über, indem es den Wert Null passiert. Es muß also in jedem Kristall, der hemimorphe Richtungen hat, auch neutrale Richtungen geben. Sie bilden zusammen den neutralen Ort des hemimorphen Kristalls.

Wir sehen ferner, daß für gewisse Richtungen das Verhältnis $\frac{F_1 - F_2}{F_1 + F_2}$ ein Maximum erreichen muß. Diejenigen Richtungen, wo dies geschieht, heißen hemimorphe Achsen des Kristalls.

Hat der Kristall nur eine hemimorphe Achse, so wird sein Hemimorphismusgrad durch das Verhältnis $\lim\left(\frac{F_1 - F_2}{F_1 + F_2}\right)$ ausgedrückt, welches für die Achse gilt.

Alle jene Kristalle, welche harmonisch in bezug auf das Harmoniezentrum gestaltet sind, können offenbar keine zweiwertige Richtung haben, sie sind holomorph.

Folgende Harmonien der Kristalle sind holomorph, weil sie das Harmoniezentrum besitzen:

In den drei- und viergliedrigen Kristallen:

1. Holoharmonie $(34)^s$.
2. Pentagonale Hemiharmonie $(33)^\sigma$.

In den viergliedrigen Kristallen:

3. Holoharmonie $(24)^s$.
4. Pyramidale Hemiharmonie $(04)^\sigma$.

In den dreigliedrigen Kristallen:

5. Holoharmonie $(63)^s$.
6. Rhomboedrische Hemiharmonie (63).

In den sechsgliedrigen Kristallen:

7. Holoharmonie $(26)^s$.
8. Pyramidale Hemiharmonie $(06)^\sigma$.

Aber auch die gyroedrischen Harmonien werden nicht hemimorph sein, obwohl sie kein Harmoniezentrum besitzen, ausgenommen (23) bei den dreigliedrigen Kristallen, weil sie in jedem Sinn einer Richtung verschieden gedreht, aber gleich gestaltet sind.

Hemimorphismus muß sich also in den folgenden Harmonien zeigen:

In den **drei- und viergliedrigen Kristallen:**

1. Tetraedrische Hemiharmonie $(33)^s$.
2. Tetraedrische Tetartoharmonie (33).

In den **viergliedrigen Kristallen:**

3. Sphenoidische Hemiharmonie $(42)^s$.
4. Sphenoidische Tetartoharmonie (42).
5. Hemimorphe Hemiharmonie $(04)^s$.
6. Hemimorphe Tetartoharmonie (04).

In den **dreigliedrigen Kristallen:**

7. Hemimorphe Hemiharmonie $(03)^s$.
8. Hemimorphe Tetartoharmonie (03).

In den **sechsgliedrigen Kristallen:**

9. Hemimorphe Hemiharmonie $(06)^s$.
10. Hemimorphe drehende Tetartoharmonie (06).

Die 4 ersten Harmonien dürfen nicht nur eine, sondern müssen 4 hemimorphe Achsen besitzen. Der neutrale Ort dieser Harmonien wird die Fläche des Hexaeders {100} sein.

Bei den übrigen hemimorphen Kristallen fällt die hemimorphe Achse mit der diharmonischen resp. tri- und hexaharmonischen Achse zusammen, welche je mit [001], resp. [111] und [0001] bezeichnet worden ist. Deshalb ist der neutrale Ort bei solchen Kristallen parallel der diharmonischen, resp. der tri- und hexaharmonischen Fläche (001) resp. (111) und (0001).

Bei den sphenoidischen Harmonien der viergliedrigen Kristalle können 4 hemimorphe Achsen auftreten analog denjenigen der tetraedrischen Harmonien bei den drei- und viergliedrigen Kristallen.

Auch andere Harmonien haben die Anlage hemimorph aufzutreten, es sind nämlich:

Bei den **dreigliedrigen Kristallen:**

1. Die gyroedrische Hemiharmonie (23), z. B. Quarz.

Bei den **sechsgliedrigen Kristallen:**

2. Die trigonotypische Hemiharmonie $(23)^s$.
3. Die pyramidale Tetartoharmonie $(03)^{\tau}$.

Die hemimorphen Achsen bei diesen Kristallen müssen sein:

Bei der ersten $[1\bar{1}0]$, $[10\bar{1}]$ und $[0\bar{1}1]$.

Bei den zweiten [1000], [0100] und [0010].

Der neutrale Ort ist durch die triharmonische Richtung und durch drei Ebenen dargestellt, welche durch jene Richtung gehen. Wir sehen aus dieser Beschreibung, daß 1, 3 oder 4 hemimorphe Achsen der Kristalle vorkommen können; ferner, daß der neutrale Ort derselben durch eine Achse, durch eine Fläche oder durch drei Flächen dargestellt sein kann.

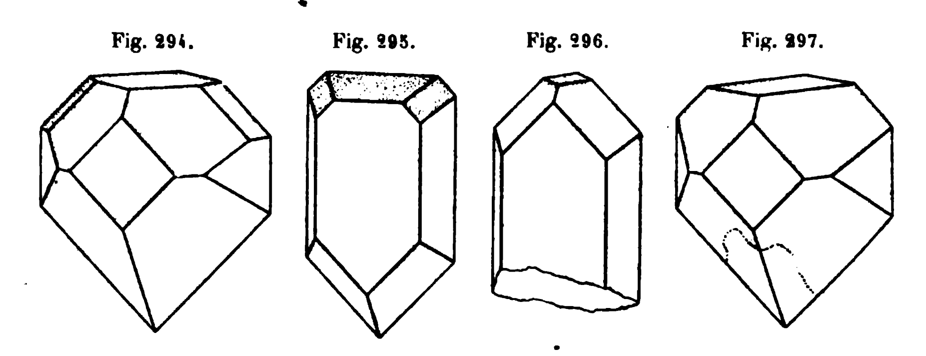
Die Erscheinung, welche die hemimorphen Kristalle charakterisiert, ist die der Pyroelektrizität.

Wird bei einem hemimorphen Kristall die Temperatur geändert, so zeigt er auf seiner Oberfläche freie Elektrizität, und zwar wird die Elektrizität am stärksten um die hemimorphen Achsen herum; keine Elektrizität erscheint in dem neutralen Ort.

Geht die Temperatur herauf, so wird der analoge Pol positiv elektrisch und der antiloge negativ; geht sie herunter, so dreht sich die Erscheinung um. Darum heißen die hemimorphen Kristalle auch elektrisch-aktiv.

Die Figg. 294, 295, 296, 297 zeigen, nach L. Brugnatelli, die hemimorphe Ausbildung der Pikrinsäure $C_6H_3(NO_2)_3O$. Die mit positiver Elektrizität beladene Seite der Kristalle ist mit Schwefelpulver, die mit negativer Elektrizität beladene Seite mit Mennigpulver bedeckt. Da wo keine freie Elektrizität sich angesammelt hat, sind die Kristalle rein geblieben, also neutral.

Fig. 294. Fig. 295. Fig. 296. Fig. 297.



§ 102. Drehungsvermögen der Kristalle.

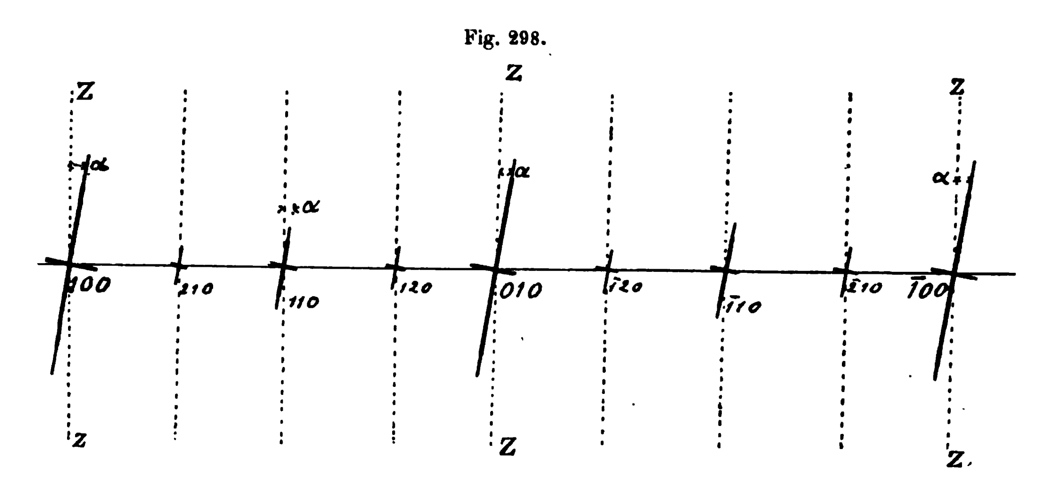
Gewisse Harmonien der Kristalle, welche durch keine Harmonieebene charakterisiert sind, lassen sich bestimmen durch Harmonieachsen, welche drehend wirken. Betrachten wir eine solche drehende Harmonieachse und eine durch sie gehende Einheitsfläche. Eine solche Fläche wird drehende Lichtfiguren zeigen, wie sie z. B. in den Figg. 203be, 204bd, 205b und 206bd, S. 149, 150, 151, dargestellt sind. Das Drehungsvermögen wird gemessen werden müssen durch die Stärke der Drehung der Lichtfigur, welche eine Kristallfläche angibt, die durch die in Betracht kommende Drehungsachse geht. Zwei im entgegengesetzten Sinn drehende Kristallharmonien ergänzen sich zu einer höheren Harmonie oder zur Holoharmonie, oder zur Grundgestalt.

Wir werden zu dem Wert des Drehungsvermögens kommen, wenn wir alle Flächen betrachten, welche eine Zone bilden, und eine Anzahl Zonen auf gleiche Weise behandeln.

Die Fig. 298 soll die Lichtschnur einer diharmonischen Zone darstellen, wo z. B. die Flächen (100), (010), (110), ($\bar{1}$10), (210), (120), ($\bar{1}$20) und ($\bar{2}$10) zur Ausbildung gelangt sein mögen.

Da die betreffende Zone Drehungsvermögen aufweisen soll, so wird die Lichtschnur aus Lichtbildern bestehen, welche drehend sind. Um die Drehung zu finden, denke man sich die Richtung der Zonenachse gezogen, welche in der Fig. 298 durch die punktierten Linien Z, Z ... angegeben ist. Nun bildet die Hauptrichtung der Lichtbilder einen Winkel α mit der Zonenachse Z; es stellt also α das Drehungsvermögen der Zone dar.

Fig. 298.



Für jede Zone läßt sich ein Drehungsvermögen bestimmen, indem entweder die natürlichen Lichtbilder, oder die durch künstliche Ätzfiguren erhaltenen Lichtfiguren in Betracht gezogen werden. Jede Zone gibt ein eigenes Drehungsvermögen. Von allen Drehungsvermögen, welche auf diese Art bestimmt werden, gibt es Maximalwerte.

Die Harmonien, welche das Drehungsvermögen zeigen, sind vorerst die gyroedrischen Hemiharmonien (34), (24), (23) und (26); ferner gehören dazu die tetraedische Tetartoharmonie (33), die sphenoidische Tetartoharmonie (42) und die rhomboedrische Hemiharmonie (63).

Unter Drehungsachse wird jene Richtung verstanden, nach welcher das Drehungsvermögen ein Maximum erreicht.

Folgende Harmonien besitzen sicher eine Anzahl Drehungsachsen je in den hier beibemerkten Richtungen:

Die gyroedrische Hemiharmonie (34) mit den Drehungsachsen {[100]}, {[111]} und {[110]}.

Die gyroedrische Hemiharmonie (24) mit den Drehungsachsen [001] und {[100]}, {[110]},

die gyroedrische Tetartoharmonie (33) mit den Drehungsachsen {[111]} und {[100]},

die sphenoidische Tetartoharmonie (42) mit den 3 Drehungsachsen [100], [001], [010],

die gyroedrische Hemiharmonie (23),

die rhomboedrische Hemiharmonie (63) mit je 4 Drehungsachsen $[111]$, $[1\bar{1}0]$, $[\bar{1}01]$, $[01\bar{1}]$,

die gyroedrische Hemiharmonie (26) mit 7 Drehungsachsen $[0001]$, $[1000]$, $[0100]$, $[0010]$, $[1\bar{1}00]$, $[01\bar{1}0]$, $[\bar{1}010]$.

Es ist keineswegs eine leichte Aufgabe, die maximalen Drehungsvermögen herauszufinden, es bedarf vieler Ätzversuche, bis die Maxima des Winkels α erforscht sind. Leider stehen uns zu diesen Forschungen noch keine andern Hülfsmittel als die Ätzung zu Gebote.

Bei einigen drehenden Kristallen ist nachgewiesen, daß sie die Polarisationsebene des Lichtes drehen und zwar nach einer der Drehungsachsen. Viele Kristalle, wenn sie gelöst werden, bewirken, daß die Lösung die Polarisationsebene des Lichtes dreht. Man nennt sie für das Licht aktive Kristalle. Solche Kristalle sind unter anderm der Quarz, der Zinnober, das schwefelsaure Strychnin, die Weinsäure (razemische Säure), die weinsauren Salze (Razemate) usw. Offenbar sind es ganz bestimmte Verhältnisse, welche dieses Drehungsvermögen bei der Polarisationsebene zur Erscheinung bringen. Giebt es aktive Kristalle, welche nach rechts drehen, so gibt es ganz analoge aktive Kristalle, welche nach links drehen. Beide zusammengenommen bestimmen die Holoharmonie der Grundgestalt.

Kapitel VI.

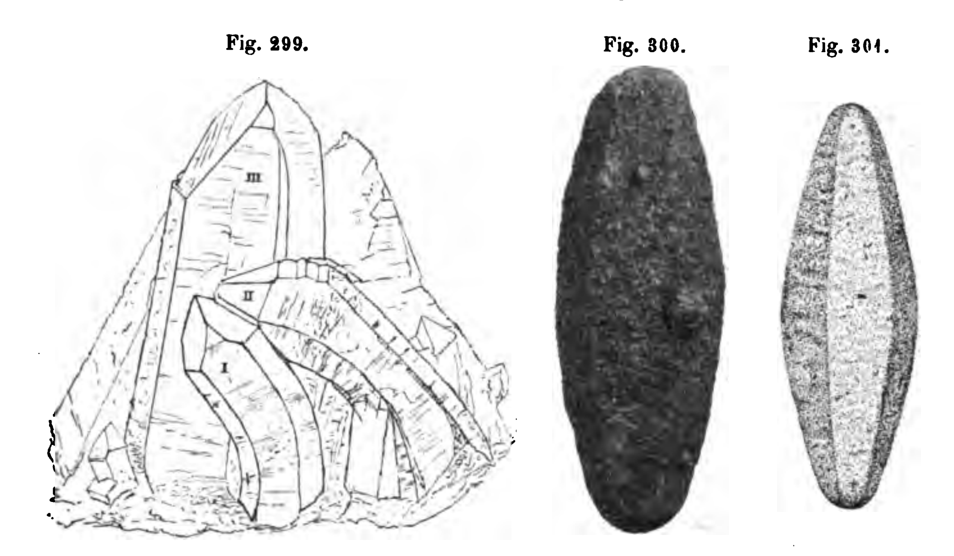
Die Gestalten der Kristalle.

§ 103. Mannigfaltigkeit der Kristallgestalten.

Es ist äußerst selten, daß man in den Besitz von Kristallen kommt, welche eine so genaue Abgrenzung haben, daß sie vollständig der Harmonie genügen, die ihnen zukommt. Auch künstliche Kristalle, bei deren Erzeugung man mit der größten Sorgfalt alle störenden Einflüsse vermeiden kann, genügen nicht absolut den für die Harmonie gestellten Bedingungen. Bald ist es die strömende und wirbelnde Bewegung der umgebenden Flüssigkeit, in der die Kristalle wachsen, welche die Störung hervorruft; bald ist es die verschiedene Temperatur in der Flüssigkeit, welche eine Schwankung in der Erzeugungskraft mit sich bringt und die entstehende Homogenität stört. Dann wieder rührt die Störung von der Bewegung der entstandenen Kristalle her; oder es wirken die Wände störend ein, in deren Nähe die Kristalle wachsen und zu liegen kommen. Auch spätere Wirkungen können die schon entstandenen Kristallgestalten verwischen oder ändern, wie z. B. Druck- oder Biegungskraft. Um hiervon ein Beispiel zu geben, sei in der Fig. 299 ein gebogener Quarzkristall, nach A. Bodmer-Beder, abgebildet, bei dem durch Druck die Flächen teilweise gekrümmt wurden. Auch eine spätere Ätzung oder Reibung ist imstande, eine Krümmung auf den Flächen zu erzeugen oder Kanten abzustumpfen.

Ungewöhnlich gerundete Kalzitkristalle sind nach S. L. Penfield in Fig. 300 und 301 abgebildet. In § 6, S. 7, haben wir schon eine ungewöhnliche Gestalt des Kupferkieses, nach S. L. Penfield, eine sehr komplizierte Gestalt, ebenfalls nach S. L. Penfield, des Parisits und eine durch krumme Flächen abgegrenzte Gestalt des Herschelitkristalls kennen gelernt.

Fig. 299. Fig. 300. Fig. 301.



Die Kristallographie hat mit einem mannigfaltigen von der Natur gelieferten Material zu tun; sie muß dasselbe ordnen, orientieren und suchen die Konstanten desselben herauszubekommen.

Die äußern Wirkungen, welche störend in die Entwicklung der Kristalle eingreifen, sind von zweierlei Art: die eine betrifft die Homogenität des Kristalls, die andere aber nur seine Gestalt. Entsteht ein Gebilde, welches nicht homogen ist, so gehört es nicht unter die Kristalle, es kann aber in einzelne Kristallpartikel zerlegt werden. Der in Fig. 299 dargestellte gebogene Quarzkristall ist genau genommen kein homogenes Gebilde, er besteht aus verschiedenen Kristallstücken, die zusammenhängen.

Nicht nur die materielle Kraft ist imstande störende Kristallgestalten zur Welt zu bringen, sondern auch die organische Kraft. Die Kalkausscheidungen der Muscheln bestehen aus Kalzit, Aragonit oder Chonzit und sind kristallisiert. Sie setzen sich aber aus vielen Kriställchen zusammen, die unter sich verschiedene Gestalten darstellen und miteinander durch eine organische Substanz verkittet sind. Die Platte der Echiniden erscheint, wenn sie versteinert ist, als aus einem einzigen Kalzitkristall bestehend, den man aus seinen Spaltungen erkennt; aber die Gestalt der Platte ist ganz eigenartig.

Alle diese Wirkungen, welche dahin gehen, den Kristallen eine Gestalt zu schaffen, die weit von derjenigen der eigenen Harmoniegestalt sich entfernt, sind für das Bestehen des Kristalls als »zufällig« zu betrachten. Wir haben schon kennen gelernt, wie man imstande ist, das Zufällige von dem Konstanten

zu unterscheiden. Dazu ist es nämlich erforderlich, eine recht große Anzahl von Kristallindividuen zur Verfügung zu haben. Was konstant ist, tritt bei den meisten Kristallindividuen auf und hat daher eine große Wahrscheinlichkeit; das Zufällige kommt nur vereinzelt vor, hat eine recht kleine Wahrscheinlichkeit. Wir sind also imstande, die Zufälligkeit zu erkennen und von der Harmonie sowie von der Homogenität der Kristalle wegzuschaffen.

§ 104. Automorphe, allotriomorphe und pseudomorphe Kristalle.

Bei den von der Natur gelieferten Kristallen, wie sehr sie auch gestört sein mögen, kommen zweierlei sofort zu unterscheidende Arten vor.

Die eine Art wird automorph genannt. Es sind solche Kristalle, bei welchen gewisse eigene Kristallformen genau zur Ausbildung gelangt sind, so daß man aus derselben die entsprechende Grundgestalt und Harmonie erkennt und sogar bestimmen kann. Alle übrigen Kristalle heißen allotriomorph. Bei den allotriomorphen Kristallen sind alle eignen Kristallformen vollständig zerstört, sodaß daraus weder die Grundgestalt noch die Tracht zum Vorschein kommen kann.

Vollständig automorph kann ein Kristall nie sein, was aus den frühern Betrachtungen selbstverständlich klar hervorgeht.

Denkt man sich eine Reihe von Ausbildungen, die den automorphen zum allotriomorphen Kristall hinüberführen, so wird man sagen dürfen, daß ein Kristall mehr automorph sei als ein anderer, wenn der erstere sich besser für die Bestimmung seiner Konstanten eignet als der zweite.

Die Wirkungen, welche die automorphen Kristalle hervorbringen und diejenigen, welche die allotriomorphen Kristalle hervorrufen, müssen natürlich voneinander verschieden sein. Man kann daher diese Verschiedenheit von automorph und allotriomorph, indem man auf die entsprechenden Wirkungen zurückkommt, als ein ferneres Mittel benutzen, um die Entstehungsweise der Kristalle zu erforschen.

Die Verschiedenheit der automorphen und der allotriomorphen Kristalle dient auch vortrefflich dazu, die kristallinen Gesteine in zwei große Abteilungen zu klassifizieren.

Man nennt kristalline Gesteine solche, die aus lauter kristallisierten Mineralien bestehen. Alle Kristalle darin sind nicht automorph, da sonst viele hohle Zwischenräume vorkommen müßten. Es können aber Fälle eintreten, wo die automorphen Kristalle sehr zahlreich sind, andere dagegen, wo die allotriomorphen vorherrschen. Daß daher eine bedeutende Verschiedenheit der Gesteinstrukturen erscheinen kann, ist leicht begreiflich. Im ersten Fall, wenn also die automorphen Kristalle vorherrschen, nennt man die Struktur panidiomorph, im andern Fall hypidiomorph. Der Aplit z. B. ist meistens panidiomorph, der Granit dagegen hypidiomorph. Beide Gesteine haben einer verschiedenen Entstehungsart ihr Dasein zu verdanken. Das Aplitgestein ist aus der Spaltung des vorhandenen Magmas entstanden und hat rasch die kristallinische Struktur erhalten, während der Granit die Zusammensetzung des hervortretenden Magmas besitzt und langsam erstarrt ist.

Es gibt Kristalle, welche Gestalten zeigen, die wegen der aus ihnen hervorgehenden Konstanten und Harmonien andern Kristallen zukommen. Stellt sich also der Fall ein, daß ein Kristall mit einer Gestalt versehen ist, die einem andern Kristall eigen ist, so heißt er ein pseudomorpher Kristall. Der pseudomorphe Kristall gehört zu den allotriomorphen. Die pseudomorphen Kristalle erscheinen in jeder ihrer Beziehungen trügerisch, wodurch man sie erkennt; sie zeigen eine gewisse Grundgestalt, dabei aber haben sie auf ihren Oberflächen harmonische Eigenschaften, welche zu ihrer Grundgestalt nicht passen. Beispiele: Der Eisenglanz, dessen Hemiharmonie rhomboedrisch (63) ist, erscheint nicht selten mit den Gestalten des Schwefelkieses, dessen Hemiharmonie pentagonal $(33)^{\sigma}$ ist. Der Cerussit, dessen Harmonie sechsgliedrig ist, tritt manchmal in derjenigen Harmonie auf, welche dem Anglesit, dessen Harmonie sich der viergliedrigen nähert, eigen ist. Auch das Kieselzinkerz (hemimorph) erscheint pseudomorph nach Kalzit, Smithsonit, nach Zinkblende usw.

Interessant sind die pseudomorphen Erscheinungen von Oligoklas nach Leuzit (Wiesental in Böhmen, Hernikerland, Italien), von Eisenglanz nach Magnetit, von Aragonit nach Gips, von Bornit nach Kupferglanz, von Schwefelkies nach Magnetkies, von Bleiglanz nach Pyromorphit, von Steatit nach Enstatit, von Serpentin nach Olivin, von Epidot nach Granat {110}, nach A. Bodmer-Beder (Truns, Bündner-Oberland) usw.

Die pseudomorphen Kristalle müssen, wenn man sie Kristalle nennen will, homogen und anisotrop in Bezug auf die Kohäsion sein; sie müssen daher an der Hand derselben physikalischen Erscheinungen geprüft werden können wie alle automorphen Kristalle. Durch Auflösung und Ätzfiguren können ihre Grundgestalt, ihre Harmonie und ihre Konstanten zum Ausdruck kommen.

Man pflegt als Pseudomorphosen zu bezeichnen alle jene Aggregate, Produkte, Substanzaggregate, auch amorphe Körper, welche Gestalt angenommen haben, die einem Kristall eigen ist. Solche Aggregate fallen also nicht ins Gebiet der Kristallographie.

Es ist ersichtlich, daß die pseudomorphen Kristalle eine andere Entstehung haben müssen, als die automorphen Kristalle. Sie müssen nämlich aus schon bestehenden Kristallen hervorgehen durch molekulare Umsetzung ohne Ortsveränderung der Moleküle. Wird z. B. der Schwefelkies (FeS_2) genügend oxydiert, so entsteht der Eisenglanz (Fe_2O_3), indem SO_2 entweicht. Die einzelnen Teilchen des Schwefelkieses bleiben aber, indem sie Teilchen des Eisenglanzes werden. Diese Veränderung geschieht meistens von der Oberfläche aus und schreitet einwärts.

§ 105. Verschiedenheit der Flächen und Zonen.

Wenn wir von den großen Störungen absehen, welche die Kristalle während ihres Wachstums oder nach demselben stark verändern, und nur die kleinen Störungen ins Auge fassen, welche wahrscheinlicher sind als die erstern, und zwar um so wahrscheinlicher, je kleiner sie sind, so können wir die Beobachtung machen, daß diese Störungen nur in der Nähe der herrschenden Flächen und

Zonen der Grundgestalt sich vollziehen. Man hat die in der Nachbarschaft dieser Flächen und Zonen vorkommenden und in ihrer Lage nahestehenden Flächen »Vizinalflächen« genannt (§ 14). Zu diesen Vizinalflächen gehören auch die Ätzflächen, welche die Harmonie der Kristalle bestimmen. Jede kleine Flächenabweichung von der idealen Grundgestalt wird vizinal geheißen. Will man eine Vizinalfläche durch rationale Indizes feststellen, so wird sie recht hohe Indizes bekommen müssen. Jede Vizinalfläche, mag sie liegen, wie sie wolle, mag sie künstlich oder natürlich entstanden sein, kann durch rationale Indizes angegeben werden, wenn nur die Indizes recht groß genommen sind. Eine natürliche Vizinalfläche hat eine sehr kleine Ausdehnung; ihre Ausdehnung wird aber um so größer, je mehr sie den idealen Flächen der Grundgestalt sich nähert.

Die Vizinalflächen bringen Lichtfiguren hervor, welche in der Nähe der idealen Pole und Zonenkreise der Grundgestalt zu liegen kommen, jedoch diejenigen Lichtfiguren, welche der Harmonie der Kristalle angehören, stören.

Es ist erklärlich, weshalb die Vizinalflächen, d. h. die Störungen, in der Nähe der Einheitsflächen und Einheitszonen der Grundgestalt liegen müssen. Die Einheitsflächen entsprechen eben den Minima der Kohäsionskraft; in der Nähe dieser Flächen ändert sich also die Kohäsionskraft nicht, sie bleibt immer ein Minimum, daher erfolgt auch keine Änderung des Wachstums des Kristalls in deren Nähe, und folglich wird die Entstehung derselben Fläche in ihrer Lage um sehr wenig geändert.

§ 106. Aufgewachsene und schwebende Kristalle.

Die Kristalle gestalten sich verschieden, je nachdem sie aufgewachsen oder schwebend zur Entwicklung gelangen. Die erstern wachsen sitzend, daher ruhig, und erhalten ringsherum eine freie Entwicklung außer an der Sitzstelle, wo sie natürlich den Eindruck des Trägers annehmen. Diese in den Drusen oder Höhlen des Gebirges aufgewachsenen Kristalle haben das reiche wissenschaftliche Material geliefert, welches unsere mineralogischen Museen ziert. Sie sind die best automorph entwickelten Kristalle, welche man kennt. Sie haben uns die Grundgestalten und Harmonien geliefert.

Die schwebenden Kristalle, nämlich die, welche sich in einer Flüssigkeit schwebend bilden, tragen im Anfang ihrer Entwicklung das Merkmal von absolutem Automorphismus, da sie mit keinem festen Körper in Berührung gekommen sind. Aber solche ideale Kristalle verlieren den Automorphismus recht bald, da sie durch ihre eigene Bewegung und die strömende Flüssigkeit in ihrem Wachstum beeinflußt werden.

Es gibt Gesteine, bei welchen die automorphen schwebenden Kristalle stark in den Vordergrund treten im Vergleich mit andern Kristallen, welche viel kleiner sind als die erstern und die übrige Masse des Gesteins bilden. Man nennt diese erstern »Einsprenglinge« oder Porphyrkristalle, während die übrige Masse »Grundmasse« heißt. Bei diesen Gesteinen sind die Einsprenglinge zuerst entstanden, schwebend, während die umgebende Masse noch

meist flüssig war. Letztere ist schneller erstarrt, sodaß nur eine mehr oder weniger große Anzahl Kristalle von geringer Größe oder gar keine sich ausscheiden oder wachsen konnten. Die Struktur dieser Gesteine nennt man porphyrisch. Die kristallinen Gesteine, welche keine Einsprenglinge haben, heißen körnig.

§ 107. Größe der Kristalle.

Die Kristallgröße wechselt außerordentlich, oft bei einem und demselben Mineral; so gibt es Quarzindividuen, welche erst mit dem Mikroskop und nur mit den stärksten Objektiven zu erkennen sind, anderseits erreichen Quarzkristalle enorme Dimensionen, z. B. aus Madagaskar bis 1 m Länge; ein Quarzkristall aus Fischbach (im Wallis), der im botanischen Garten von Paris aufgestellt ist, wiegt 400 kg und mißt 1 m in Länge und Breite; der große Quarzkristall des römischen mineralogischen Museums wiegt ca. 300 kg.

Kalkspatkristalle vieler Kalksteine sind mikroskopisch klein, während andere Kristalle dieses Minerals bedeutende Größen erreichen, wie z. B. ein solcher Kalkspatkristall im Münchner Staatsmuseum fast $\frac{1}{2}$ m Durchmesser zeigt.

Der Apatit kommt in den Eruptivgesteinen als ganz feine nur unter dem Mikroskop erkennbare Nädelchen vor; anderseits gibt es Kristalle von mehreren Dezimetern Länge (New-York, Kanada). Ein Apatitkristall des Museums in Chicago weist ca. 3 m Länge und $\frac{1}{2}$ m Durchmesser auf.

Die Rutilkristalle sind gewöhnlich dünn und kurz; sie können aber auch von großer Länge (27 cm) und dabei dünn wie Haare erscheinen (z. B. die Rutileinschlüsse in den großen Quarzkristallen des Züricher Museums).

In der Grafschaft Jefferson (U. S. A.) fand man Flußspatwürfel von über 30 cm Kante; in Amerika 12 m lange und 1 m breite Spodumenkristalle (Pyroxen).

Es gibt im Serail von Taj-Kapi (Eigentum des Sultans) in Konstantinopel Edelsteine, welche aus großen Kristallen herstammen müssen; so wurden dort vorgefunden eine Smaragdkugel von 8 cm Durchmesser und ein 22 cm langes und 2 kg schweres Smaragdei.

Die künstlich erzeugten Diamantkriställchen sind äußerst fein (sie dienen als Schleifmaterial). Große Diamanten sind selten gefunden worden. Der größte existierende soll der sein, den der Rajah von Mattan auf Borneo besitzt; derselbe ist auf der Insel gefunden und soll 363 Karat (0,744 kg) wiegen. Der Koh-i-noor (Berg des Lichts) soll ursprünglich 800 Karat (1,640 kg) gewogen haben.

Diese Beispiele sollen für die Tatsache sprechen, daß die Kristalle in unbegrenzten Dimensionen erscheinen können und daß daher in der Größe kein Merkmal für die Kristalle aufgestellt werden kann. Doch kommen Kristalle vor, welche nie über eine kleine Grenze hinausgehen, während andere irgend welche beliebige Größe haben können; z. B. erreichen die größten Hyazinthkristalle kaum 12 mm Länge und 14 mm Dicke. Dabei spielen Zeit und Entstehungsweise der Kristalle die Hauptrolle.

§ 108. Ausgleichungsprinzip der Störungen bei den Kristallen.

Wie oben bemerkt wurde, erscheinen die Kristalle in der Natur nie vollkommen homogen, wie in der Definition der Kristalle inbegriffen ist, und kommen nie mit Ebenenflächen begrenzt vor, welche den betreffenden Grundgestalten angehören. Alle hier bezüglichen Abweichungen haben wir Störungen genannt. Dieselben geben sich äußerlich durch die »Vizinalflächen« kund. Die Aufgabe besteht nun darin, die Störungen zu erkennen und wegzuschaffen.

Man kann die kleinen Störungen der Kristallgestalten und der Homogenität wie kleine Beobachtungsfehler behandeln. Beide sind zufällig, da sie nicht vorhergesehen werden können.

Hat man eine große Anzahl von Beobachtungen einer gewissen physikalischen Größe, welche alle mit derselben Sorgfalt gemacht worden sind, gesammelt, so werden alle im voraus die gleiche Wahrscheinlichkeit beanspruchen; d. h. jede beobachtete Größe darf mit derselben Wahrscheinlichkeit für die wahre unbekannte Größe gewählt werden. Ebenso werden wir zu verfahren haben, wenn es sich um eine große Anzahl von Kristallgestalten einer chemischen Substanz, welche recht wenig voneinander abweichen, handelt; wir werden im voraus annehmen müssen, daß jede dieser Gestalten mit derselben Wahrscheinlichkeit die entsprechende Grundgestalt darstelle; und zwar wird dieser Satz um so richtiger sein, je weniger diese einzelnen Kristallgestalten sich voneinander entfernen.

Es handelt sich nun erstens darum, die Ausgleichung der in den vielen Kristallgestalten vorkommenden Störungen zu erreichen; oder mit andern Worten, eine ideale Gestalt aus den zur Verfügung stehenden Kristallen zu berechnen, welche mit der größten Wahrscheinlichkeit die Grundgestalt darstellen soll. Halten wir den obigen Vergleich zwischen Störungen und Fehlern der Beobachtung fest, so wird die hier gestellte Aufgabe durch die Methode der kleinsten Quadrate gelöst werden müssen. Das will heißen, daß diejenige von allen aus den Kristallgestalten sich ergebende mittlere Gestalt die größte Wahrscheinlichkeit, um die Grundgestalt darzustellen, beanspruchen wird, welche Störungen, deren Summe der Quadrate ein Minimum ist, entsprechen wird.

Denke man sich also eine mittlere Gestalt aus den gegebenen Kristallgestalten gewonnen; suche man die Differenzen zwischen jener und den letztern; erhebe man dieselben zum Quadrat und berechne daraus die Summe. Man kann nun zahlreiche dieser mittlern Gestalten wählen und auf gleiche Weise für jede die Summe der Quadrate der Differenzen berechnen. Die Regel sagt: Diejenige mittlere Gestalt wird die größte Wahrscheinlichkeit beanspruchen, welche dem Minimum aus allen berechneten Summen der Quadrate der Differenzen entspricht.

Zweitens wird es sich darum handeln, welche Störungen wir in Rechnung bringen sollen. Eine Ausgleichung der Störungen beginnt schon bei der Orientierung des Kristalls im Goniometer.

Wir wollen vorerst kurz den Verlauf der Orientierung (§ 22) wiederholen. Herrscht eine Zone vor, so wird am bequemsten ihre Achse parallel der Äquatorachse des Goniometers orientiert (§ 21, Aufgabe 5), dabei wird die mittlere Lage der Lichtschnur der Zone in den Äquator kommen. Wir haben dadurch die mittlere Lage der Zone bestimmt. Herrscht eine Fläche vor, so wird sie polar eingestellt, d. h. der Mittelpunkt der Lichtfigur wird für die Lage der Fläche angenommen und nach Aufgabe 4, § 21, verfahren. Ist der Kristall isoharmonisch (drei- und viergliedrig), so wird diejenige Fläche oder Zone zur Orientierung gewählt, welche durch die schärfste Lichtfigur bestimmt ist. Hat der Kristall deutliche Spaltbarkeit, so wird letztere für die Orientierung benutzt.

Indem wir diese erste Orientierung der Kristalle voraussetzen, machen wir die zulässige Annahme, daß eine Zone, oder eine Fläche, welche durch eine deutliche Lichtschnur resp. Lichtstern ausgezeichnet ist, die Ausgleichung der Fehler durch das einfache Einstellen, äquatorial oder polar, erreicht wird. Wir nehmen also an, daß alle gleichartigen Kristalle dasjenige Element gemeinschaftlich haben, welches durch ein sehr scharfes Lichtbild gegeben ist.

Dieser ersten Orientierung folgt eine zweite, welche darin besteht, den Anfangspunkt der Oralwinkel im Äquator des Goniometers festzustellen. Der Anfangspunkt muß für alle zur Verfügung stehenden Kristalle derselbe sein. Auch für diese zweite Orientierung wird die best ausgesprochene Zone oder Fläche gewählt.

Dadurch ist die zweite Ausgleichung der Fehler erreicht.

Eine dritte Orientierung ist notwendig, um den Sinn der Zählung der Oralwinkel zu bestimmen. Diese dritte Orientierung ist aber nur grob.

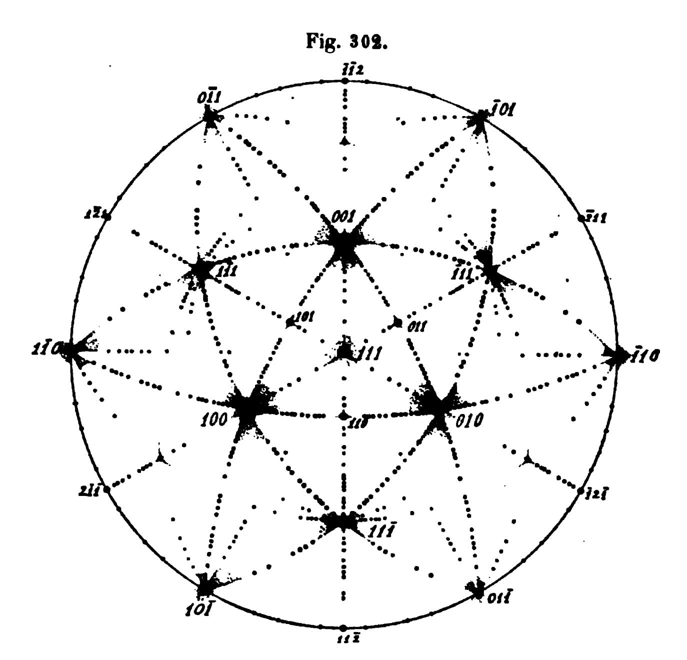
Geht aus der physikalischen Untersuchung der einzelnen Kristallflächen hervor, daß absolut gleichwertige Elemente vorliegen, dann fällt die Ausgleichung durch obige Orientierung vollständig aus. In diesem Fall haben wir die gleichwertigen Elemente der einzelnen Kristalle der Art nebeneinander zu bringen daß die Summe der Quadrate der Differenzen ein Minimum wird. Man kann eine solche Ausgleichung koordinierende oder beziehende nennen. Man erreicht die beziehende Ausgleichung auch durch das zweikreisige Goniometer, indem die absolut gleichwertigen Elemente immer dieselbe Lage in bezug auf die Äquatorachse des Goniometers erhalten.

Die Ausgleichung durch Orientierung im Goniometer gibt im allgemeinen noch nicht die Konstanten der Grundgestalt vollständig. Denn liefert sie nur 2 Zonen, so fehlen noch deren 4; liefert sie dagegen 2 Flächen, so bleiben noch deren 2 übrig usw. Ist dagegen die erste Ausgleichung durch die beziehende Orientierung erfolgt, so bleibt noch gar kein Element der Grundgestalt endgültig fixiert.

Nachdem also die beste Orientierung für jede Kristallgestalt getroffen worden ist und die Lage aller Signalreflexe und Lichtfiguren durch Oralwinkel und Polarwinkel festgestellt ist, handelt es sich darum, Flächen und Zonen zu benutzen, um die wahrscheinlichste Ausgleichung zu erreichen.

Es handelt sich z. B. um Kalkspatkristalle. Man denke sich, daß die ganze Umgrenzung der Kristalle in recht kleine gleiche Flächenelemente eingeteilt werde, welche als Ebenenelemente angesehen werden dürfen. Jedes Ebenenelement liefert einen kleinen Signalreflex von einer gewissen kleinen Lichtstärke. Jeder Reflex wird nun mit Oral- und Polarwinkel festgestellt und auf die stereographische Projektion aufgetragen. Die Fig. 302 stellt das stereographische Bild des Kalkspates dar, wenn eine sehr große Zahl von Kalkspatindividuen untersucht wird. Es zeigt sich dort, daß einige Reflexe durch dicke Punkte, andere durch weniger dicke Punkte, wieder andere durch sehr dünne Punkte angegeben sind. Die Reflexe müssen um so dicker in der Projektion erscheinen, je mehr Reflexe übereinander und nebeneinander zu liegen kommen, d. h. je ausgedehnter eine Ebenenfläche ist.

Fig. 302.



Vor allem erscheinen stark beleuchtet die Spaltungsörter (100), (010) und (001)[1]), daraufhin kommen die Örter $\{11\bar{1}\}$, dann (111), ferner $\{011\}$ und $\{\bar{1}10\}$. Man sieht aus der Figur, daß diese stark beleuchteten Örter scharf angegeben werden können.

Auch die Zonen [100], [010], [001] sind sehr stark von Lichtreflexen besetzt; daraufhin folgen die drei Zonen $\{[101]\}$, ferner die Zone $[11\bar{1}]$ und weniger deutlich die Zonen $\{[10\bar{1}]\}$.

Die sich daraus ergebende Grundgestalt ist einleuchtend: die Flächen $(1\bar{1}0)$, $(1\bar{1}1)$, (001), $(\bar{1}11)$ und $(\bar{1}10)$ werden in einer Zone gewählt werden müssen;

1) Hier sind die Spaltungsflächen des Kalkspates mit (100), (010) und (001) bezeichnet, da sie gewöhnlich so bezeichnet werden. Bei den dreigliedrigen Grundgestalten haben wir sie mit (110), (011) und (101) bezeichnet (S. 116, 117).

ebenso die Flächen $(10\bar{1})$, $(11\bar{1})$, (010), $(\bar{1}11)$ und $(\bar{1}01)$ usw. Und nur unter dieser Bedingung wird die Summe der Quadrate der Störungen (oder Abweichungen) ein Minimum.

Aus diesen Tatsachen der Erfahrung geht auch das Grundgesetz der Kristalle hervor; d. h. daß die als Punkte oder Kreise gedachten Örter auf der stereographischen Projektion einfache rationale Indizes erhalten, welche durch eine große Anzahl von Punkten bestimmt sind, die nahe aneinander liegen.

Wir sehen aus dem Beispiel der Kalkspatkristalle zugleich, daß die Lichtreflexe den Lagen der Einheitsflächen und Einheitszonen recht nahe kommen; und zwar sind sie um so zahlreicher, je näher sie den genannten Örtern kommen. Eine Ausgleichung der Beobachtungen wird derart vorgenommen werden müssen, daß die Reflexe im voraus gleiche Fehler besitzen. Wir dürfen die Örter der II. und III. Ableitung außer acht lassen, da in der Nähe derselben recht wenige Reflexe liegen.

Ist die Ausgleichung ausgeführt, so ergeben sich die Fehler der Reflexe, welche um so größer erscheinen, je weniger Reflexe beleuchtet sind, d. h. je unwahrscheinlicher sie sind.

Während also vor den ausgeführten Beobachtungen alle Lage der Reflexe mit gleicher Wahrscheinlichkeit angenommen und so in Rechnung eingetragen werden, erreichen sie nach der ausgeführten Ausgleichung eine verschiedene Wahrscheinlichkeit; sie werden nämlich um so wahrscheinlicher, je näher sie aneinander zu liegen kommen.

Man sieht noch aus demselben Beispiel, daß zweierlei Arten von Reflexen zum Vorschein kommen, nämlich:

1. Reflexe, welche in der Nähe eines Einheitsortes (Zonen- oder Flächenort) liegen;
2. Reflexe, welche in der Nähe von zwei Einheitsörtern (Zonen- und Flächenörtern) zu liegen kommen.

Bei dem Kalzit liegen die Reflexe des Ortes (111) nur in der Nähe dieses Flächenortes; die Reflexe des Ortes [111] liegen hauptsächlich nur in der Nähe dieses Zonenortes. Endlich kommen die Reflexe der Örter (100), (010) und (001) in der Nähe gleichzeitig von Flächen- und Zonenörter.

Letztere sind die wahrscheinlichsten, was auch aus dem obigen stereographischen Bild klar erscheint. Nachdem die Ausgleichung vorgenommen und berechnet worden ist, wird es sich herausstellen, ob die Örter der II. und III. Ableitung mit großer Wahrscheinlichkeit sich ergeben. Wir können also an der Hand der Erfahrung prüfen, ob die Örter der II. und III. Ableitung im Kristall angenommen werden dürfen, d. h. ob sie als Minimaörter der Kohäsion eine Bedeutung haben, oder mit andern Worten, ob sie die rationalen konstanten Örter des Kristalls darstellen. Die Örter der IV., V. . . . Ableitung werden zwar auch von Reflexen besetzt sein, aber so selten und so wenig, daß die Wahrscheinlichkeit sie als physikalische Bedeutung anzunehmen, sehr klein ist.

Der Einfachheit halber werden, wie gesagt, alle beobachteten Reflexe der Flächenelemente mit Hilfe der Oral- und Polarwinkel angegeben, damit sie sofort und mit Leichtigkeit in der stereographischen Projektion eingetragen werden können. Viele Kristallographen geben dagegen regelmäßig die Reflexe durch rationale Indizes an. Diese letzte Methode ist nicht gerade anzuraten, da man von recht großen Indizes Gebrauch machen muß, damit die durch dieselben bestimmte Lage der Flächenelemente treulich die beobachteten wiedergeben.

Rationale Indizes sind nur dort zu gebrauchen, wo die Flächen- bezw. Zonenörter mit sehr großer Wahrscheinlichkeit bestimmt werden; sie sind als konstante ideale Örter der Grundgestalt anzusehen, und entsprechen der Lage der Minimalörter der Kristalle, wenn diese von den kleinen Störungen, mit Hilfe der Ausgleichungsmethode, befreit worden sind.

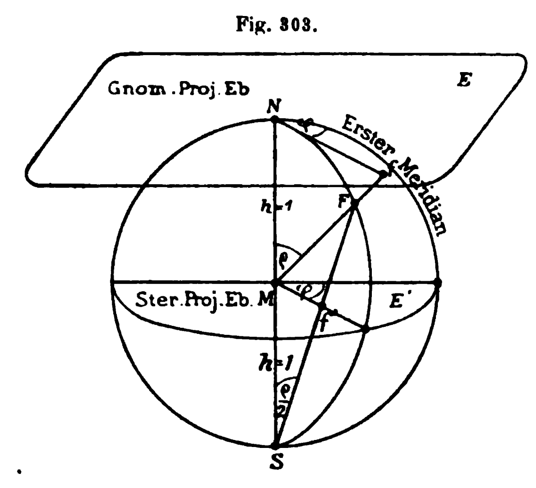
Für die Ausführung der Ausgleichung eignet sich sowohl die stereographische als auch die gnomonische Projektion. Letztere führt zu bequemeren und einfacheren Resultaten als die erstere.

§ 109. Gnomonische Projektion.

Werden die Normalen der Kristallflächen auf einer Ebene projiziert, anstatt auf einer Kugeloberfläche wie bei der stereographischen Projektion, so erhält man die gnomonische Abbildung des Kristalls. Das Zentrum der gnomonischen Projektion heißt das Auge.

Die gnomonische Projektion ist daher eine Zentralperspektive, wo anstatt der Kristallflächen und Kristallkanten die Normalen der Flächen resp. die Zonenebenen projiziert werden. Die Flächen des Kristalls werden infolgedessen durch Pole in der gnomonischen Projektion dargestellt; die Zonen erscheinen als Gerade, da sie die Spuren der Zonenebenen sind.

Fig. 303.



Da wir immer von der stereographischen Abbildung des Kristalls ausgehen, so besteht unsere Aufgabe darin, die gnomonische Projektion aus der stereographischen herzuleiten.

Man wählt die Zeichnungsebene E am besten parallel der Grundebene E' der stereographischen Projektion und tangent an die Grundkugel, wie in Fig. 303 angegeben ist. Daher stellt N das Zentrum der gnomonischen Projektion und M das Zentrum der Grundkugel und der stereographischen Projektion dar.

Ist F der Pol einer Fläche auf der Grundkugel, so verbindet man F mit S und dann F mit dem Zentrum M der Grundkugel. Wo die erste Gerade

die Ebene E' schneidet, ist der Pol der Fläche in der stereographischen Projektion, also f'; und wo die zweite Gerade die Ebene E trifft, ist der Pol derselben Ebene in der gnomonischen Projektion, also f.

Der Pol F ist durch den Oralwinkel φ und den Polarwinkel ϱ bestimmt. Wir sehen gleich ein, daß die Relationen bestehen:

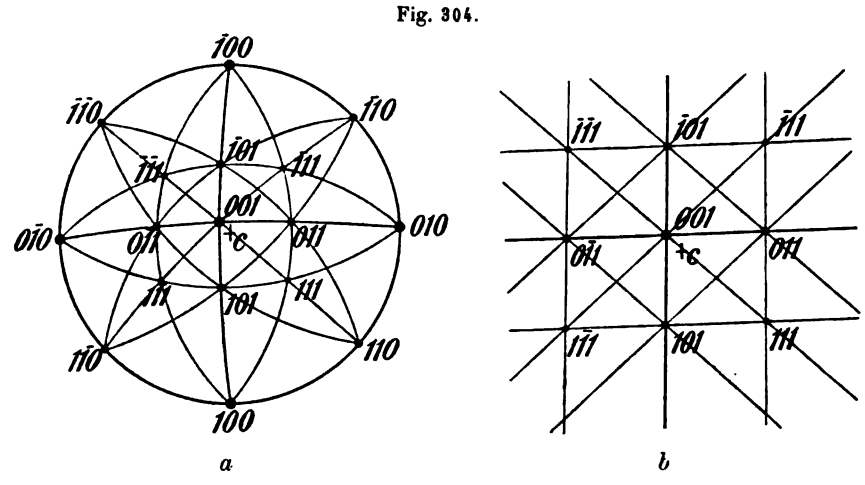
$$(23)\qquad \begin{aligned} Nf &= \operatorname{tang} \varrho \\ \text{und}\quad Mf' &= \operatorname{tang} \tfrac{\varrho}{2}; \end{aligned}$$

hier ist mit Nf der Vektor in der gnomonischen Projektion und mit Mf' der Vektor in der stereographischen Projektion bezeichnet. Der Halbmesser der Grundkugel ist $= 1$. Der Oralwinkel φ kommt in die gnomonische Projektion, sowie in die stereographische Projektion mit derselben wahren Größe.

Durch diese Beziehungen ist es leicht, aus den gemessenen Oral- und Polarwinkeln die Abbildung des Kristalls in stereographischer und gnomonischer Projektion zu bekommen.

Die beistehenden Fig. 304 a und b geben, die eine in stereographischer, die andere in gnomonischer Projektion das Bild derselben viergliedrigen Grundgestalt wieder. Die Zone [001] ist in der gnomonischen Projektion natürlich

Fig. 304.



a b

nicht zu sehen, da alle Pole in derselben ins ∞ fallen. c, Fig. 304 b, ist das Zentrum der gnomonischen Projektion, nämlich der Fußpunkt der Normale, welche vom Zentrum M der Grundkugel, d. h. dem Auge der Projektion, auf die Grundebene E, Fig. 303, gefällt wird.

Der große Vorteil, welchen man durch die gnomonische Projektion erreicht, ist der, daß die Zonen durch Gerade dargestellt, daher durch das Lineal leicht gezogen werden können. Dem gegenüber sind die Winkel zwischen den Zonen in stereographischer Projektion genau gleich den wahren Winkeln, und somit ist die stereographische Abbildung in ihren kleinsten Teilen dem Polarbild auf der Grundkugel ähnlich.

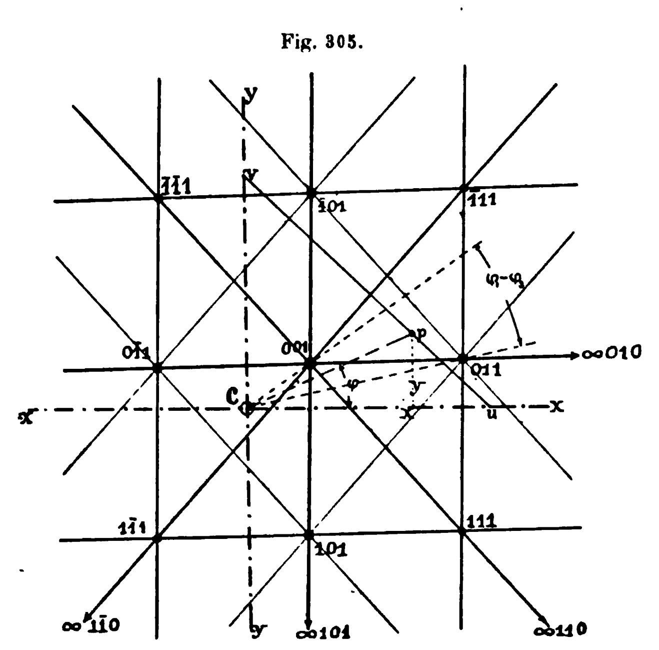
§ 110. Ausführung der Ausgleichung.

Die Ausgleichung darf von zwei verschiedenen Gesichtspunkten aus ausgeführt werden. Man kann erstens annehmen, daß das Grundgesetz der Kristalle im voraus nicht gilt. In diesem Fall stellt sich die Ausgleichung als nicht bedingt dar, d. h. die Ausgleichung ist an keine Bedingungen gebunden. Halten wir an dieser Methode fest, so wird jeder Ort der Grundgestalt unabhängig von den anderen bestimmt. Man nimmt also alle Reflexe beisammen, welche recht nahe aneinander liegen, und berechnet man denjenigen Punkt, welcher dem Minimum der Summe der Fehlerquadrate entspricht. Diese ist die Ausgleichungsmethode, welche allgemein gebraucht wird; denn sie reduziert sich auf das arithmetische Mittel der Messungen. Man nimmt also von allen Oralwinkeln und allen Polarwinkeln das Mittel unabhängig voneinander, also:

$$\varrho_m = \frac{\Sigma \varrho}{n} \text{ und } \varphi_m = \frac{\Sigma \varphi}{n}. \tag{24}$$

Geht man zweitens von der Annahme des Grundgesetzes der Kristalle aus, so wird die Ausgleichung eine bedingte. Wir haben dann die wahrscheinlichsten Punkte nicht unabhängig voneinander, sondern so zu wählen, daß sie in der gnomonischen Projektion auf bestimmten Geraden liegen, und die wahrscheinlichsten Geraden so zu nehmen, daß sie durch bestimmte Punkte gehen. Bei der bedingten Ausgleichung fallen natürlicherweise mehr Beobachtungen ins Gewicht als bei der nicht bedingten. Liegen recht viele Messungen vor, so müssen natürlich beide Methoden zu dem nämlichen Resultat führen. Im allgemeinen wird das nicht genau der Fall sein, und somit kann man nur die bedingte Ausgleichung eine vollständige nennen.

Fig. 305.



Wir können die bedingte Ausgleichung der bei den Kristallen vorhandenen kleinen Störungen durch Rechnung oder durch Zeichnung bewirken. Letzteres ist entschieden vorzuziehen. Wir wollen aber doch untersuchen, wie durch Rechnung die Aufgabe zu behandeln ist.

Durch Rechnung. In Fig. 305 ist die gnomonische Projektion eines viergliedrigen Kristalls dargestellt. Die Pole werden auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem x, y bezogen, dessen Ursprung das Zentrum o der Projektion ist. Jeder Pol wird daher durch zwei Koordinaten x, y festgesetzt. Und da der Vektor $v = \operatorname{tang} \varrho$ ist (ϱ der Polarwinkel), so können wir auch leicht die zwei Koordinaten berechnen:

$$\text{(25)} \qquad \begin{cases} x = \operatorname{tang} \varrho \cdot \cos \varphi, \\ y = \operatorname{tang} \varrho \cdot \sin \varphi, \end{cases}$$

wo φ der Oralwinkel des Poles p ist, vom cx aus gezählt. Indem wir die Lage der Pole festgesetzt haben, können wir auch die Geraden bestimmen, welche durch zwei gegebene Pole gehen. Sind x_1, y_1 und x_2, y_2 die Koordinaten zweier Pole, so berechnen sich die Parameter u, v der durch sie gehenden Geraden folgenderweise:

$$\text{(26)} \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{u} = -\dfrac{y_2 - y_1}{x_1 y_2 - x_2 y_1}, \\[2mm] \dfrac{1}{v} = +\dfrac{x_2 - x_1}{x_1 y_2 - x_2 y_1}. \end{cases}$$

Die Ausgleichung der Fehler oder der Störungen muß nun so vorgenommen werden, daß die vier Pole $(0\bar{1}1)$, (001), (011), (010) in einer Geraden liegen, ebenso die vier Pole $(\bar{1}01)$, (001), (101), (100) ferner die vier Pole $(1\bar{1}1)$, (001), (111), (110) usw.

Die Ausgleichung wird an bestimmte Bedingungsgleichungen gebunden sein, welche aus dem Grundgesetz der Kristalle entspringen müssen. Um sie aufzustellen, bezeichnen wir zuerst die noch unbekannten Koordinaten der in der Fig. 305 aufgetragenen Pole. Die Koordinaten der einzelnen Pole sind folgende:

$$\text{(27)} \qquad \begin{cases} & & \xi'_{00}\eta'_{00} \text{ vom Pol } (001), & \\ & & \xi^\circ_{01}\eta^\circ_{01} \quad \text{»} \quad \text{»} \ (010), & \\ & & \xi^\circ_{10}\eta^\circ_{10} \quad \text{»} \quad \text{»} \ (100), & \\ \xi^\circ_{11}\eta^\circ_{11} & \text{vom Pol } (110), & \xi^\circ_{\bar{1}1}\eta^\circ_{\bar{1}1} & \text{vom Pol } (1\bar{1}0), \\ \xi'_{10}\eta'_{10} & \text{»} \quad \text{»} \ (101), & \xi'_{\bar{1}0}\eta'_{\bar{1}0} & \text{»} \quad \text{»} \ (\bar{1}01), \\ \xi'_{01}\eta'_{01} & \text{»} \quad \text{»} \ (011), & \xi'_{0\bar{1}}\eta'_{0\bar{1}} & \text{»} \quad \text{»} \ (0\bar{1}1), \\ \xi'_{11}\eta'_{11} & \text{»} \quad \text{»} \ (111), & \xi'_{\bar{1}1}\eta'_{\bar{1}1} & \text{»} \quad \text{»} \ (\bar{1}11), \\ \xi'_{\bar{1}\bar{1}}\eta'_{\bar{1}\bar{1}} & \text{»} \quad \text{»} \ (\bar{1}\bar{1}1), & \xi'_{1\bar{1}}\eta'_{1\bar{1}} & \text{»} \quad \text{»} \ (1\bar{1}1). \end{cases}$$

Um auszusprechen, daß die drei Pole $(0\bar{1}1)$, (001) und (011) in einer Geraden liegen, gilt folgende Bedingung:

$$\text{(28a)} \quad (\xi'_{00}\eta'_{01} - \xi'_{01}\eta'_{00}) + (\xi'_{01}\eta'_{0\bar{1}} - \xi'_{0\bar{1}}\eta'_{01}) + (\xi'_{0\bar{1}}\eta'_{00} - \xi'_{00}\eta'_{0\bar{1}}) = 0;$$

daß die drei Pole $(0\bar{1}1)$, (001) und (010) ebenfalls in einer Geraden liegen, gilt:

$$\text{(28b)} \quad (\xi'_{00}\eta'_{0\bar{1}} - \xi'_{0\bar{1}}\eta'_{00}) + (\xi'_{0\bar{1}}\eta^\circ_{01} - \xi^\circ_{01}\eta'_{0\bar{1}}) + (\xi^\circ_{01}\eta'_{00} - \xi'_{00}\eta^\circ_{01}) = 0.$$

Diese sind die Bedingungen für die Zone [100].

Ähnliche Bedingungen werden gelten für die übrigen Zonen. Da 9 Zonen durch vier Einheitspole gehen, und vier durch drei, so werden im ganzen 22 Bedingungsgleichungen vorkommen, denen die Ausgleichung genügen muß.

Die Gleichung irgend einer Zonengeraden in der gnomonischen Projektion wird sein

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + 1 = 0. \tag{29}$$

Wenn wir anstatt x und y die Koordinaten der Pole einsetzen, und anstatt a und b die laufenden Parameter u und v schreiben, so wird das obige Trinom der Geraden nicht vollständig gleich Null sein, da ein kleiner Fehler (Störung) vorliegt. Wir wollen ihn mit $\varDelta$ bezeichnen; dann heißt es

$$\frac{\xi}{u} + \frac{\eta}{v} + 1 = \varDelta, \tag{30}$$

wobei an Stelle von ξ und η die unbekannnten Koordinaten der Pole treten müssen. Indem wir alle 13 Pole berücksichtigen und für u und v alle möglichen Werte einsetzen, welche aus der Beobachtung berechnet worden sind, erhält man eine große Anzahl von Fehlern der Größe $\varDelta$, deren Summe der Quadrate ein Minimum sein muß, also:

$$\Sigma \varDelta^2 = \text{Min}. \tag{31}$$

Um die 22 Bedingungsgleichungen zu berücksichtigen, bezeichnet man mit $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3, \ldots$ 22 Konstanten, welche vorläufig unbekannt bleiben, und indem wir die Gleichung des Minimums ausrechnen, bekommen wir so viele Gleichungen als Koordinaten ξ, η vorhanden sind, also $26 = 2 \times 13$. Wir wollen nur 2 derselben aufschreiben:

$$\tag{32} \left\{ \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} \xi'_{00}\sum\frac{1}{uu} + \eta'_{00}\sum\frac{1}{uv} + \sum\frac{1}{u} \\ + \varkappa_1(\eta'_{11} - \eta'_{\bar{1}\bar{1}}) + \varkappa'_1(\eta^\circ_{11} - \eta^\circ_{\bar{1}\bar{1}}) \\ + \varkappa_2(\eta'_{1\bar{1}} - \eta'_{\bar{1}1}) + \varkappa'_2(\eta'_{1\bar{1}} - \eta'_{\bar{1}1}) \\ + \varkappa_3(\eta'_{\bar{1}0} - \eta'_{10}) + \varkappa'_3(\eta'_{\bar{1}0} - \eta^\circ_{10}) \\ + \varkappa_4(\eta'_{0\bar{1}} - \eta'_{01}) + \varkappa'_4(\eta'_{0\bar{1}} - \eta^\circ_{01}) \end{array} \right\} = 0 \\ \left. \begin{array}{l} \xi'_{00}\sum\frac{1}{uv} + \eta'_{00}\sum\frac{1}{vv} + \sum\frac{1}{v} \\ + \varkappa_1(\xi'_{11} - \xi'_{\bar{1}\bar{1}}) + \varkappa'_1(\xi^\circ_{11} - \xi^\circ_{\bar{1}\bar{1}}) \\ + \varkappa_2(\xi'_{1\bar{1}} - \xi'_{\bar{1}1}) + \varkappa'_2(\xi'_{1\bar{1}} - \xi'_{\bar{1}1}) \\ + \varkappa_3(\xi'_{\bar{1}0} - \xi'_{10}) + \varkappa'_3(\xi'_{\bar{1}0} - \xi^\circ_{10}) \\ + \varkappa_4(\xi'_{0\bar{1}} - \xi'_{01}) + \varkappa'_4(\xi'_{0\bar{1}} - \xi'_{01}) \end{array} \right\} = 0. \end{array} \right.$$

Diese zwei Gleichungen sagen aus, daß der Pol (001) so zu wählen ist, daß seine Lage die wahrscheinlichste sei, und daß alle vier Zonengeraden [100], [010], [110], [1$\bar{1}$0] durch denselben gehen müssen. In diesen 26 Gleichungen kommen 26 zu bestimmende Koordinaten ξ und η vor und 22 unbekannte Größen $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3, \ldots \varkappa'_1, \varkappa'_2, \varkappa'_3, \ldots$, die durch die 22 Bedingungsgleichungen (28) berechnet werden.

Obwohl die 26 Gleichungen linear sind, so ist ihre Lösung doch umständlich; man zieht daher vor, die Ausgleichung graphisch vorzunehmen.

Graphische Behandlung.

Nachdem alle beobachteten Pole durch die zwei Winkel ϱ und φ bestimmt sind, werden sie auf der gnomonischen Projektion durch den Oralwinkel φ und durch den Vektor tang ϱ aufgetragen, und nun werden durch das Lineal die Zonengeraden gezogen. Ist die Orientierung der Kristalle immer durch Einstellung einer Zone geschehen, Aufgabe 6, § 21, so werden in der gnomonischen Projektion die Pole (100), (010), (110), (1$\bar{1}$0) ins Unendliche fallen und daher die Zonengeraden [010], [011], [0$\bar{1}$1] unter sich parallel sein, sowie ebenfalls unter sich parallel die Zonengeraden [100], [101], [$\bar{1}$01] usw., Fig. 305, sind. Mit dem Lineal werden diese Geraden in der Mitte zwischen den vorhandenen Polen leicht zu ziehen sein.

Die Vektoren der Pole werden mit dem angewandten Maßstab abgemessen. Nun berechnet man die Winkel für die Konstanten des Kristalls.

Für Pol (001) seien die Koordinaten tang ϱ_1 und φ_1 und für Pol (010) tang $\varrho_2 = \infty$ und φ_2, so werden wir haben:

$$\cos(\widehat{001\,010}) = \sin\varrho_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2). \tag{33}$$

Es seien ebenfalls für Pol (011) die Koordinaten tang ϱ_3 und φ_3, so wird wie früher:

$$\cos(\widehat{011\,010}) = \sin\varrho_3 \cos(\varphi_3 - \varphi_2). \tag{34}$$

Daraus folgt:

$$(\widehat{001\,011}) = (\widehat{001\,010}) - (\widehat{010\,011}). \tag{35}$$

Und die zwei Konstanten c_2, c_3 werden durch das Verhältnis gegeben:

$$c_2 : c_3 = \sin(\widehat{010\,011}) : \sin(\widehat{001\,011}). \tag{36}$$

Die Winkel $(\widehat{010\,110})$ und $(\widehat{110\,100})$ werden direkt durch die von den Zonengeraden [100], [010] und [110] eingeschlossenen Winkel abgemessen, da die Pole (100), (010), (110) im ∞ liegen.

Die 2 Konstanten c_1 und c_2 werden durch das Verhältnis gegeben:

$$c_1 : c_2 = \sin(\widehat{110\,100}) : \sin(\widehat{110\,010}). \tag{37}$$

Liegt eine viergliedrige Gestalt vor, welche tafelartig ausgebildet ist, so kommt der Pol (001) ins Zentrum der gnomonischen Projektion. In diesem Falle liegen die Pole der Zone [001] nicht im ∞, und die Rechnung vereinfacht sich noch; wir haben in der Tat

$$(\widehat{001\,011}) = \varrho_3, \quad (\widehat{001\,010}) = \varrho_2, \quad \varrho_1 = 0, \tag{38}$$

ferner

$$(\widehat{001\,011}) = \varrho_2 - \varrho_3. \tag{39}$$

Die in der gnomonischen Projektion abgemessenen Strecken (001 · 011) und (001 · 010), sowie (001 · 101) und (001 · 100) geben die Tangenten der betreffenden Winkel. Man hat also

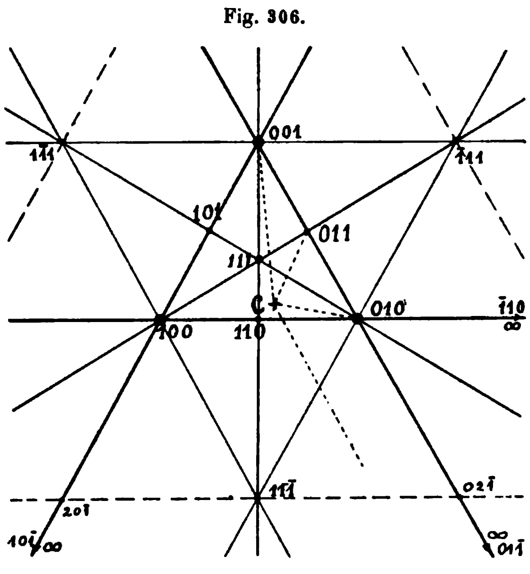
$$
(10)\qquad \begin{cases} c_2 : c_3 = \sin(\widehat{010\;011}) : \sin(\widehat{001\;011}) \\ c_1 : c_3 = \sin(\widehat{100\;101}) : \sin(\widehat{001\;101}) \end{cases}
$$

und folglich

$$
(11)\qquad c_1 : c_2 = \sin(\widehat{100\;101}) : \sin(\widehat{010\;011}).
$$

Der Winkel $(\widehat{001\;010})$ sowie der Winkel $(\widehat{001\;100})$ ist nahezu 90°, somit fallen die Pole (010) und (100) ins Unendliche. Es tritt hier die Notwendigkeit auf, die Kristalle auch mit der Fläche $(00\bar{1})$ polar einzustellen. Aus den zwei sich ergebenden Winkeln $(\widehat{001\;011})$ und $(\widehat{00\bar{1}\;01\bar{1}})$ wird die Lage von (010) bestimmt nach dem Verfahren bei § 35.

Fig. 306.



Analog verhält sich die Sache, wenn die Ausgleichung einer dreigliedrigen oder einer sechsgliedrigen Grundgestalt vorgenommen werden soll.

In der Fig. 306 ist die Ausgleichung einer prismatischen dreigliedrigen Grundgestalt in gnomonischer Projektion ausgeführt. Die Pole $(01\bar{1})$, $(\bar{1}10)$, $(10\bar{1})$ der Zone [111] fallen ins Unendliche.

Bezeichnet man die Koordinaten von (001), (011) und (010) bezw. mit φ_3 und $\tang \varrho_3$, φ, $\tang \varrho$ und ϱ_2, $\tang \varrho_2$, und von $(01\bar{1})$ mit $\tang \varrho_1 = \infty$ und φ_1, so wird man ebenfalls haben, wie vorher:

$$
(12)\qquad \begin{cases} \cos(\widehat{001\;01\bar{1}}) = \sin \varrho_3 \cos(\varphi_3 - \varphi_1) \\ \cos(\widehat{011\;01\bar{1}}) = \sin \varrho \;\cos(\varphi - \varphi_1) \\ \cos(\widehat{010\;01\bar{1}}) = \sin \varrho_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \end{cases}
$$

und somit

$$
(13)\qquad c_2 : c_3 = \sin(\widehat{010\;011}) : \sin(\widehat{001\;011}) \quad \text{usw.}
$$

Ist die Grundgestalt tafelartig ausgebildet, dann fällt das Zentrum c mit (111) zusammen, und wir können dann ausrechnen

$$
(14)\qquad c : b = \sin(\varphi_3 - \varphi) : \sin(\varphi_2 - \varphi)
$$

und gleichfalls $c : a$ oder $a : b$. Das Weitere geht nach der in § 32 angegebenen Methode.

Wir wollen endlich die **nicht bedingte Ausgleichung** weiter ausführen. Wir haben S. 212 gesehen, daß jeder rationale Ort der Grundgestalt unabhängig von den andern auszugleichen ist. Aus dieser unabhängigen Ausgleichung werden Örter zur Bestimmung gelangen, welche nicht streng dem Prinzip der Zonen folgen werden. Es ist daher eine fernere Ausgleichung erforderlich.

Wir nehmen an, daß die zu bestimmenden Flächenörter der Grundgestalt A, B, C, D, E, F, G, H, ... durch eine große Anzahl von Reflexen dargestellt sind, deren Winkel folgende sein mögen:

A	B	C	D	
$\varphi_a,\ \varrho_a$	$\varphi_b,\ \varrho_b$	$\varphi_c,\ \varrho_c$	$\varphi_d,\ \varrho_d$	:
$\varphi'_a,\ \varrho'_a$	$\varphi'_b,\ \varrho'_b$	$\varphi'_c,\ \varrho'_c$	$\varphi'_d,\ \varrho'_d$	:
$\varphi''_a,\ \varrho''_a$	$\varphi''_b,\ \varrho''_b$	$\varphi''_c,\ \varrho''_c$	$\varphi''_d,\ \varrho''_d$	:
$\varphi'''_a,\ \varrho'''_a$	$\varphi'''_b,\ \varrho'''_b$	$\varphi'''_c,\ \varrho'''_c$	$\varphi'''_d,\ \varrho'''_d$	:
:	:	:	:	:

Durch die nicht bedingte Ausgleichung werden die mittleren Winkel gewonnen. Wir werden also die mittleren Oral- und Polarwinkel haben:

$$\Phi_a = \frac{\Sigma \varphi_a}{n}, \quad R_a = \frac{\Sigma \varrho_a}{n} \quad \text{für } A$$
$$\Phi_b = \frac{\Sigma \varphi_b}{n}, \quad R_b = \frac{\Sigma \varrho_b}{n} \quad \text{»} \ B$$
$$\Phi_c = \frac{\Sigma \varphi_c}{n}, \quad R_c = \frac{\Sigma \varrho_c}{n} \quad \text{»} \ C$$
$$\Phi_d = \frac{\Sigma \varphi_d}{n}, \quad R_d = \frac{\Sigma \varrho_d}{n} \quad \text{»} \ D$$

. . . .

Nachdem diese Ausgleichung ausgeführt ist, werden die Flächenörter zu 4 gruppiert. Eine solche Gruppe möge z. B. E, F, G, H sein.

Aus derselben von 4 nicht in einem Zonenkreise liegenden Flächenörtern, läßt sich die Lage der 4 Flächenörter A, B, C, D mit Hilfe der gewöhnlichen trigonometrischen Formeln feststellen. Wir wollen die so erhaltenen Winkel mit

Φ'_a und R'_a für den Flächenort A
Φ'_b » R'_b » » » B
Φ'_c » R'_c » » » C
Φ'_d » R'_d » » » D

bezeichnen. Diese Winkel sind unabhängig von den früheren Φ_a, R_a, Φ_b, ...

Daraufhin wird die Rechnung wiederholt mit einer zweiten Gruppe von 4 Flächenörtern z. B. E', F', G', H'. Die so bestimmte Lage der Flächenörter A, B, C, D wird etwas verschieden sein von der früheren; die neu erhaltenen Winkel mögen beziehungsweise Φ''_a, R''_a, Φ''_b, R''_b, ... sein. Und so kann die Rechnung fortgesetzt werden bis alle Gruppen von je 4 Flächenörtern erledigt sind.

Wir machen darauf aufmerksam, daß die Winkel Φ_a und R_a für den Flächenort A unabhängig sind von den Winkeln Φ'_a und R'_a, sowie von Φ''_a und R''_a .... Dasselbe gilt für die Flächenörter B, C und D. Wir dürfen daher die Regel des arithmetischen Mittels anwenden. Nennen wir Φ^m_a und R^m_a usw. die mittleren Werte für A usw., sodaß die Winkel

$$\Phi^m_a = \frac{\Sigma \Phi_a}{N} \quad \text{und} \quad R^m_a = \frac{\Sigma R_a}{N} \quad \text{für } A$$
$$\Phi^m_b = \frac{\Sigma \Phi_b}{N} \quad \text{»} \quad R^m_b = \frac{\Sigma R_b}{N} \quad \text{»} \; B$$
$$\Phi^m_c = \frac{\Sigma \Phi_c}{N} \quad \text{»} \quad R^m_c = \frac{\Sigma R_c}{N} \quad \text{»} \; C$$
$$\Phi^m_d = \frac{\Sigma \Phi_d}{N} \quad \text{»} \quad R^m_d = \frac{\Sigma R_d}{N} \quad \text{»} \; D$$

die definitive Lage von A, B, C und D bestimmen werden, aus welchen dann die Konstanten der betreffenden Grundgestalt hervorgehen werden, nach der Methode, welche bereits in § 41 behandelt ist.

Bekanntlich ist das gewöhnliche arithmetische Mittel nur dann gültig, wenn die beobachteten und erhaltenen Größen gleiche Wahrscheinlichkeit beanspruchen. Ist ihr Wahrscheinlichkeitsgrad im voraus verschieden, so kommt das Gewicht der einzelnen Größe in die Rechnung.

§ 111. Literatur.

Die in §§ 42 und 69 angeführte Literatur möge noch durch folgende Angabe, welche in dieses Kapitel besonders gehört, vermehrt werden.

Über Ausbildungsweise der Kristalle:

A. Weisbach. Über die Monstrositäten tesseral-krystallisierender Minerale.

G. Werner. Über die Bedeutung der Krystallflächenumrisse und ihre Beziehung zu den Symmetrieverhältnissen der Krystallsysteme. Jahrb. f. Min. 1867, S. 129.

C. Klein. Über Zwillingsverbindungen und Verzerrungen. Heidelberg 1869.

A. Knop. Molekularkonstitution und Wachstum der Krystalle. Jahrb. f. Mineralogie. Hirschwald. S. 129.

O. Lehmann. Über das Wachsthum der Krystalle. Die Anomalien der Form. Ztschr. f. Krystallographie **1**, 453.

H. A. Miers. Mineralogy. London 1902.

M. Bauer. Lehrbuch der Mineralogie. 2. Aufl. Stuttgart 1904.

C. Hintze. Über ungewöhnliche Ausbildung eines Karlsbader Zwillings vom Striegauer Kalifeldspat. Ztschr. f. Krystall. **88**, 159.

C. H. Kraus. Über eigenthümlich verzerrte Salmiakkrystalle. Ztschr. f. Krystall. **88**, 160.

G. Tschermak. Über gewundene Bergkrystalle. Denkschrift d. math. nat. Cl. d. k. Akad. Wien 1894, **61**, 365.

Über Mikrolithe und Einschlüsse:

R. Blum, G. Leonhard, Seyfert und Söchting. Einschlüsse von Mineralien in krystall. Mineralien. Harlem 1854.

Söchting. Die Einschlüsse in krystall. Mineralien. Freiberg 1860.

G. A. Kenngott. Mineralog. Notizen. Sitzb. d. Ak. d. Wiss. Wien 1852—1855.
Brewsters Abh. in den Edinburgh Philos. journ. und den Transactions of roy. soc. Edinburg 1813—1845.
H. C. Sorby. Quarterly Journ. of the geol. soc. **14**, p. 473 (1858).
Fr. Zirkel. Die mikroskopische Beschaffenheit der Mineralien und Gesteine. 1873.
—— Lehrbuch der Petrographie. Leipzig 1893—1894.
H. Rosenbusch. Mikroskopische Physiographie der petrographisch wichtigen Mineralien. Stuttgart 1885—1894.
H. Vogelsang. Philosophie der Geologie und mikroskopische Gesteinsstudien. Bonn 1867.
A. Grubenmann. Über Rutilnadeln einschließende Bergkrystalle von Piz Aut, Bündner-Oberland. Neujahrsbl. d. naturforsch. Ges. 1899, **101**, 1—13, mit Tafel.

Über Vizinalflächen sei noch folgendes erwähnt:

A. Karnojitzky. Über das Wesen der Vizinalflächen. Verh. russ. min. Gesellsch. 1895, II, **33**, 1.
V. Goldschmidt. Über krumme Flächen. Ztschr. f. Krystall. 1896, **26**, 1.

Über Pseudomorphosen:

A. Breithaupt. Über die Echtheit der Kristalle. Freiberg 1815.
W. v. Haidinger. Pogg. Annalen Bd. 11, S. 173 und 316. Bd. 62, S. 161.
Th. Scheerer. Über Afterkrystalle. Handwörterb. der reinen und angewandten Chemie. 2. Aufl. 1837.
L. Bischof. Lehrbuch der chem. Geologie. 1. Aufl. 1847, 2. Aufl. 1863—1866.
F. E. Geinitz. Studien über Mineralpseudomorphosen. N. Jahrb. f. Miner. 1876, S. 449.
R. Blum. Über die Pseudomorphosen des Mineralreichs. Stuttgart 1843, 1847, 1852, 1863, 1879.
J. Roth. Chemische Geologie. Berlin 1879.
P. v. Jeremejew. Über Pseudomorphosen von Steatit, Serpentin und Epidot nach Olivin. Verh. d. kais. russ. miner. Ges. 1898. St. Petersburg 1899. **36**, Protok. 24.
H. A. Miers. Über einige britische Pseudomorphosen. Min. Magaz. and Journ. of the Min. soc. London 1897, 53, **11**, 263.

Über gnomonische Projektion:

F. E. Neumann. Beiträge zur Krystallonomie. Berlin 1823.
W. H. Miller. On the employment of the gnomonic projection of the sphere in cristallography. Phil. Mag. London, July 1859.
J. Grailich. Lehrb. d. Krystall. von W. H. Miller 1856.
H. Dauber. Ermittelung krystallogr. Konstanten. 21. Akanthit. Sitzungsber. Wien. Akad. 1860, **39**, 692.
C. F. Herbert-Smith. Über die Vorzüge der gnomonischen Projektion usw. Ztschr. f. Krystall. **39**, 142.
Fr. A. Quenstedt. Grundriß der bestimmenden und rechnenden Krystallographie. 1873, 150.
M. Websky. Über die Wahl der Projektionsachsen in einer Normalprojektion für triklinische Krystalle. Monatsber. Berlin. Akad. 1879, 124.
—— Über die Relation der Winkel zwischen vier Krystallflächen in einer Zone usw. Ztschr. f. Krystall. **4**, 203.

E. Mallard. Traité de cristallographie 1879, **1**, 63.
V. Goldschmidt. Über stereographische Projektion. Ztschr. f. Krystall. 1898, **30**, 260 und die darin enthaltene Literatur.
—— Über Winkelprojektionen. Ztschr. f. Krystall. 1902, **36**, 388.

Für die Ausgleichungsrechnung der Kristalle möge man folgende Aufsätze konsultieren:

J. Beckenkamp. Über die Ausdehnung monosymmetrischer und asymmetrischer Krystalle durch die Wärme. Ztschr. f. Krystall. 1881, **5**, 436.
—— Ausgleichungsmethoden der geometrischen Krystallographie. Ztsch. f. Krystall. **22**, 376.
A. Brezina. Methodik der Krystallbestimmung. Wien 1884, S. 223.
A. Sella. Über die Anzahl der Ziffern krystallographischer Constanten und über die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate zur Bestimmung derselben. Rivista di Miner. e Cristall. di R. Panebianco. **10**, 33.
C. Viola. Ausgleichungsmethode der geometrischen Krystallographie. Ztschr. f. Krystall. 1894, **22**.
G. Wulff. Untersuchungen über die Genauigkeitsgrenzen der Gesetze der geometrischen Krystallographie. Ztschr. f. Krystall. **38**, 1.

Für die Größe der Kristalle sind die verschiedenen Aufsätze in der Ztschr. für Krystallogr. und G. Tschermaks Min. und petr. Mitteilungen zu konsultieren. Über verzerrte und die Größe der Kristalle elementar zusammengestellt ist auch

A. Brezina. Wie wachsen die Krystalle? Wien 1889

nachzuschlagen.

Kapitel VII.

Die Verwachsungen der Kristalle.

§ 112. Allgemeines.

Kommen Kristalle unter sich in Berührung und wachsen sie so weiter, so entstehen die Verwachsungen von Kristallen. Es gibt unregelmäßige und regelmäßige Verwachsungen; man kann sie ebensogut voneinander unterscheiden wie die regelmäßigen und unregelmäßigen Ausbildungen der Kristalle. Je weniger eine Kristallgestalt von der Grundgestalt resp. Tracht sich unterscheidet, um so regelmäßiger ist sie. Dasselbe läßt sich sagen von den Kristallverwachsungen; auch hier lassen sich mittlere Verwachsungen konstruieren, welche von den kleinen Zufälligkeiten unabhängig sind. Um so eher wird eine Verwachsung regelmäßig genannt werden können, je mehr sie sich einer mittleren Verwachsung nähert.

Wir werden bei den regelmäßigen Verwachsungen »einfach parallele Verwachsungen«, »zweifach parallele Verwachsungen« und schlechtweg »regelmäßige Verwachsungen« kennen lernen.

Zwillingskristalle und mimetische Kristalle gehören zu den regelmäßigen Verwachsungen.

§ 113. Unregelmäßige Verwachsungen.

Daß Verwachsungen von Kristallen sehr unregelmäßig sein können, zeigen uns ganz besonders die kristallinischen Gesteine. Diese Gebilde sind bekanntlich Aggregate von Mineralien oder von natürlichen Gläsern. Präparieren wir aus einem Gestein einen Dünnschliff, so erkennen wir im durchgehenden Licht die verschiedenen Kristalle, welche das Gestein zusammensetzen. Die Mineralien sind darin bald automorph, bald allotriomorph, bald gleich orientiert, bald durcheinander unregelmäßig verwachsen. Je weniger die Kristalle automorph sind, um so mehr sind sie unregelmäßig verwachsen. Diese Erscheinung tritt besonders bei den hypidiomorph-kristallinen Gesteinen auf. Wo die Kristalle automorph ausgebildet sind, da kommt schon gleich eine gewisse Regelmäßigkeit in der Verwachsung vor. Das sieht man besonders bei den panidiomorph-kristallinen Gesteinen bei den kristallinen Schiefern, wo die Glimmerblättchen nahezu parallel ihrer Spaltungsfläche orientiert sind.

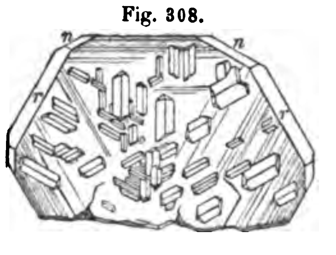
Fig. 307.



Die Fig. 307 zeigt, nach O. Mügge, eine große Anzahl von kleinen Salpeterkristallen, welche auf ein Glimmerblättchen aufgewachsen sind. Die Salpeterkristalle sind unregelmäßig verwachsen; man bemerkt aber doch darin, daß einige einer nahezu gleichen Orientierung regelmäßig folgen.

Die Rutilnädelchen verwachsen auf Eisenglanzflächen ziemlich unregelmäßig; da sie aber in langen Individuen ausgebildet sind, so tritt hier und da auch eine gewisse Regelmäßigkeit auf, siehe Fig. 308, nach G. Tschermak.

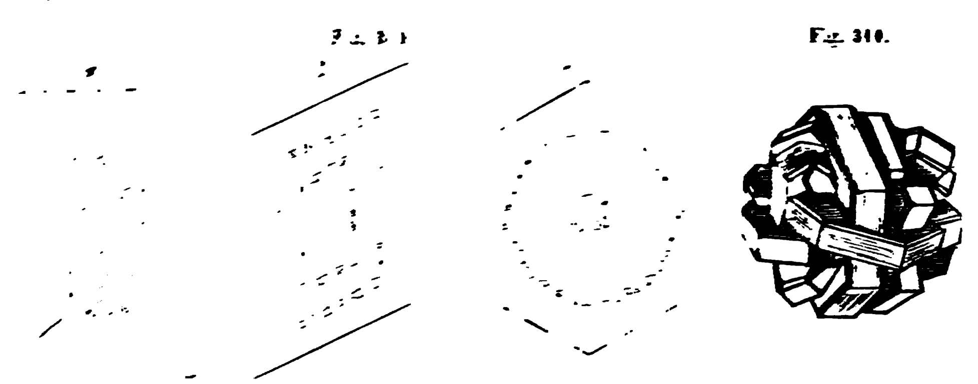
Fig. 308.



Unregelmäßig verwachsen sind oft die Einschlußmineralien in ihrem sie umschließenden Mineral. Erwähnt mögen werden die Pyroxen- und Amphibolkristalle, siehe Fig. 309 a, b, welche verschiedene Kristalle mit Einschlüssen, Fig. 309 a in unregelmäßigen Verwachsungen und Fig. 309 b in regelmäßigen Verwachsungen,

von Fr. Zirkel, gezogen. Die Leucitkristalle enthalten oft Kristalleinschlüsse, die teils regelmäßig, teils unregelmäßig angeordnet sind. Siehe Fig. 309 c, von Fr. Zirkel.

Fig. 309. Fig. 310.



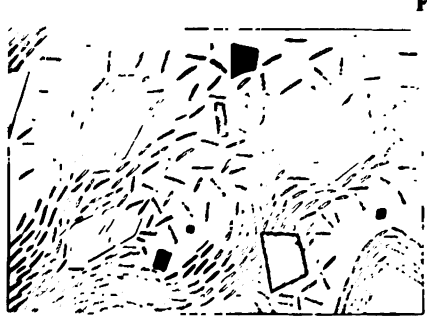
Nicht nur Kristalle von verschiedener Art, sondern auch Kristalle von derselben Art gehen Verwachsungen ein, die ganz unregelmäßig sein können.

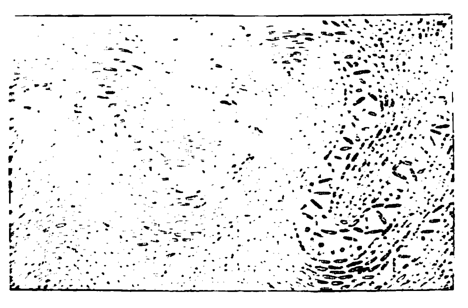
Die Fig. 310 stellt z. B. ein Aggregat von Hanksitkristallen dar, die durcheinander und ganz unregelmäßig verwachsen sind.

§ 114. Einfach-parallele Verwachsungen.

Ist nun ein Element der Kristalle, sei es eine Zone oder eine Fläche, besonders vorherrschend, so treten die Kristalle gern so verwachsen auf, daß das vorherrschende Element bei den Kristallen gemeinschaftliche Lage erhält. Das sieht man in den Dünnschliffen von einigen Gesteinen, wie z. B. in Fig. 311, nach *Fr. Zirkel.* Die kleinen Kristallindividuen sind darin verlängert, geordnet und verwachsen nach ihrer Längsrichtung.

Fig. 311.





Man hat bei dem Studium der einfach-parallelen Verwachsungen ganz besonders drei Fälle zu unterscheiden, nämlich:

a) Verwachsungen von Kristallen, bei denen eine Zone vorherrscht;
b) Verwachsungen von Kristallen, bei denen eine Fläche vorherrscht;
c) Verwachsungen von Kristallen, bei denen eine Zone vorherrscht, mit Kristallen, bei denen eine Fläche dominiert.

a) **Herrscht eine Zone** bei den Kristallen **vor**, so beobachtet man, daß die Zonenachse in der Kristallverwachsung gemeinschaftlich wird.

Beispiele:

Kristalle von Pyroxen und Amphibol verwachsen nach ihrer prismatischen Zone, welche beim Pyroxen diharmonisch, beim Amphibol triharmonisch ist, siehe Fig. 312.

Fig. 312.

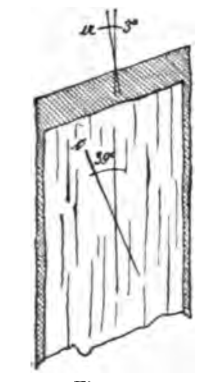


Fig. 313.

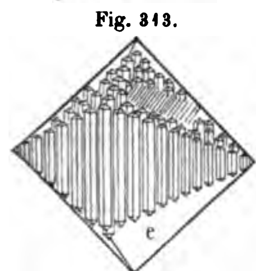


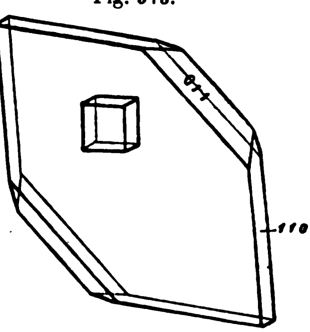
Fig. 314.



Die Fig. 313 gibt eine einfache parallele Verwachsung von die **Paramorphose** nach Brookit bildenden Rutilnädelchen, nach M. **Bauer**.

Nicht weniger interessant ist die parallele Verwachsung von Feldspaten, wovon die Fig. 325, S. 225, ein schönes Beispiel gibt.

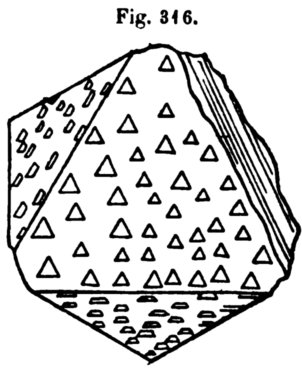
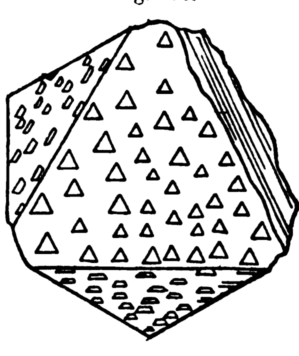
Fig. 315.



b) **Dominiert eine Fläche**, so zeigt die Erfahrung, daß jene bei der Kristallverwachsung gemeinschaftlich wird. Die Fig. 314 zeigt z. B., nach O. **Mügge**, kleine Jodkaliumkriställchen, welche mit ihrer dreiseitigen Fläche auf die Spaltungsfläche des Glimmers gelagert sind. Viele dieser Kristalle haben mit dem Muscovit nur die vorherrschende Fläche gemein; man merkt aber auch, daß noch andere Elemente dort gemeinschaftlich werden.

In Fig. 315 ist, nach **Sadebeck**, ein Pyritkristall, welcher mit einer Würfelfläche auf der dominierenden (001) Fläche des Markasits aufsitzt, dargestellt.

Fig. 316.

Tafelige Arsenolithkristalle sitzen mit ihrer herrschenden Fläche auf der Basisfläche des Arsens, siehe Fig. 316, nach O. Mügge.

Auch in der Fig. 317 sehen wir, nach O. Mügge, eine einfach-parallele Verwachsung von Pyrit auf Bleiglanz.

c) Herrscht ferner bei einigen Kristallen eine Zone vor und bei andern eine Fläche, so verwachsen dieselben so, daß die Zone zur Fläche zu liegen kommt. Das sieht man z. B. in der Fig. 318, nach A. Lacroix, wo Sillimanit verwachsen mit Andalusit dargestellt ist.

Fig. 317.

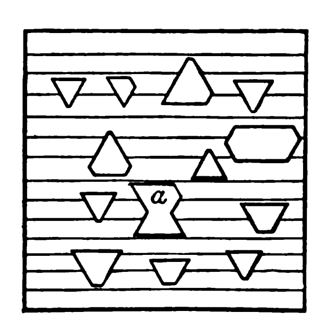
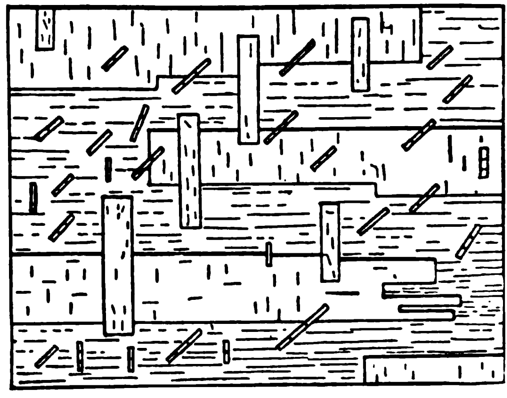


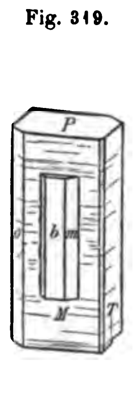
Fig. 318.



§ 115. Zweifach-parallele Verwachsungen.

Diese verwachsenen Kristalle haben nicht ein, sondern zwei Elemente gemein. Beide Elemente herrschen vor, seien sie Flächen oder Zonen.

Fig. 319.



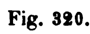


Fig. 320.

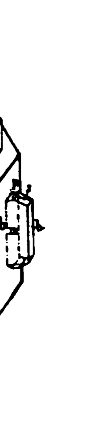
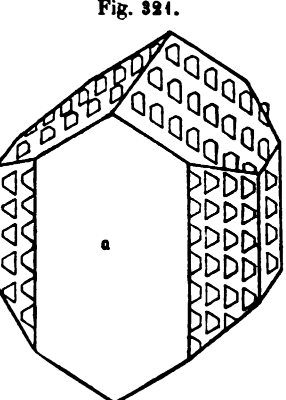


Fig. 321.



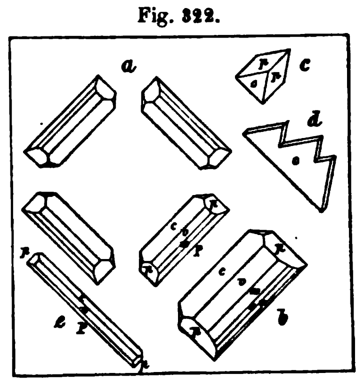
Dominiert dabei eine Zone und die in derselben vorhandenen Flächen, so verwachsen die Kristalle mit der gemeinschaftlichen Zone und mit einer darin

auftretenden Fläche. Ein Beispiel davon gibt die Fig. 319, nach G. Tschermak, wo Staurolith mit Cyanit verwachsen dargestellt sind. Dabei erscheint es gleichgültig, ob beide Zonen diharmonisch oder aber nur eine diharmonisch und die andere triharmonisch sind.

Fig. 320 zeigt uns, nach G. vom Rath, die zweifach-parallele Verwachsung von kleinen Amphibolkristallen auf den Prismenflächen des Pyroxens. Die herrschende Zone des Amphibols ist triharmonisch und diejenige des Pyroxens diharmonisch.

Herrscht ferner eine Fläche vor, so decken sich die dominierenden Flächen der verschiedenen Kristalle und gleichzeitig wird auch eine Kante gemeinschaftlich.

Fig. 322.



Die Fig. 321 stellt, nach G. vom Rath, einen Pyroxenkristall dar, der mit Glimmerblättchen verwachsen ist. Die herrschende Fläche des Glimmers deckt sich mit der (010)-Fläche des Pyroxens. Außerdem kommt eine Kante der triharmonischen Fläche bei dem Glimmer zu einer Kante der Zone [001] parallel zu stehen.

Die schon erwähnte Fig. 318, welche die Verwachsung von Sillimanit mit Andalusit darstellt, zeigt oben eine deckende Fläche und eine deckende Richtung.

Dieselbe Erscheinung sehen wir, nach Fr. Becke, in der Fig. 322, die eine Verwachsung von Chlorblei auf Bleiglanz zeigt. Die ausgebildete Zone des Chlorbleis ist der Kante [110] resp. [1$\bar{1}$0] des Bleiglanzes parallel.

Fig. 323.

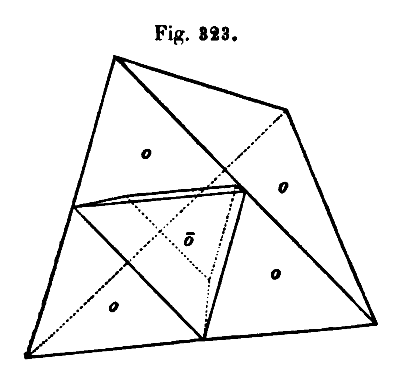
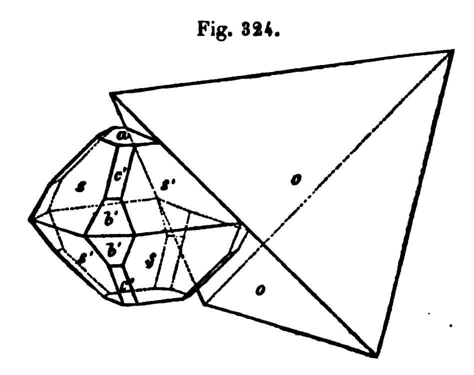


Fig. 324.



Nicht weniger deutlich erscheint die zweifach-parallele Verwachsung zwischen Kupferkies und Fahlerz, siehe Fig. 323 und 324, nach Sadebeck.

§ 116. Regelmäßige Verwachsungen.

Die regelmäßigen Verwachsungen sollen solche parallele Verwachsungen darstellen, wo mehr als zwei vorherrschende Elemente zur Deckung kommen. Handelt es sich um Verwachsungen von ungleichartigen Kristallen, so können

nie mehr als zwei Elemente vollständig gedeckt werden. Das dritte Element kommt nicht vollständig, aber annähernd zur Deckung.

Die Fig. 325 und 326 stellen, nach G. Tschermaks Lehrbuch, eine solche regelmäßige Verwachsung von Plagioklas und Orthoklas dar; es sind die kleinen Plagioklaskristalle mit einem einzelnen großen Orthoklaskristall regelmäßig verwachsen. Dabei ist eine Zonenachse der Plagioklase mit der analogen Zonenachse des Orthoklases parallel. Außerdem ist auch die Fläche M gemeinschaftlich. Die vollkommene Spaltungsfläche der Plagioklase P und die analoge vollkommene Spaltungsfläche des Orthoklas sind nicht streng parallel, da sie in bezug auf die Fläche M andere Neigung haben. Aber abgesehen von dieser nicht absoluten Deckung eines dritten Elements kann man eine solche Verwachsung doch viel regelmäßiger nennen, als wenn die Fläche x des Plagioklas auf derselben Seite der Fläche P des Orthoklas aufgetreten wäre.

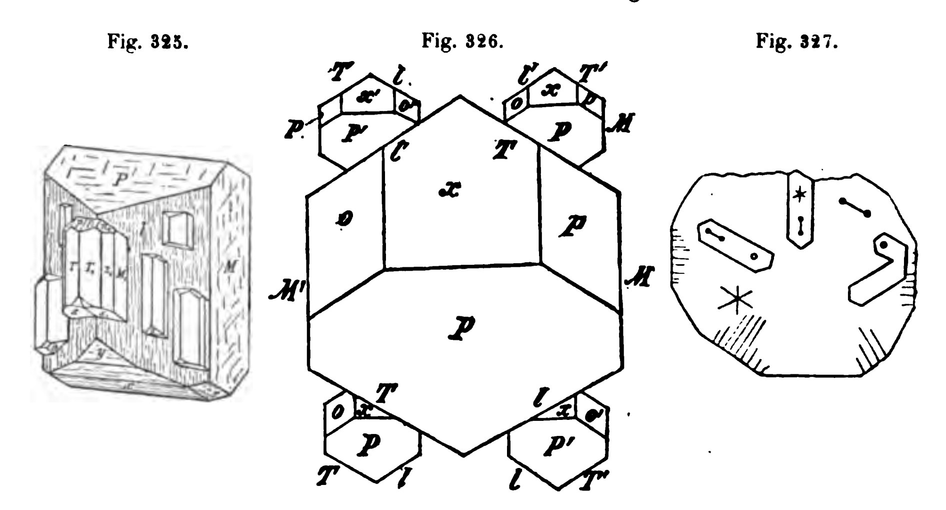


Fig. 325. Fig. 326. Fig. 327.

Ebenso regelmäßig kann die Verwachsung von Glimmer und Chlorit, siehe Fig. 327 und 328, nach G. Tschermak, genannt werden. Die Basisflächen kommen dabei zur Deckung und außerdem stimmen die Kanten der triharmonischen Basisflächen so genau als möglich überein.

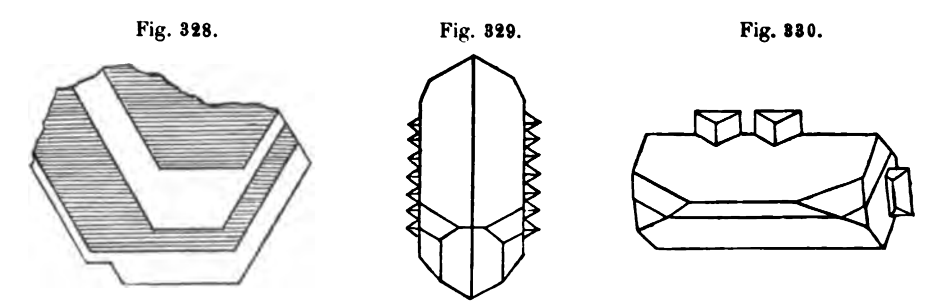


Fig. 328. Fig. 329. Fig. 330.

Der perthitische Überzug von Albit auf Orthoklas ist, wie in Fig. 329 und 330 dargestellt ist, eine regelmäßige Verwachsung.

Die regelmäßigen Verwachsungen der Kristalle können also nur dort möglich sein, wo es sich um zwei oder mehrere Kristalle handelt, deren Grundgestalten sehr ähnlich sind, denn nur unter dieser Bedingung werden drei Elemente derselben recht nahe zur Deckung kommen können. Ähnlich gebaute Kristalle, deren Harmonie die gleiche ist, werden isomorphe Kristalle genannt, wenn außerdem ihre chemischen Verhältnisse nahe aneinander liegen. Die regelmäßige Verwachsung erscheint also bei den isomorphen Kristallen, und sie erzeugt isomorphe Mischungen.

§ 117. Isomorphe Mischungen.

Von isomorphen Kristallen wird später die Rede sein. Ist die Möglichkeit vorhanden, daß zwei isomorphe Kristalle gleichzeitig zur Ausbildung gelangen, so verbinden oder vielmehr mischen sie sich derart, daß ihre vorherrschenden Elemente parallel zu liegen kommen. Sind die einzelnen Bestandteile, welche die Mischung bilden, sehr klein und zwar so klein, daß sie durch die möglichen Vergrößerungen nicht erkannt werden können, so heißt die Mischung ein Mischkristall. Ein isomorpher Mischkristall wird als Grundgestalt eine mittlere Gestalt haben, welche zwischen den Grundgestalten der einzelnen Bestandteile liegt. Das geht aus dem Umstand hervor, daß die isomorphen Kristalle sich derart mischen, daß die dominierenden Elemente derselben recht stark übereinstimmen und das um so mehr, je mehr die die Mischung bildenden Kristalle isomorph sind.

Entstehen isomorphe Mischkristalle aus verschiedenen Verhältnissen der isomorphen Bestandteile, so wird ihre Grundgestalt bald mehr der einen, bald mehr der andern Grundgestalt zweier isomorpher Bestandteile nahe treten, je nachdem der eine oder der andere der letztern vorwaltet. Dieses Merkmal kann vortrefflich benutzt werden, um einen Mischkristall zu erkennen, wenn beispielsweise andere schärfere Merkmale versagen. Ein schönes Beispiel von isomorphen Mischkristallen liefern die Plagioklase. Die Plagioklase sind Metasilikate von Aluminium, Natrium und Calcium. Zuweilen tritt auch Kalium hinzu. Betrachten wir nur die Plagioklase, wo neben Aluminium nur noch Natrium oder Calcium auftritt, so können wir aus folgender Zusammenstellung

	$Na : Ca$	$\overline{h : M}$
Albit	1 : 0	90° 9′
Oligoklas	3 : 1	88 33½
Andesin	1 : 1	88 20
Labradorit	1 : 3	88 9¾
Anorthit	0 : 1	87 8¾

schließen, daß der Winkel $h : M$ mit dem Verhältnis $Na : Ca$ im Zusammenhang steht; worin h und M bezw. die Flächen $(11\bar{2})$ und $(\bar{1}10)$, Fig. 132, S. 110, bedeuten. Wir dürfen daher daraus den von G. Tschermak gemachten Schluß ziehen, daß die einzelnen Plagioklase Mischungen von Albit und Anorthit darstellen. Wir kommen zu diesem Schlusse auch noch durch

verschiedene physikalische Erscheinungen, wie z. B. die optischen und die skalaren Größen. Man wird alle diese Erscheinungen und Beobachtungen bei den Untersuchungen über die Mischkristalle zu Hilfe nehmen müssen und alle werden zu demselben Resultate führen. Wir werden später noch auf die Mischkristalle zurückkommen.

§ 118. Zwillinge und Zwillingskristalle.

Eine zweifach-parallele Verwachsung von Kristallen oder Individuen derselben Art heißt ein Zwillingskristall und die einzelnen Bestandteile heißen Zwillinge.

Verwachsen zwei Individuen von derselben Art, wie immer sie auch gelegen sein mögen, so besitzen sie stets zwei Elemente gemein, was sehr leicht bewiesen werden kann.

Man denke sich zwei kongruente Körper, welche einen Punkt, z. B. das Zentrum oder eine Ecke gemeinschaftlich haben. Dann ist es immer möglich, den einen Körper mit Hilfe einer Drehung genau zur Deckung mit dem andern zu bringen. Die Drehungsachse ist daher für beide gemein, wie immer sie auch gegenseitig gelegen sein mögen. Die beiden Körper haben außerdem die auf diese Drehungsachse senkrechte Ebene gemein. Diese zwei Elemente sind ganz beliebig, und man kann sie nicht für die Erkennung eines Zwillingskristalls benutzen.

Damit eine zweifach-parallele Verwachsung zustande kommt, müssen zwei vorherrschende Elemente parallel auftreten. Also auch unter Zwillingskristallen werden nur solche Verwachsungen von Kristallen derselben Art verstanden, wo die Kristalle zwei **herrschende Elemente** gemeinschaftlich haben; alle übrigen Verwachsungen sind unregelmäßig und gehören auch nicht zu den Zwillingskristallen.

Die zwei dominierenden Elemente sind a) entweder zwei Flächen, welche also eine Zone oder b) zwei Kanten, die eine Fläche bestimmen, oder endlich c) eine Fläche und eine Kante, welche in der Fläche liegt. Die zwei gleichnamigen Elemente können sich entweder direkt oder abwechselnd decken. Je nach den Elementen, welche von zwei oder mehreren verwachsenen Individuen zur Deckung gelangen, richten sich auch die verschiedenen Zwillingsgesetze. Jedenfalls stehen die Zwillingsgesetze mit den Grundgestalten und Harmonien der Kristalle im Zusammenhang.

Wenn von zwei Individuen mehr als zwei Flächen, welche keine Zone bilden, oder mehr als zwei in keiner Fläche liegende Kanten direkt zur Deckung gelangen, so decken sich die Grundgestalten der zwei Individuen vollständig. Tritt das ein, so kann man von Zwillingen erst dann sprechen, wenn beide eine verschiedene Harmonie aufweisen. In dem Falle also, wo die Grundgestalten vollständig parallel liegen, erzeugen zwei oder mehrere voneinander verschiedene Individuen, wenn sie nicht holoharmonisch sind, einen Zwillingskristall. Eine vollständig parallele Verwachsung erzeugt Zwillingskristalle nur wenn die Kristalle hemiharmonisch, tetartoharmonisch,

ogdoharmonisch oder hemimorph sind. Zwei hemiharmonische Individuen, wenn sie nicht identisch sind, ergänzen sich zu der Holoharmonie; zwei tetartoharmonische Gestalten ergänzen sich zu einer Hemiharmonie und vier tetartoharmonische Individuen zu der Holoharmonie.

Wir können also zweierlei Arten von Zwillingen unterscheiden, nämlich ergänzende und unergänzende Zwillinge.

Die ergänzenden Zwillinge können nur die hemiharmonischen, tetartoharmonischen und ogdoharmonischen Kristalle sein, wenn ihre Grundgestalten vollständig parallel zur Ausbildung gelangen.

§ 119. Ergänzende Zwillinge.

Die ergänzenden Zwillinge sind Individuen derselben Art, welche alle Elemente gemeinschaftlich haben, und deren Harmonien sich zu einer höhern Harmonie ergänzen oder kompletieren.

Die Fig. 331 und 334 stellen schöne Beispiele von ergänzenden Zwillingen der drei- und viergliedrigen Grundgestalten dar. Die zwei ergänzenden Zwillinge Fig. 331 gehören zur pentagonalen Hemiharmonie $(33)^{\sigma}$, sie bilden infolge der Verwachsung die Holoharmonie $(34)^{s}$. Der Eisenkies tritt oft in dieser Weise verzwillingt auf (nach Fr. Zirkels Lehrbuch).

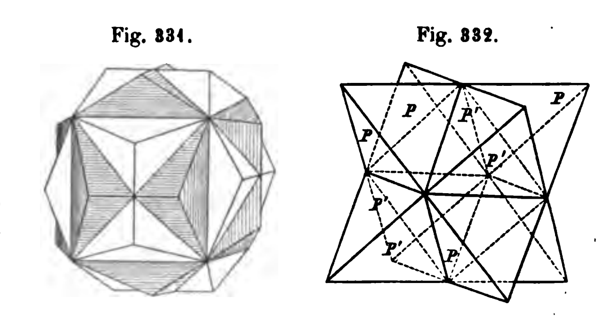


Fig. 331. Fig. 332.

Die zwei ergänzenden Zwillinge der Fig. 332 gehören zur tetraedrischen Hemiharmonie $(33)^{s}$ und bilden zusammen ebenfalls die Holoharmonie $(34)^{s}$. Die Durchkreuzungszwillinge lassen sofort die zwei Individuen $P'P' \ldots$ und $PP \ldots$ erkennen. Der Diamant zeigt nicht selten solche Verwachsungen.

Die Fig. 333 und 334 geben ergänzende Zwillinge der dreigliedrigen Grundgestalten; sie gehören zur gyroedrischen Hemiharmonie (23), wie sie z. B. beim Quarz erscheint. Das eine Individuum ist nach dem einen Sinn, das andere nach dem entgegengesetzten Sinn gedreht; beide ergänzen sich zur Holoharmonie $(63)^{s}$. Ein solcher Quarzkristall, Fig. 334, zeigt keine Drehung mehr an, wenn die Verwachsung innig und gleichmäßig erfolgt ist.

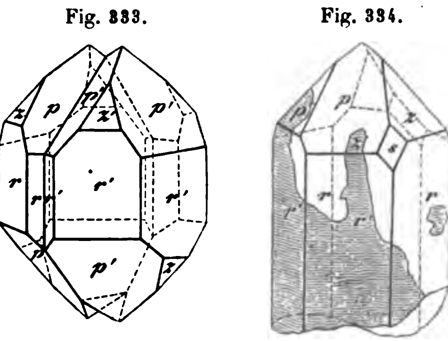


Fig. 333. Fig. 334.

E. Mallard. Traité de cristallographie 1879, 1, 63.
V. Goldschmidt. Über stereographische Projektion. Ztschr. f. Krystall. 1898, 30, 260 und die darin enthaltene Literatur.
—— Über Winkelprojektionen. Ztschr. f. Krystall. 1902, 36, 388.

Für die Ausgleichungsrechnung der Kristalle möge man folgende Aufsätze konsultieren:

J. Beckenkamp. Über die Ausdehnung monosymmetrischer und asymmetrischer Krystalle durch die Wärme. Ztschr. f. Krystall. 1881, 5, 436.
—— Ausgleichungsmethoden der geometrischen Krystallographie. Ztsch. f. Krystall. 22, 376.
A. Brezina. Methodik der Krystallbestimmung. Wien 1884, S. 223.
A. Sella. Über die Anzahl der Ziffern krystallographischer Constanten und über die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate zur Bestimmung derselben. Rivista di Miner. e Cristall. di R. Panebianco. 10, 33.
C. Viola. Ausgleichungsmethode der geometrischen Krystallographie. Ztschr. f. Krystall. 1894, 22.
G. Wulff. Untersuchungen über die Genauigkeitsgrenzen der Gesetze der geometrischen Krystallographie. Ztschr. f. Krystall. 38, 1.

Für die Größe der Kristalle sind die verschiedenen Aufsätze in der Ztschr. für Krystallogr. und G. Tschermaks Min. und petr. Mitteilungen zu konsultieren. Über verzerrte und die Größe der Kristalle elementar zusammengestellt ist auch

A. Brezina. Wie wachsen die Krystalle? Wien 1889

nachzuschlagen.

Kapitel VII.

Die Verwachsungen der Kristalle.

§ 112. Allgemeines.

Kommen Kristalle unter sich in Berührung und wachsen sie so weiter, so entstehen die Verwachsungen von Kristallen. Es gibt unregelmäßige und regelmäßige Verwachsungen; man kann sie ebensogut voneinander unterscheiden wie die regelmäßigen und unregelmäßigen Ausbildungen der Kristalle. Je weniger eine Kristallgestalt von der Grundgestalt resp. Tracht sich unterscheidet, um so regelmäßiger ist sie. Dasselbe läßt sich sagen von den Kristallverwachsungen; auch hier lassen sich mittlere Verwachsungen konstruieren, welche von den kleinen Zufälligkeiten unabhängig sind. Um so eher wird eine Verwachsung regelmäßig genannt werden können, je mehr sie sich einer mittleren Verwachsung nähert.

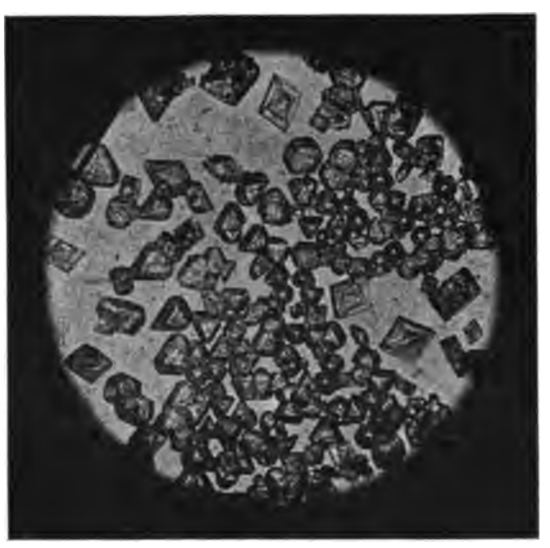
Wir werden bei den regelmäßigen Verwachsungen »einfach parallele Verwachsungen«, »zweifach parallele Verwachsungen« und schlechtweg »regelmäßige Verwachsungen« kennen lernen.

Zwillingskristalle und mimetische Kristalle gehören zu den regelmäßigen Verwachsungen.

§ 113. Unregelmäßige Verwachsungen.

Daß Verwachsungen von Kristallen sehr unregelmäßig sein können, zeigen uns ganz besonders die kristallinischen Gesteine. Diese Gebilde sind bekanntlich Aggregate von Mineralien oder von natürlichen Gläsern. Präparieren wir aus einem Gestein einen Dünnschliff, so erkennen wir im durchgehenden Licht die verschiedenen Kristalle, welche das Gestein zusammensetzen. Die Mineralien sind darin bald automorph, bald allotriomorph, bald gleich orientiert, bald durcheinander unregelmäßig verwachsen. Je weniger die Kristalle automorph sind, um so mehr sind sie unregelmäßig verwachsen. Diese Erscheinung tritt besonders bei den hypidiomorph-kristallinen Gesteinen auf. Wo die Kristalle automorph ausgebildet sind, da kommt schon gleich eine gewisse Regelmäßigkeit in der Verwachsung vor. Das sieht man besonders bei den panidiomorph-kristallinen Gesteinen bei den kristallinen Schiefern, wo die Glimmerblättchen nahezu parallel ihrer Spaltungsfläche orientiert sind.

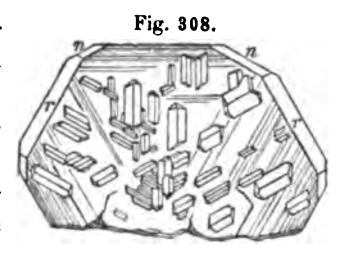
Fig. 307.



Die Fig. 307 zeigt, nach O. Mügge, eine große Anzahl von kleinen Salpeterkristallen, welche auf ein Glimmerblättchen aufgewachsen sind. Die Salpeterkristalle sind unregelmäßig verwachsen; man bemerkt aber doch darin, daß einige einer nahezu gleichen Orientierung regelmäßig folgen.

Die Rutilnädelchen verwachsen auf Eisenglanzflächen ziemlich unregelmäßig; da sie aber in langen Individuen ausgebildet sind, so tritt hier und da auch eine gewisse Regelmäßigkeit auf, siehe Fig. 308, nach G. Tschermak.

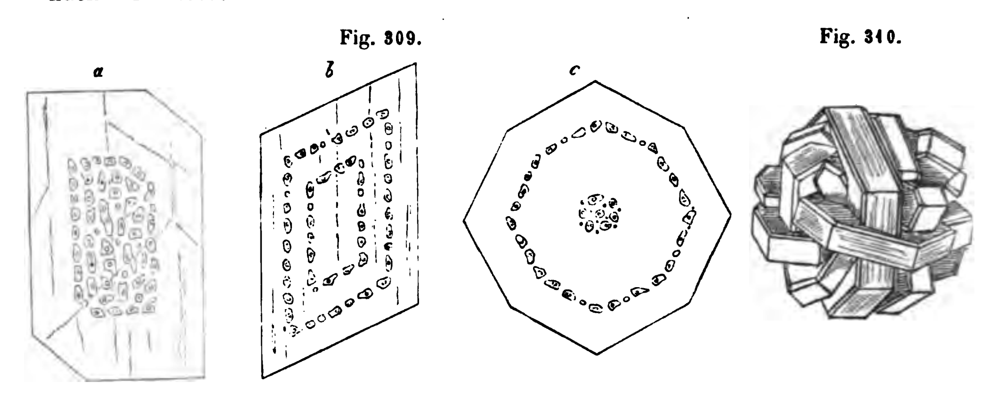
Fig. 308.



Unregelmäßig verwachsen sind oft die Einschlußmineralien in ihrem sie umschließenden Mineral. Erwähnt mögen werden die Pyroxen- und Amphibolkristalle, siehe Fig. 309 a, b, welche verschiedene Kristalle mit Einschlüssen, Fig. 309 a in unregelmäßigen Verwachsungen und Fig. 309 b in regelmäßigen Verwachsungen,

nach Fr. Zirkel, zeigen. Die Leuzitkristalle enthalten oft Kristalleinschlüsse, die bald regelmäßig bald unregelmäßig angeordnet sind. Siehe Fig. 309 c, nach Fr. Zirkel.

Fig. 309. Fig. 310.



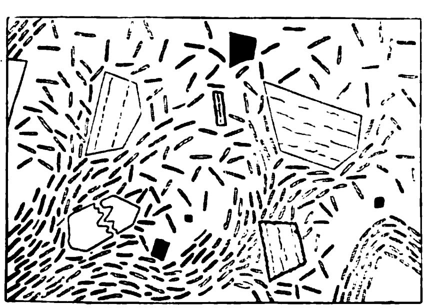
Nicht nur Kristalle von verschiedener Art, sondern auch Kristalle von derselben Art gehen Verwachsungen ein, die ganz unregelmäßig sein können.

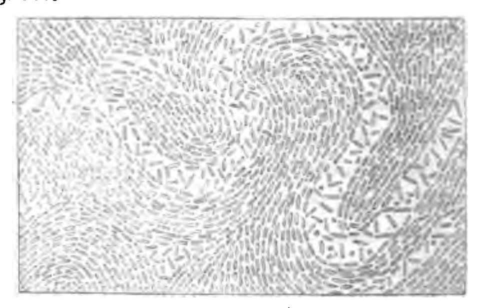
Die Fig. 310 stellt z. B. ein Aggregat von Hanksitkristallen dar, die durcheinander und ganz unregelmäßig verwachsen sind.

§ 114. Einfach-parallele Verwachsungen.

Sobald ein Element der Kristalle, sei es eine Zone oder eine Fläche, besonders vorherrscht, so treten die Kristalle gern so verwachsen auf, daß das vorherrschende Element bei den Kristallen gemeinschaftliche Lage erhält. Das sieht man in den Dünnschliffen von einigen Gesteinen, wie z. B. in Fig. 311, nach Fr. Zirkel. Die kleinen Kristallindividuen sind darin verlängert, geordnet und verwachsen nach ihrer Längsrichtung.

Fig. 311.





Man hat bei dem Studium der einfach-parallelen Verwachsungen ganz besonders drei Fälle zu unterscheiden, nämlich:

a) Verwachsungen von Kristallen, bei denen eine Zone vorherrscht;
b) Verwachsungen von Kristallen, bei denen eine Fläche vorherrscht;
c) Verwachsungen von Kristallen, bei denen eine Zone vorherrscht, mit Kristallen, bei denen eine Fläche dominiert.

a) Herrscht eine Zone bei den Kristallen vor, so beobachtet man, daß die Zonenachse in der Kristallverwachsung gemeinschaftlich wird.

Beispiele:

Kristalle von Pyroxen und Amphibol verwachsen nach ihrer prismatischen Zone, welche beim Pyroxen diharmonisch, beim Amphibol triharmonisch ist, siehe Fig. 312.

Fig. 312.

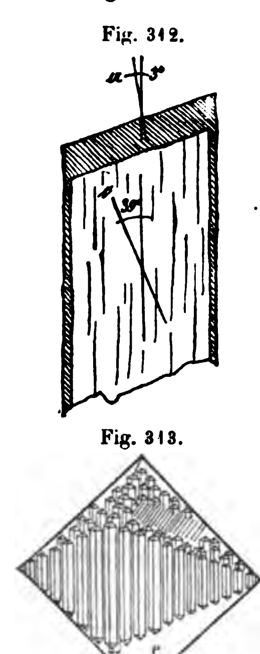


Fig. 313.

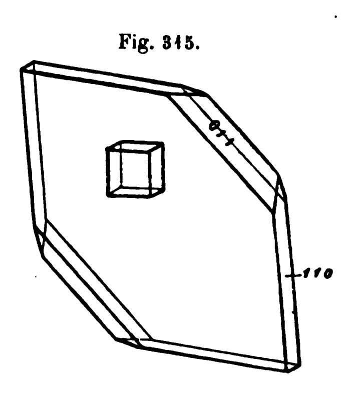
Fig. 314.



Die Fig. 313 gibt eine einfache parallele Verwachsung von die Paramorphose nach Brookit bildenden Rutilnädelchen, nach M. Bauer.

Nicht weniger interessant ist die parallele Verwachsung von Feldspaten, wovon die Fig. 325, S. 225, ein schönes Beispiel gibt.

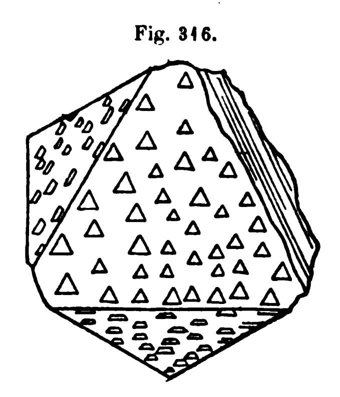
Fig. 315.



b) Dominiert eine Fläche, so zeigt die Erfahrung, daß jene bei der Kristallverwachsung gemeinschaftlich wird. Die Fig. 314 zeigt z. B., nach O. Mügge, kleine Jodkaliumkriställchen, welche mit ihrer dreiseitigen Fläche auf die Spaltungsfläche des Glimmers gelagert sind. Viele dieser Kristalle haben mit dem Muscovit nur die vorherrschende Fläche gemein; man merkt aber auch, daß noch andere Elemente dort gemeinschaftlich werden.

In Fig. 315 ist, nach Sadebeck, ein Pyritkristall, welcher mit einer Würfelfläche auf der dominierenden (001) Fläche des Markasits aufsitzt, dargestellt.

Fig. 316.



Tafelige Arsenolithkristalle sitzen mit ihrer herrschenden Fläche auf der Basisfläche des Arsens, siehe Fig. 316, nach O. Mügge.

Auch in der Fig. 317 sehen wir, nach O. Mügge, eine einfach-parallele Verwachsung von Pyrit auf Bleiglanz.

c) Herrscht ferner bei einigen Kristallen eine Zone vor und bei andern eine Fläche, so verwachsen dieselben so, daß die Zone zur Fläche zu liegen kommt. Das sieht man z. B. in der Fig. 318, nach A. Lacroix, wo Sillimanit verwachsen mit Andalusit dargestellt ist.

Fig. 317.

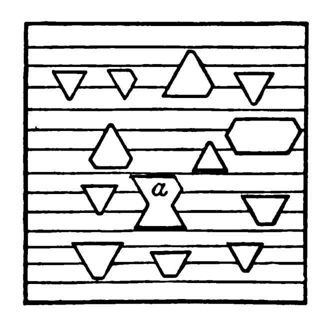
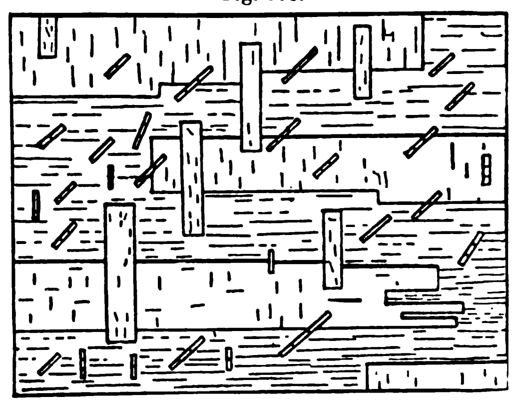


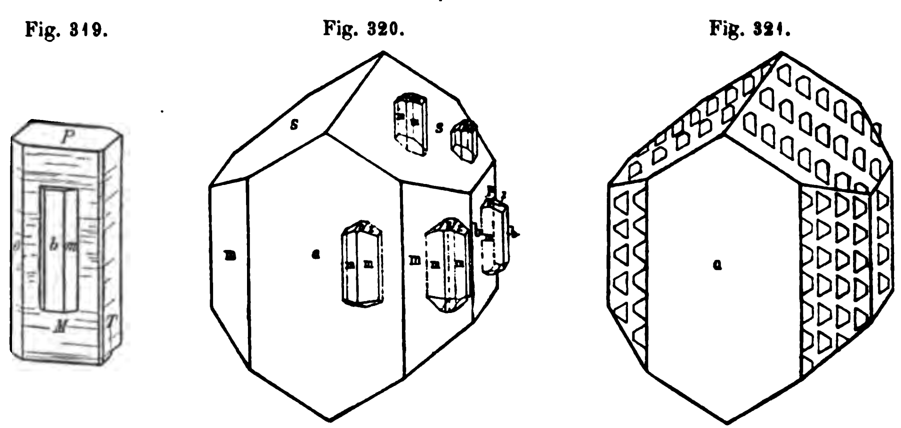
Fig. 318.



§ 115. Zweifach-parallele Verwachsungen.

Diese verwachsenen Kristalle haben nicht ein, sondern zwei Elemente gemein. Beide Elemente herrschen vor, seien sie Flächen oder Zonen.

Fig. 319. Fig. 320. Fig. 321.



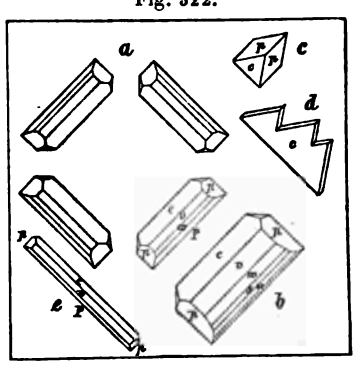
Dominiert dabei eine Zone und die in derselben vorhandenen Flächen, so verwachsen die Kristalle mit der gemeinschaftlichen Zone und mit einer darin

auftretenden Fläche. Ein Beispiel davon gibt die Fig. 319, nach G. Tschermak, wo Staurolith mit Cyanit verwachsen dargestellt sind. Dabei erscheint es gleichgültig, ob beide Zonen diharmonisch oder aber nur eine diharmonisch und die andere triharmonisch sind.

Fig. 320 zeigt uns, nach G. vom Rath, die zweifach-parallele Verwachsung von kleinen Amphibolkristallen auf den Prismenflächen des Pyroxens. Die herrschende Zone des Amphibols ist triharmonisch und diejenige des Pyroxens diharmonisch.

Herrscht ferner eine Fläche vor, so decken sich die dominierenden Flächen der verschiedenen Kristalle und gleichzeitig wird auch eine Kante gemeinschaftlich.

Fig. 322.



Die Fig. 321 stellt, nach G. vom Rath, einen Pyroxenkristall dar, der mit Glimmerblättchen verwachsen ist. Die herrschende Fläche des Glimmers deckt sich mit der (010)-Fläche des Pyroxens. Außerdem kommt eine Kante der triharmonischen Fläche bei dem Glimmer zu einer Kante der Zone [001] parallel zu stehen.

Die schon erwähnte Fig. 318, welche die Verwachsung von Sillimanit mit Andalusit darstellt, zeigt oben eine deckende Fläche und eine deckende Richtung.

Dieselbe Erscheinung sehen wir, nach Fr. Becke, in der Fig. 322, die eine Verwachsung von Chlorblei auf Bleiglanz zeigt. Die ausgebildete Zone des Chlorbleis ist der Kante [110] resp. [1$\bar{1}$0] des Bleiglanzes parallel.

Fig. 323.

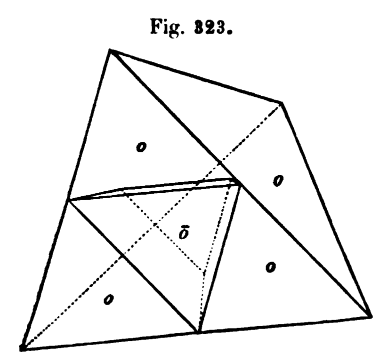
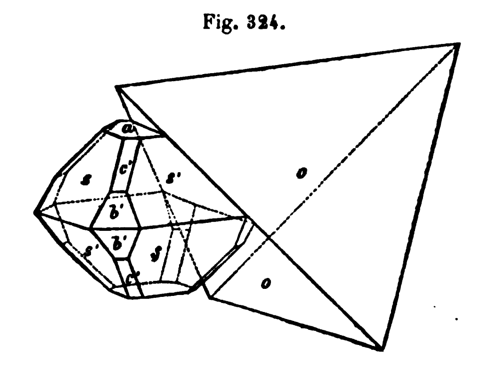


Fig. 324.



Nicht weniger deutlich erscheint die zweifach-parallele Verwachsung zwischen Kupferkies und Fahlerz, siehe Fig. 323 und 324, nach Sadebeck.

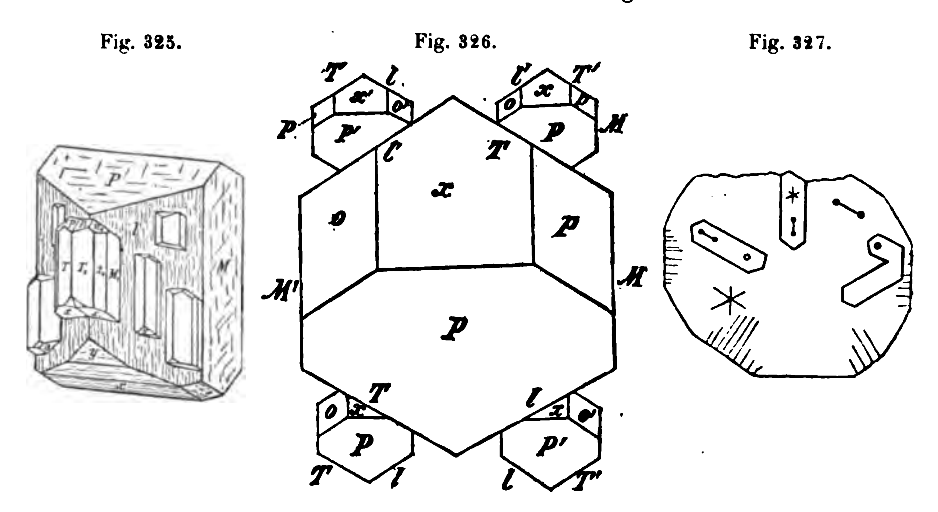
§ 116. Regelmäßige Verwachsungen.

Die regelmäßigen Verwachsungen sollen solche parallele Verwachsungen darstellen, wo mehr als zwei vorherrschende Elemente zur Deckung kommen. Handelt es sich um Verwachsungen von ungleichartigen Kristallen, so können

nie mehr als zwei Elemente vollständig gedeckt werden. Das dritte Element kommt nicht vollständig, aber annähernd zur Deckung.

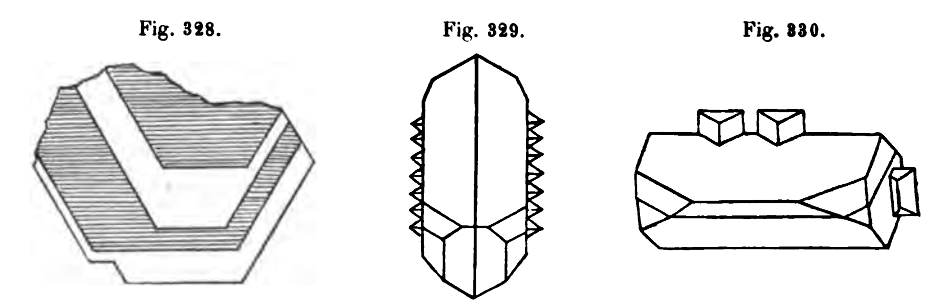
Die Fig. 325 und 326 stellen, nach G. Tschermaks Lehrbuch, eine solche regelmäßige Verwachsung von Plagioklas und Orthoklas dar; es sind die kleinen Plagioklaskristalle mit einem einzelnen großen Orthoklaskristall regelmäßig verwachsen. Dabei ist eine Zonenachse der Plagioklase mit der analogen Zonenachse des Orthoklases parallel. Außerdem ist auch die Fläche *M* gemeinschaftlich. Die vollkommene Spaltungsfläche der Plagioklase *P* und die analoge vollkommene Spaltungsfläche des Orthoklas sind nicht streng parallel, da sie in bezug auf die Fläche *M* andere Neigung haben. Aber abgesehen von dieser nicht absoluten Deckung eines dritten Elements kann man eine solche Verwachsung doch viel regelmäßiger nennen, als wenn die Fläche *x* des Plagioklas auf derselben Seite der Fläche *P* des Orthoklas aufgetreten wäre.

Fig. 325. Fig. 326. Fig. 327.



Ebenso regelmäßig kann die Verwachsung von Glimmer und Chlorit, siehe Fig. 327 und 328, nach G. Tschermak, genannt werden. Die Basisflächen kommen dabei zur Deckung und außerdem stimmen die Kanten der triharmonischen Basisflächen so genau als möglich überein.

Fig. 328. Fig. 329. Fig. 330.



Der perthitische Überzug von Albit auf Orthoklas ist, wie in Fig. 329 und 330 dargestellt ist, eine regelmäßige Verwachsung.

Die regelmäßigen Verwachsungen der Kristalle können also nur dort möglich sein, wo es sich um zwei oder mehrere Kristalle handelt, deren Grundgestalten sehr ähnlich sind, denn nur unter dieser Bedingung werden drei Elemente derselben recht nahe zur Deckung kommen können. Ähnlich gebaute Kristalle, deren Harmonie die gleiche ist, werden isomorphe Kristalle genannt, wenn außerdem ihre chemischen Verhältnisse nahe aneinander liegen. Die regelmäßige Verwachsung erscheint also bei den isomorphen Kristallen, und sie erzeugt isomorphe Mischungen.

§ 117. Isomorphe Mischungen.

Von isomorphen Kristallen wird später die Rede sein. Ist die Möglichkeit vorhanden, daß zwei isomorphe Kristalle gleichzeitig zur Ausbildung gelangen, so verbinden oder vielmehr mischen sie sich derart, daß ihre vorherrschenden Elemente parallel zu liegen kommen. Sind die einzelnen Bestandteile, welche die Mischung bilden, sehr klein und zwar so klein, daß sie durch die möglichen Vergrößerungen nicht erkannt werden können, so heißt die Mischung ein Mischkristall. Ein isomorpher Mischkristall wird als Grundgestalt eine mittlere Gestalt haben, welche zwischen den Grundgestalten der einzelnen Bestandteile liegt. Das geht aus dem Umstand hervor, daß die isomorphen Kristalle sich derart mischen, daß die dominierenden Elemente derselben recht stark übereinstimmen und das um so mehr, je mehr die die Mischung bildenden Kristalle isomorph sind.

Entstehen isomorphe Mischkristalle aus verschiedenen Verhältnissen der isomorphen Bestandteile, so wird ihre Grundgestalt bald mehr der einen, bald mehr der andern Grundgestalt zweier isomorpher Bestandteile nahe treten, je nachdem der eine oder der andere der letztern vorwaltet. Dieses Merkmal kann vortrefflich benutzt werden, um einen Mischkristall zu erkennen, wenn beispielsweise andere schärfere Merkmale versagen. Ein schönes Beispiel von isomorphen Mischkristallen liefern die Plagioklase. Die Plagioklase sind Metasilikate von Aluminium, Natrium und Calcium. Zuweilen tritt auch Kalium hinzu. Betrachten wir nur die Plagioklase, wo neben Aluminium nur noch Natrium oder Calcium auftritt, so können wir aus folgender Zusammenstellung

	Na : *Ca*	*h* : *M*
Albit	1 : 0	90° 9′
Oligoklas	3 : 1	88 33½
Andesin	1 : 1	88 20
Labradorit	1 : 3	88 9⅔
Anorthit	0 : 1	87 8⅔

schließen, daß der Winkel *h* : *M* mit dem Verhältnis *Na* : *Ca* im Zusammenhang steht; worin *h* und *M* bezw. die Flächen $(11\bar{2})$ und $(\bar{1}10)$, Fig. 132, S. 110, bedeuten. Wir dürfen daher daraus den von G. Tschermak gemachten Schluß ziehen, daß die einzelnen Plagioklase Mischungen von Albit und Anorthit darstellen. Wir kommen zu diesem Schlusse auch noch durch

verschiedene physikalische Erscheinungen, wie z. B. die optischen und die skalaren Größen. Man wird alle diese Erscheinungen und Beobachtungen bei den Untersuchungen über die Mischkristalle zu Hilfe nehmen müssen und alle werden zu demselben Resultate führen. Wir werden später noch auf die Mischkristalle zurückkommen.

§ 118. Zwillinge und Zwillingskristalle.

Eine zweifach-parallele Verwachsung von Kristallen oder Individuen derselben Art heißt ein Zwillingskristall und die einzelnen Bestandteile heißen Zwillinge.

Verwachsen zwei Individuen von derselben Art, wie immer sie auch gelegen sein mögen, so besitzen sie stets zwei Elemente gemein, was sehr leicht bewiesen werden kann.

Man denke sich zwei kongruente Körper, welche einen Punkt, z. B. das Zentrum oder eine Ecke gemeinschaftlich haben. Dann ist es immer möglich, den einen Körper mit Hilfe einer Drehung genau zur Deckung mit dem andern zu bringen. Die Drehungsachse ist daher für beide gemein, wie immer sie auch gegenseitig gelegen sein mögen. Die beiden Körper haben außerdem die auf diese Drehungsachse senkrechte Ebene gemein. Diese zwei Elemente sind ganz beliebig, und man kann sie nicht für die Erkennung eines Zwillingskristalls benutzen.

Damit eine zweifach-parallele Verwachsung zustande kommt, müssen zwei vorherrschende Elemente parallel auftreten. Also auch unter Zwillingskristallen werden nur solche Verwachsungen von Kristallen derselben Art verstanden, wo die Kristalle zwei **herrschende Elemente** gemeinschaftlich haben; alle übrigen Verwachsungen sind unregelmäßig und gehören auch nicht zu den Zwillingskristallen.

Die zwei dominierenden Elemente sind a) entweder zwei Flächen, welche also eine Zone oder b) zwei Kanten, die eine Fläche bestimmen, oder endlich c) eine Fläche und eine Kante, welche in der Fläche liegt. Die zwei gleichnamigen Elemente können sich entweder direkt oder abwechselnd decken. Je nach den Elementen, welche von zwei oder mehreren verwachsenen Individuen zur Deckung gelangen, richten sich auch die verschiedenen Zwillingsgesetze. Jedenfalls stehen die Zwillingsgesetze mit den Grundgestalten und Harmonien der Kristalle im Zusammenhang.

Wenn von zwei Individuen mehr als zwei Flächen, welche keine Zone bilden, oder mehr als zwei in keiner Fläche liegende Kanten direkt zur Deckung gelangen, so decken sich die Grundgestalten der zwei Individuen vollständig. Tritt das ein, so kann man von Zwillingen erst dann sprechen, wenn beide eine verschiedene Harmonie aufweisen. In dem Falle also, wo die Grundgestalten vollständig parallel liegen, erzeugen zwei oder mehrere voneinander verschiedene Individuen, wenn sie nicht holoharmonisch sind, einen Zwillingskristall. Eine vollständig parallele Verwachsung erzeugt Zwillingskristalle nur wenn die Kristalle hemiharmonisch, tetartoharmonisch,

ogdoharmonisch oder hemimorph sind. Zwei hemiharmonische Individuen, wenn sie nicht identisch sind, ergänzen sich zu der Holoharmonie; zwei tetartoharmonische Gestalten ergänzen sich zu einer Hemiharmonie und vier tetartoharmonische Individuen zu der Holoharmonie.

Wir können also zweierlei Arten von Zwillingen unterscheiden, nämlich ergänzende und unergänzende Zwillinge.

Die ergänzenden Zwillinge können nur die hemiharmonischen, tetartoharmonischen und ogdoharmonischen Kristalle sein, wenn ihre Grundgestalten vollständig parallel zur Ausbildung gelangen.

§ 119. Ergänzende Zwillinge.

Die ergänzenden Zwillinge sind Individuen derselben Art, welche alle Elemente gemeinschaftlich haben, und deren Harmonien sich zu einer höhern Harmonie ergänzen oder kompletieren.

Die Fig. 331 und 334 stellen schöne Beispiele von ergänzenden Zwillingen der drei- und viergliedrigen Grundgestalten dar. Die zwei ergänzenden Zwillinge Fig. 331 gehören zur pentagonalen Hemiharmonie $(33)^{\sigma}$, sie bilden infolge der Verwachsung die Holoharmonie $(34)^{s}$. Der Eisenkies tritt oft in dieser Weise verzwillingt auf (nach Fr. Zirkels Lehrbuch).

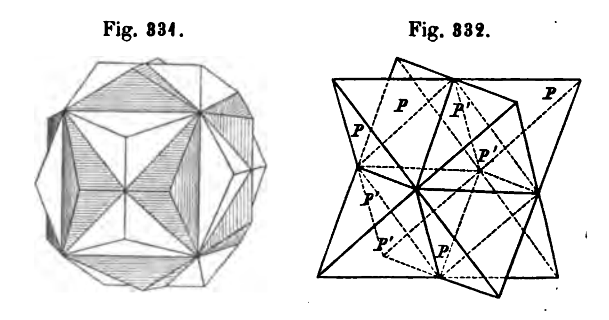


Fig. 331. Fig. 332.

Die zwei ergänzenden Zwillinge der Fig. 332 gehören zur tetraedrischen Hemiharmonie $(33)^{s}$ und bilden zusammen ebenfalls die Holoharmonie $(34)^{s}$. Die Durchkreuzungszwillinge lassen sofort die zwei Individuen $P'P'$ ... und PP ... erkennen. Der Diamant zeigt nicht selten solche Verwachsungen.

Die Fig. 333 und 334 geben ergänzende Zwillinge der dreigliedrigen Grundgestalten; sie gehören zur gyroedrischen Hemiharmonie (23), wie sie z. B. beim Quarz erscheint. Das eine Individuum ist nach dem einen Sinn, das andere nach dem entgegengesetzten Sinn gedreht; beide ergänzen sich zur Holoharmonie $(63)^{s}$. Ein solcher Quarzkristall, Fig. 334, zeigt keine Drehung mehr an, wenn die Verwachsung innig und gleichmäßig erfolgt ist.

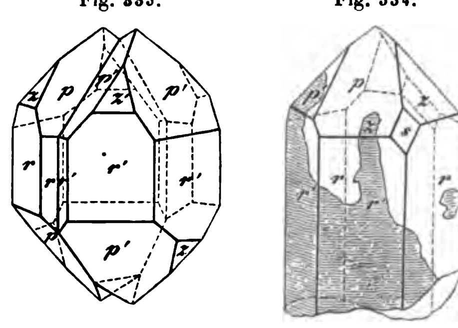


Fig. 333. Fig. 334.

Ergänzende Zwillinge können dagegen nicht solche genannt werden, bei denen jedes Individuum holoharmonisch ist. Solche treten zuweilen beim Kalkspat auf, siehe Fig. 335 und 336, also im allgemeinen bei solchen Kristallen, welche zu den dreigliedrigen Grundgestalten gehören. Kommen aber solche unergänzende Zwillinge vor mit paralleler Stellung, wie bei den ergänzenden Zwillingen, so taucht die Vermutung auf, ob alle jene Kristalle, welche derartige Zwillinge veranlassen, nicht besser in die sechsgliedrigen anstatt in die dreigliedrigen Grundgestalten passen. Nur die Erfahrung kann natürlich darüber Aufschluß geben; die Erfahrung muß nämlich zeigen, daß die auftretenden Flächen die sechsgliedrige Grundgestalt hervorrufen. Die Spaltungsflächen desKalkspates schließen natürlich diesen Kristall von der sechsgliedrigen Grundgestalt aus und damit sind die in Fig. 335 und 336 dargestellten Zwillinge des Kalzits nicht ergänzende Zwillinge, sondern unergänzende Zwillinge.

Fig. 335. Fig. 336.

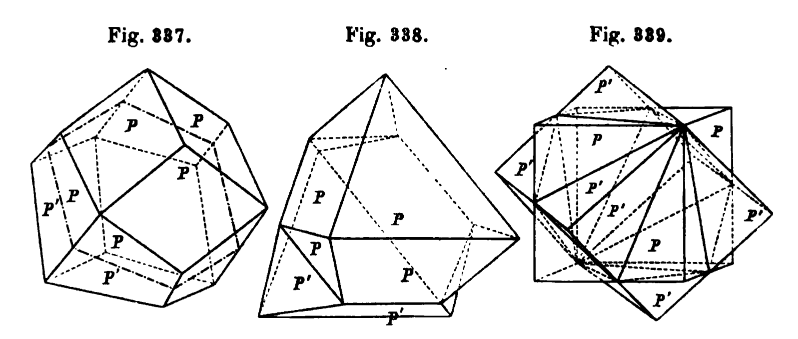
§ 120. Unergänzende Zwillinge.

Die unergänzenden Zwillinge sind Individuen, welche weder drei nicht in einer Zone liegende Flächen, noch drei in einer Ebene liegende Kanten gemeinschaftlich haben. Ein aus zwei unergänzenden Zwillingen gebildeter Zwillingskristall ist daher eine zweifach-parallele Verwachsung von zwei Individuen gleicher Art, wo die zur Deckung kommenden Elemente vorherrschen und vorherrschen müssen.

Die dominierenden Elemente sind vorwiegend die Hauptflächen und Hauptzonen und dann die Einheitsflächen und Einheitszonen überhaupt.

In jedem Zwillingskristall drückt sich das Zwillingsgesetz durch das Verwachsungselement und durch die deckenden Elemente aus.

Fig. 337. Fig. 338. Fig. 339.



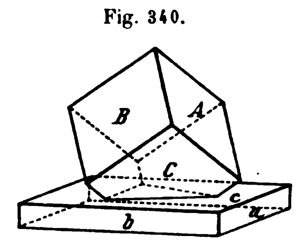
Bei den drei- und viergliedrigen Grundgestalten treten verschiedene Zwillingsgesetze auf, da verschiedene Elemente gleichmäßig vorherrschen.

Die hexaedrischen Kristalle verwachsen gewöhnlich durch ihre hexaedrischen Flächen {100}, die oktaedrischen durch ihre oktaedrischen Flächen {111} und die dodekaedrischen Kristalle durch ihre dodekaedrischen Flächen {110}.

Das häufigste Zwillingsgesetz ist das, wo die Verwachsungsfläche die eines Oktaeders ist. Dieses Zwillingsgesetz ist in Fig. 337, 338 und 339 dargestellt, wie es etwa bei der Zinkblende, bei dem Kupfer, Silber, Gold (Fig. 337), bei Spinell, Magneteisenerz (Fig. 338) und bei Flußspat, Eisenkies, Bleiglanz (Fig. 339) usw. auftritt.

Da bei den drei- und viergliedrigen Kristallen die Einheitsflächen ziemlich gleichmäßig zur Entwicklung gelangen, so kann es selbstverständlich bei der Zwillingsbildung vorkommen, daß die ungleich benannten Flächen zur Deckung kommen.

Fig. 340.



Ein schönes Beispiel hiervon liefert die Fig. 340, wo ein Zwilling des Natriumchlorats nach W. J. Pope dargestellt ist. Dabei fällt die Fläche (111) des oberen Individuums mit der Fläche (001) des unteren zusammen, und sie haben beide die Zone $[1\bar{1}0]$ gemeinschaftlich. Gleichzeitig deckt sich die Fläche (001) des oberen Individuums mit der Fläche $(\bar{1}\bar{1}1)$ des unteren.

Bei den vier-, drei- und sechsgliedrigen Grundgestalten werden die Zwillinge sich derart verbinden, daß entweder die Basis die Verwachsungsfläche resp. Deckungsfläche wird, wenn die Grundgestalt tafelartig ist, oder die Prismenzone resp. eine Fläche derselben das Verwachsungselement resp. Deckungselement wird, wenn die Grundgestalt prismatisch ist.

Fig. 333 und 334 zeigen die nach dem sechsseitigen Prisma erfolgte Verbindung von zwei Kalzitzwillingen. Die Verwachsungsfläche ist die zum Prisma senkrechte Ebene (111). Aus dieser Verwachsung entsteht eine höhere Harmonie als der dreigliedrigen Grundgestalt zukommt, nämlich die trigonotypische Hemiharmonie (23)[3] der sechsgliedrigen Grundgestalt.

Die Fig. 341, 342 und 343 stellen Zwillingskristalle dar der sechsgliedrigen Grundgestalt, wobei die Flächen der hexaharmonischen Zone gemeinschaftlich werden, da die Individuen prismatisch ausgebildet sind. Die Verwachsungsfläche ist dabei irgend welche Fläche des Prismas. Ähnliche Zwillingskristalle zeigen der Aragonit, der Cerussit, der Bournonit usw.

Fig. 341.

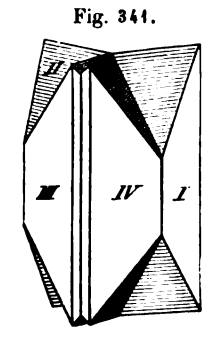


Fig. 342.

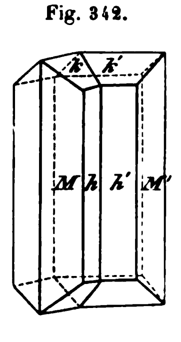
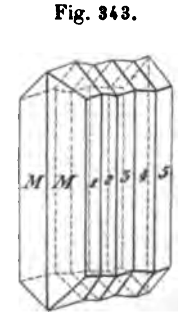


Fig. 343.

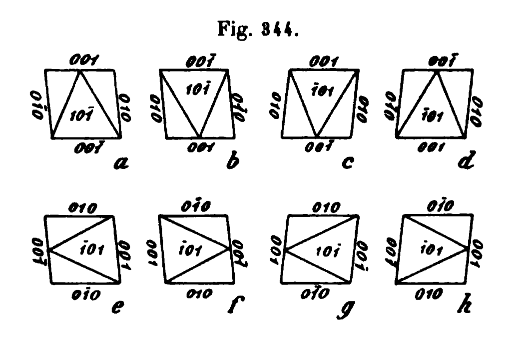


Die Plagioklase kristallisieren, wie schon in § 47, S. 109, 110, angegeben wurde, nach der drei- und viergliedrigen Grundgestalt (dodekaedrisch). Von den vier herrschenden triharmonischen Zonen tritt hauptsächlich die triharmonische Zone [111], Fig. 132, S. 110, hervor, welche durch die Spaltungsflächen $M(\bar{1}10)$, $l(0\bar{1}1)$ und $T(10\bar{1})$ bestimmt ist. Außerdem tritt von den drei herrschenden diharmonischen Zonen [100], [010], [001] die Zone [001] hervor, worin die zwei vollkommenen Spaltungen $P(110)$ und $M(\bar{1}10)$ fallen.

Es müssen sich daher bei den Plagioklasen Zwillingskristalle verifizieren, worin die Flächen dieser zwei herrschenden Zonen zur Deckung gelangen.

Betrachten wir zuerst die Zone [001]. Zeichnen wir alle möglichen Lagen der Plagioklase mit dieser diharmonischen Zone parallel, so bekommen wir die acht in Fig. 344 dargestellten Lagen *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *h*. Verwachsen die so gelegenen Individuen zusammen, so entstehen folgende Zwillingsgesetze. Für *P* ist das alte Symbol (001) und für *M* das alte Symbol (010) in Gebrauch gekommen.

Fig. 344.

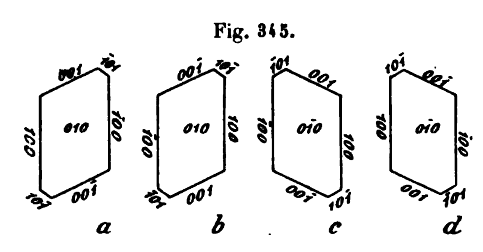


1. *a* mit *b*, Manebacher Gesetz (001) oder (010) gemeinschaftlich,
2. *a* » *c* (001) gemeinschaftlich,
3. *a* » *d* (001) »
4. *a* » *c* (010) »
5. *a* » *d* (010) »
6. *a* » *e* } Bavenoer Gesetz I.
7. *a* » *f* }
8. *a* » *g* } Bavenoer Gesetz II.
9. *a* » *h* }

Betrachten wir dagegen die herrschende Zone [111], so tritt in dieser Zone hauptsächlich die Spaltungsfläche $M(\bar{1}10)$ hervor. Die Zwillinge werden daher mit der herrschenden Fläche *M* zur Deckung gelangen und die Zone [111] parallel haben.

In Fig. 345 sind die Individuen mit der Fläche *M* parallel dargestellt, dabei ist auch hier die Fläche *M* durch das alte Symbol (010), *P* durch (001) und *h* durch (100) bezeichnet. Es sind dabei nur vier mögliche Positionen, nämlich *a*, *b*, *c*, *d*.

Fig. 345.

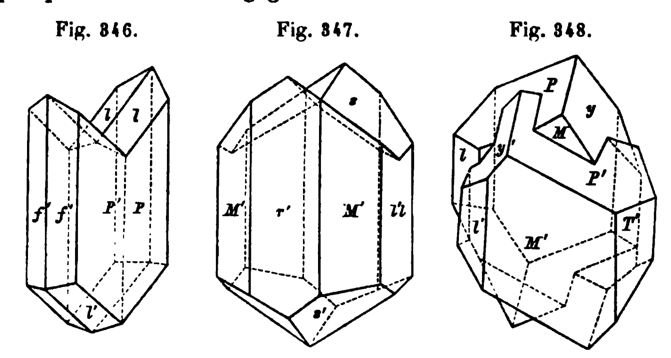


Treten die in diesen Lagen befindlichen Individuen in Verbindung, so erfolgen die drei Zwillingsgesetze:

1. a mit b Albitgesetz,
2. a » c Karlsbader Gesetz I,
3. a » d Karlsbader Gesetz II.

Fig. 348 zeigt das Karlsbader Gesetz in paralleler Perspektive, wobei die Zone $ll'M'T'$ gemeinschaftlich ist und die Spaltungsfläche M resp. M' die Verwachsungsebene darstellt. Zwillinge nach dem Albitgesetz sind in Fig. 349 und 350 perspektivisch wiedergegeben.

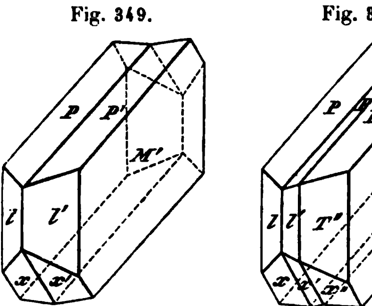
Fig. 346. Fig. 347. Fig. 348.

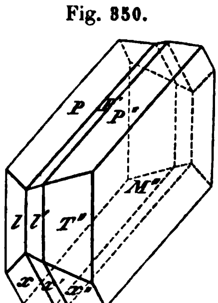


In manchen Plagioklaskristallen erscheint die Zone $yxP = (001)\cdot(112)\cdot(110)$ (neue Bezeichnung) vorherrschend ausgebildet. Die Folge davon ist, daß die Individuen nach dieser Richtung und nach der Fläche $P = (110)$ parallel verwachsen; es entsteht dadurch das Periklingesetz. Die Ausbildung der Zone $[1\bar{1}0] = yP$ wird durch eine mehr oder weniger scharfe Liniierung auf P, x oder y hervorgehoben. Anstatt P kommt auch x oder y zur Deckung, aber viel seltener als P.

Das Periklingesetz des Zwillingskristalls stellt ein Beispiel von Zwillingen dar, welche eine Fläche (110) P und eine darin enthaltene Kante $[1\bar{1}0]$ gemeinschaftlich haben. Es kann durch die Verwachsung der zwei Individuen a und c der Fig. 344 dargestellt werden; die deckenden Flächen sind (001) und die deckenden Kanten $(001)\cdot(10\bar{1})$.

Fig. 349. Fig. 350.





In Fig. 347 ist ein Beispiel von Zwillingen der viergliedrigen Grundgestalt dargestellt, wie z. B. der Augit zu erscheinen pflegt. Dabei ist die diharmonische Zone $[001]$ vorherrschend und gemeinschaftlich. Die Verwachsungsfläche ist dabei (010) oder (100), selten (110) resp. $(1\bar{1}0)$.

Bei dem tafelartigen Gipskristall, der eine ausgezeichnete Spaltungsfläche besitzt und nach einer Zone ausgebildet ist, tritt das Zwillingsgesetz zur Erscheinung, daß diese Zone und die Spaltungsfläche gemeinschaftlich werden, siehe Fig. 346.

Sowie die äußern Bedingungen die gewöhnliche Kristallgestalt verändern, so können sie auch Zwillingsgesetze veranlassen, welche mit den entsprechenden Grundgestalten nicht im Zusammenhang stehen.

Zinnerz, Rutil und Hausmannit gehören zu der viergliedrigen Grundgestalt. Man müßte also erwarten, daß ihre Zwillinge nach der diharmonischen Zone verwachsen. Das ist auch der Fall; nur wegen der auftretenden Winkel in der Zone [001] stimmen solche regelmäßige Verwachsungen mit der vollkommenen Parallelität überein; sie ergeben also keine Zwillingsverbindungen, sondern ein Weiterwachsen. Dagegen findet man bei diesen Mineralien Zwillinge nach einer der Flächen {101} verwachsen, wie die Fig. 351 für Zinnerz und Fig. 352 für Rutil darstellt, was offenbar mit dem Umstand im Zusammenhang stehen muß, daß die Kristallform {101} oft, wenigstens in der ersten Entstehung der Kristalle, vorherrscht.

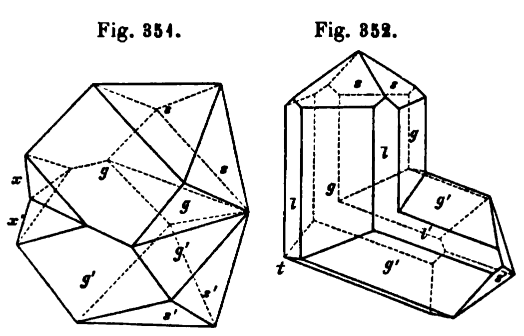


Fig. 351. Fig. 352.

Alle die Beobachtungen, welche unergänzende Zwillinge betreffen, führen zu Zwillingsgesetzen, die folgendermaßen zusammengefaßt werden können:

Zwei unergänzende Zwillinge haben übereinstimmend oder abwechselnd:

1. zwei herrschende Flächen oder
2. zwei herrschende Kanten

gemeinschaftlich.

Kommen die zwei Elemente übereinstimmend zur Deckung, so kann die gegenseitige Lage der zwei Individuen durch eine einfache geometrische Deutung dargestellt werden.

a) Sind die zur Übereinstimmung kommenden Elemente Kristallflächen, so geht das eine Individuum in das andere über durch eine Drehung um 180° und zwar um die durch die zwei Flächen bestimmte Zonenachse, welche Zwillingsachse heißt. In diesem Fall haben die zwei Individuen eine ganze Zone gemeinschaftlich, d. h. alle Flächen, welche zur Zone gehören.

b) Sind die zur Übereinstimmung kommenden Elemente Kristallkanten, so geht das eine Individuum in das andere über durch eine Drehung um 180° in der durch die zwei Kanten bestimmten Ebene. Die Normale zu dieser Ebene heißt ebenfalls Zwillingsachse und die zur Zwillingsachse senkrechte Ebene ist die Zwillingsebene. In diesem Fall haben die zwei Individuen eine ganze Fläche, d. h. alle in ihr enthaltenen Kanten gemeinschaftlich.

c) Sind endlich die zur Übereinstimmung kommenden Elemente eine Kristallfläche und eine in ihr liegende Kristallkante, so geht das eine Individuum in das andere über durch eine Drehung um 180° in der durch die

Kante gehenden und zur Fläche senkrecht stehenden Ebene. Letztere heißt Zwillingsebene und ihre Normale Zwillingsachse.

Die Zwillingsachse ist also entweder eine herrschende Kristallkante oder die Normale zu einer herrschenden Kristallfläche oder endlich die Normale zu einer herrschenden Kristallkante, welche in einer herrschenden Kristallfläche liegt. Analog ist die Zwillingsebene entweder eine herrschende Kristallfläche, oder die Normalebene zu einer herrschenden Kristallkante, oder endlich eine durch eine herrschende Kante gehende und zu einer herrschenden Fläche senkrecht stehende Ebene.

Die Zwillingsebene bei dem Albitgesetz der Plagioklase, Fig. 345 a, b und Fig. 349 ist offenbar die vollkommene Spaltungsfläche *M*, während ihre Normale die Zwillingsachse ist. Die Zwillingsachse bei dem Karlsbader Gesetz, Fig. 345 a, c und Fig. 348, ist die Achse der Zone *MlT*, während die darauf senkrechte Ebene die Zwillingsebene darstellt. Die Zwillingsachse bei dem Periklingesetz ist die herrschende Kante *yP*, und die Zwillingsebene, die darauf senkrechte Ebene.

d) Geschieht bei der Verwachsung von zwei Zwillingen die Deckung der zwei herrschenden Elemente abwechselnd, so können wir auch von einer Zwillingsachse und einer Zwillingsebene sprechen. In diesem Fall ist die Zwillingsebene eine Mittelebene und die Zwillingsachse eine Mittellinie, welche bezw. die Winkel halbieren, die die herrschenden Elemente einschließen. Der Bavenozwilling ist ein Beispiel hierfür.

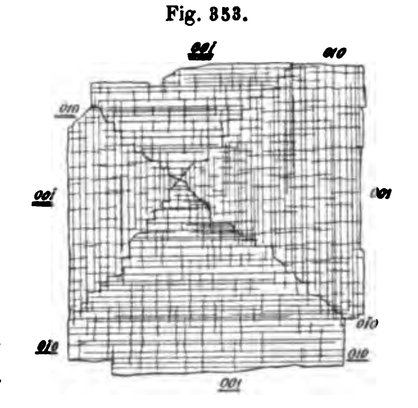
§ 121. Verzwillingung, Mimesie.

Wiederholt sich das zwischen zwei Zwillingen herrschende Zwillingsgesetz zwei-, drei- oder mehrmals, so entsteht eine Verzwillingung, das heißt eine zweifach-parallele Verwachsung von mehreren Individuen, die sich gegenseitig nach demselben Zwillingsgesetz verhalten.

Die erwähnte Fig. 350 zeigt eine Verzwillingung nach dem Albitgesetz. Dort sind je die zwei Individuen *Plx* und *P'l'x'*, desgleichen *P'l'x'* und *P''l''x''* nach diesem Gesetz verwachsen, es stellen sich somit das erste und das dritte Individuum dieser Verzwillingung vollkommen parallel.

Die Fig. 341 und 343, S. 231, stellen ähnliche Verzwillingungen dar, wie sie z. B. bei dem Aragonit vorzukommen pflegen.

Fig. 353.



Die Fig. 353 gibt einen Querschnitt eines Vierlings nach dem Bavenogesetz bei einem Orthoklas, wobei die Spaltungsflächen abwechselnd verwachsen und zur Deckung gelangen. Die vollkommenen Spaltungsflächen *M* und *P* sind in der Fig. 353 mit den alten Symbolen (010) resp. (001) bezeichnet.

Die Fig. 354 gibt nach L. Fletcher eine Verzwillingung des Kupferkieses, wo sechs Kristallindividuen miteinander nach den Flächen {101} verwachsen sind.

Eine Verzwillingung kann zuweilen dazu dienen, mit großer Deutlichkeit die Grundgestalt anzugeben, während einzelne Kristallindividuen nicht dazu hinreichen. Ein klassisches Beispiel hierfür liefern der Aragonit, der Cerussit usw. Die Fig. 355 gibt nach V. Goldschmidt eine ähnliche Verzwillingung

Fig. 354.

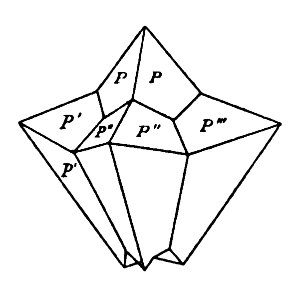
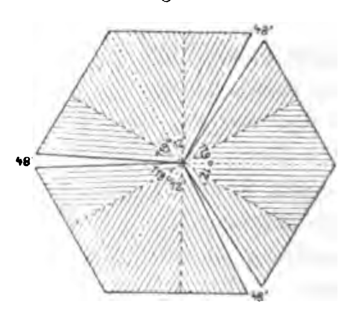


Fig. 355.



des Chrysoberyll wieder. Dabei herrscht die hexaharmonische Zone vor, welche zur Papierebene senkrecht angenommen ist. Dadurch, daß die Kristallindividuen nach den herrschenden Flächen dieser Zone verwachsen, ergibt sich die deutliche Form der hexaharmonischen Zone, welche im Querschnitt als ein reguläres hexagonales Polygon erscheint.

Wenn die die Verzwillingung bildenden Individuen sehr klein sind, so entsteht eine homogene Mischung, welche eine höhere Harmonie aufweist als die sie bildendenden Individuen; man nennt eine solche Mischung Mimesie.

Leuzit und Perowskit geben ausgezeichnete Beispiele von mimetischen Kristallen; sie sind nur in dieser Art ihres Auftretens bekannt. Die Kristallflächen sind eigenartig gestreift, wie es bei den Harmonien ihrer Grundgestalt nie vorkommt. Aus dieser Streifung ist zu schließen, daß Leucit und Perowskit durchweg aus Zwillingslamellen bestehen; wahrscheinlich gibt es aber doch viele Kristalle, wie das z. B. auch beim Aragonit der Fall ist, welche gar keine Zeichen von Verzwillingung zeigen, aber doch mimetisch sind. Das geht zuweilen aus verschiedenen physikalischen Erscheinungen hervor.

Isomorphe Mischkristalle und mimetische Kristalle sind sich in gewissen Beziehungen entsprechende Erscheinungen. Die Mischkristalle beziehen sich auf ungleichartige Individuen, die aber isomorph sind, die mimetischen Kristalle dagegen auf gleichartige, also identische Individuen, die aber durch ihre Stellung ungleich harmonisch beschaffen sind. Wenn mimetische Kristalle aus aktiven Kristallen gebildet werden, so kann es möglich sein, daß sich die optischen oder elektrischen Aktivitäten gegenseitig aufheben, wenn nämlich die hemimorphe oder drehende Harmonie durch Mimesie eine höhere Harmonie annimmt.

Nicht nur die unergänzenden, sondern auch die ergänzenden Zwillinge erzeugen mimetische Kristalle. Ja, man kann sogar im Zweifel darüber sein, ob die holoharmonischen Kristalle wirklich »einfache« oder »mimetische« Kristalle seien. Eine solche Frage würde natürlich nur im einzelnen gelöst werden können; sie ist für die Kristallographie von größter Bedeutung.

§ 122. Bestimmung der Zwillingsgesetze.

Wenn es sich um die Bestimmung von Zwillingsgesetzen handelt, so muß ein reiches Material an Beobachtungen zur Verfügung stehen, damit die zufälligen Störungen auf das Resultat eine Wirkung nicht mehr ausüben können. Es wiederholt sich hier ein analoges Verfahren, wie es schon bei Bestimmung der geometrischen Konstanten einer Kristallsubstanz ausgeführt wurde; auch dort mußte zu diesem Zwecke ein reiches Material an Bestimmungen dienen.

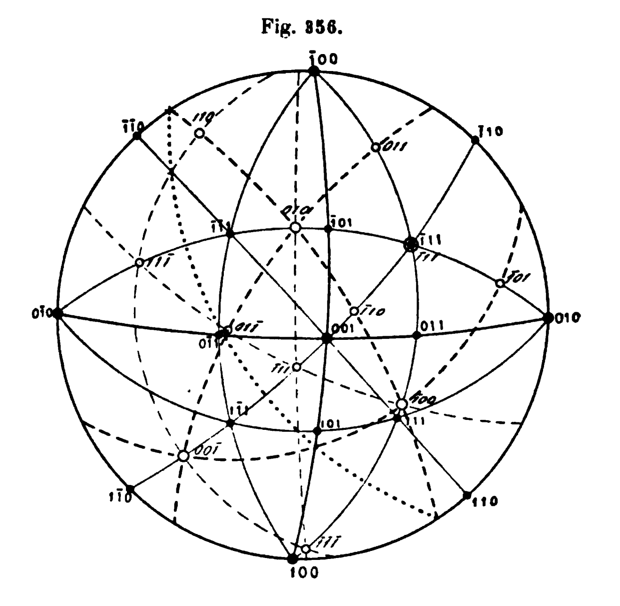
Aus jedem Zwillingskristall werden die übereinstimmenden Elemente durch Projektion zum Vorschein gebracht. Das Mittel der gemeinschaftlichen Elemente einer recht großen Anzahl von Zwillingskristallen wird das Zwillingsgesetz bestimmen.

Für diese Bestimmung eignet sich die stereographische Projektion.

Wir wollen zwei Fälle behandeln. Der eine soll der sein, daß die Zwillinge zwei Kanten gemeinschaftlich haben und folglich auch die durch sie bestimmte Fläche. In der stereographischen Projektion wird diese Fläche durch einen Pol zum Vorschein kommen.

In Fig. 356 ist das stereographische Bild zweier Zwillinge eingetragen, von welchen bewiesen werden soll, ob sie einen gemeinschaftlichen Pol, d. h. eine gemeinschaftliche Fläche besitzen. Man wähle beliebige Paare entsprechender Zonenkreise z. B. die zwei Kreise $(\bar{1}00)$ (001) für das eine und $(\bar{1}00)$ (001) für das andere Individuum. Wir konstruieren die zwei größten Kreise, die **Mittelkreise**, welche die Winkel zwischen den zwei gewählten Zonenkreisen halbieren. Dann geht ein Kreis durch den gemeinschaftlichen Pol, der in diesem Fall $(\bar{1}11)$ ist. Wenn wir diese Konstruktion für alle Paare entsprechender Zonenkreise ausführen, so

Fig. 356.



werden wir für jedes Paar zwei Mittelkreise erhalten, von denen der eine

durch den gemeinschaftlichen Pol, $(\bar{1}11)$ in der Fig. 356, gehen muß. Die andern Mittelkreise fallen alle zusammen und stellen den Polarkreis des gemeinschaftlichen Pols dar. Dieser Polarkreis, dick punktiert in der Fig. 356, ist sehr leicht zu zeichnen, denn er ist der Ort aller Schnittpunkte der entsprechenden Zonenkreise der zwei Individuen.

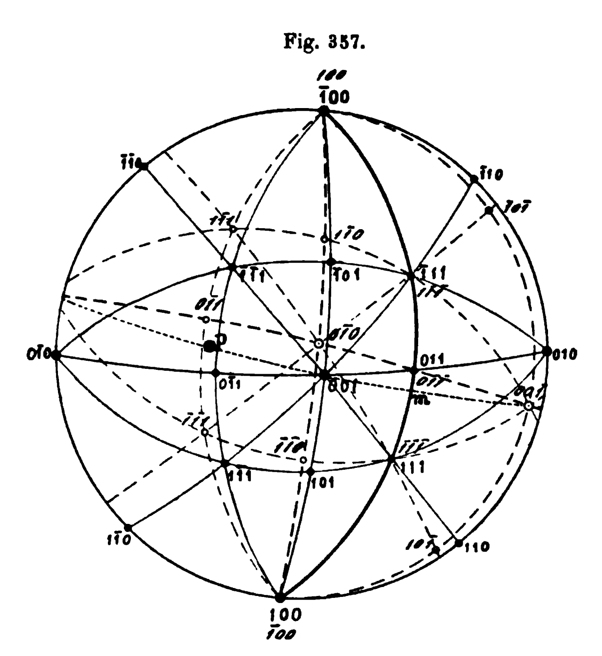
Ist der gemeinschaftliche Pol der Zwillinge gefunden, so untersuche man, ob die durch denselben gehenden und entsprechenden Zonenkreise gemeinschaftlich sind. In der Fig. 356 stellt sich das Zwillingsgesetz so dar, daß eine Fläche gemeinschaftlich ist, d. h. die Fläche $(\bar{1}11)$; und alle darin enthaltenen Kanten kommen entsprechend zur Deckung. Diese Fläche ist daher die Zwillingsebene, welche durch den Pol $(\bar{1}11)$ in der stereographischen Projektion dargestellt ist. Der Polarkreis dieses Pols stellt dann die Zwillingsachse dar. Das eine Individuum geht in das andere über, wenn es um 180° um diese Zwillingsachse gedreht wird.

Der zweite zu behandelnde Fall ist der, daß die zwei Zwillinge zwei Flächen gemeinschaftlich haben sollen, also auch die durch dieselben bestimmte Zone. In der stereograhischen Projektion wird diese Zone durch einen Zonenkreis zum Vorschein kommen.

In Fig. 357 ist das stereograpische Bild zweier Zwillinge eingetragen, von welchen bewiesen werden soll, daß sie einen gemeinschaftlichen Zonenkreis, d. h. eine Zone, besitzen.

Man wähle zwei beliebige entsprechende Pole, z. B. (001) des einen Individuums und (001) des andern resp. $(00\bar{1})$ und $(00\bar{1})$ und verbinde sie durch einen größten Kreis. In diesem Kreis suche man die zwei Punkte, welche in der Mitte stehen zwischen den zwei gewählten Polen. In der Fig. 357 sind beide Mittelpunkte m und P gezeichnet. Man konstruiere nun ferner einen größten Kreis, der durch den Mittelpunkt m geht und auf dem Kreis (001) (001) senkrecht steht. Dieser Kreis ist dann der gemeinschaftliche Kreis des stereographischen Bildes. Der zweite Mittelpunkt P ist derselbe für alle Paare entsprechender Pole und ist gleichzeitig der Pol des gemeinschaftlichen Kreises. Ist der gemeinschaftliche Zonenkreis der Zwillinge gefunden,

Fig. 357.



so untersuche man, ob die in denselben liegenden und entsprechenden Pole gemeinschaftlich sind. In der Fig. 357 stellt sich das Zwillingsgesetz so dar, daß eine Zone vollständig gemeinschaftlich ist, d. h. die Zone (100)·(011); und folglich kommen alle darin enthaltenen Flächen zur Deckung. Diese Zone stellt daher die Zwillingsachse dar. Der Pol dieser Zone drückt dann die Zwillingsebene aus.

Beide Fälle decken sich eigentlich geometrisch vollständig. Sie sind nur kristallographisch verschieden. In einem Fall stellt der gemeinschaftliche Pol einen Pol, d. h. eine Fläche der beiden Zwillinge dar; im zweiten Fall dagegen stellt der gemeinschaftliche Kreis einen Zonenkreis der beiden Zwillinge dar. Die Konstruktion in beiden Fällen ist aber immer dieselbe. Entweder wird ein Kreis gezogen, der die Schnittpunkte der entsprechenden Zonenkreise verbindet, oder es wird der Pol gesucht, durch welchen alle größten Kreise gehen, die je zwei entsprechende Pole verbinden.

Der dritte zu behandelnde Fall betrifft einen Zwillingskristall, worin zwei Elemente abwechselnd zur Deckung gelangen. Geometrisch ist dieser Fall nicht verschieden von den beiden andern. Es muß auch hier der gemeinschaftliche Pol resp. der gemeinschaftliche Zonenkreis konstruiert werden, nach der oben angegebenen Methode. Hier werden im allgemeinen nur zwei Elemente (Flächen oder Kanten) abwechselnd gemeinschaftlich sein.

Wir sehen aus der Konstruktion, daß je 2 Kristallindividuen immer sowohl einen gemeinschaftlichen Pol als auch einen gemeinschaftlichen Zonenkreis aufweisen. Das Merkmal eines Zwillingskristalls isi aber das, daß das gemeinschaftliche Element entweder eine herrschende Zone oder eine herrschende Fläche der Grundgestalt darstellt.

Das Zwillingsgesetz wird zum Vorschein kommen, wenn von einer großen Zahl von Zwillingskristallen die gemeinschaftliche Zone resp. Fläche dieselbe oder nahezu dieselbe ist.

§ 123. Folge der Verzwillingung. Versuche.

Die Individuen der Kristalle verwachsen derart, daß ihre vorherrschenden Elemente (Flächen und Zonen) zur Deckung gelangen. Die am meisten zur Herrschaft kommenden Elemente sind diejenigen, welche die Grundgestalt bestimmen. Die Verzwillingung wird infolgedessen Gestalten hervorrufen, welche am wahrscheinlichsten den bezüglichen Grundgestalten entsprechen. Also werden drei- und viergliedrige Individuen durch Verzwillingung 3 + 4-gliedrige Gestalten hervorrufen, viergliedrige werden wieder viergliedrige Gestalten erzeugen usw.

Auch die mimetischen Kristalle, welche durch Verwachsung von Individuen gleicher Art entstehen, werden eine Grundgestalt aufweisen, die diesen Individuen eigen ist.

Da die Mischkristalle Verwachsungen von Kristallen verschiedener Substanz sind, so könnte man vermuten, daß bei ihnen bald die eine Grundgestalt, bald die andere auftreten wird, je nachdem die Individuen der einen oder der

andern Grundgestalt vorherrschen. Das ist nun nicht der Fall, die Mischkristalle bilden sich nur aus der Mischung von isomorphen Kristallen, welche jedoch in ihren chemischen und kristallographischen Beziehungen in großer Verwandtschaft stehen müssen. So wird infolgedessen auch bei ihnen diejenige Grundgestalt zur Ausbildung gelangen, welche den isomorphen Kristallen der Mischung eigen ist. Wir haben also den Satz:

Durch Verwachsung, Verzwillingung, Mischung und Mimesie wird keine neue Grundgestalt entstehen können, wohl aber eine neue Harmonie.

Durch Mischung erfolgt eine kompliziertere chemische Zusammensetzung als die einzelnen Bestandteile haben. Die Grundgestalten der auf diese Art entstehenden komplizierteren chemischen Zusammensetzungen werden dieselben sein müssen, wie diejenigen der einfachen chemischen Zusammensetzungen.

Von den isomorphen Mischungen wird noch im Kapitel IX eingehend gesprochen. Der hier entwickelte Satz über Verwachsung der Kristalle wird dort einen entsprechenden Ausdruck finden. Siehe S. 299.

Man hat Versuche angestellt, um den Grund zu erforschen, weshalb die Kristallindividuen nach denjenigen Elementen verwachsen, welche bei denselben vorherrschen.

So hat man Stäbchen von Kristallen nach verschiedenen Richtungen geschnitten und nebeneinander in einer Flüssigkeit frei schwimmen lassen, welche dasselbe spezifische Gewicht hat wie die Kristallstäbchen. Sie kamen nach und nach parallel zu stehen, wie alle stäbchenförmigen Körperchen, welche nicht Kristalle sind. Man hat ferner Täfelchen aus Kristallen herausgeschnitten und ebenfalls in einer Flüssigkeit von demselben spezifischen Gewicht schwimmen lassen. Nachdem sie nebeneinander gelegt worden waren, kamen sie parallel zu liegen mit ihren Tafelflächen, genau so wie andere gleich geschnittene Körperchen, welche nicht Kristalle sind. Aus diesen Versuchen konnte man schließen, daß die Kristallindividuen durch ihre herrschenden Elemente in Verwachsung kommen aus demselben mechanischen Grund wie alle Nichtkristalle, welche aber dieselbe Gestalt haben wie die Kristalle, wenn sie nur in eine Flüssigkeit getaucht sind und gegenseitige freie Bewegung haben. Je mehr Hindernisse ihrer gegenseitigen Bewegung entgegenstehen, um so schwieriger geht die Verwachsung nach ihren vorherrschenden Elementen vor sich.

Die wahrscheinlichste Verwachsung der Kristalle ist also die regelmäßige; sie steht in direktem Zusammenhang mit der bei der Verwachsung herrschenden Kristallgestalt. Grundgestalt der Kristalle und regelmäßige Verwachsung, Zwillingung und Verzwillingung inbegriffen, sind deshalb innig miteinander verknüpfte Erscheinungen. Die eine ist der Grund der andern, und kann zur Bestimmung der andern dienen.

§ 124. Geschichtliches. Literatur.

Die Beobachtungen über Verwachsungen und Zwillingungen der Kristalle gehen ebensoweit zurück wie die Kenntnis der Kristalle. Haüy hat

Verwachsungen der Kristalle und Zwillinge beschrieben und Zwillingsgesetze erkannt und aufgestellt. Auf die rein geometrische Vorstellung der Entstehung eines Zwillingskristalls durch eine halbe Umdrehung eines Individuums in bezug auf das andere um die Zwillingsachse gründet Haüy die Bezeichnung Hemitropie (Traité de cristallographie. Paris 1822). Eine Zusammenstellung der regelmäßigen Verwachsungen findet sich zuerst in A. Sadebeck (Pogg. Ann. Ergänzungsbd. 8, 659, 1878). Dann ferner in O. Mügge (Neues Jahrbuch für Miner. usw. BB. **16**, 335, 1903), aus welchem hier das Meiste genommen worden ist. Von den älteren Autoren, welche regelmäßige Verwachsungen der Kristalle behandeln, sind hauptsächlich zu nennen:

R. Wakkernagel. Über den Wirkungskreis der Krystalle. Kastners Archiv usw. **5**, 293—314, 1825.

W. v. Haidinger. Über die Veränderung usw. Pogg. Ann. **11**, (87), 172—191, 1827.

—— Bemerkungen über die naturhistorische Bestimmung des Smaragdites. Gilberts Ann. **75**, 367—388, 1823.

G. Rose. Über den Feldspath, Albit, Labrador und Anorthit. Gilberts Ann. **73**, 174—201, 1823.

Fr. Köhler. Mineralogisch-chemische Untersuchung einiger Varietäten des Diallags. Pogg. Ann. **13**, (89), 101, 1828.

G. Rose. Über die Nothwendigkeit Augit und Hornblende in einer Gattung zu vereinigen. Pogg. Ann. **22**, (98), 321, 1831.

—— Nachträgliche Bemerkungen über den Uralit. Pogg. Ann. **27**, (103), 97, 1833.

—— Über das Verhältniss des Augits zur Hornblende. Pogg. Ann. **31**, (107), 609, 1834.

L. v. Buch. Über einige geognostische Erscheinungen in der Umgebung des Luganer Sees in der Schweiz. Abhandl. Berliner Akademie aus dem Jahre 1826, 193.

M. L. Frankenheim. Lehre von der Kohäsion 1835.

—— Über die Verbindung verschiedenartiger Krystalle. Pogg. Ann. **37**, (113), 516, 1836.

G. Rose. Reise nach dem Ural usw. **2**, 347 und 575, 1842.

W. v. Haidinger. Handbuch der best. Min. 1845.

J. R. Blum. Die Pseudomorphosen des Mineralreichs. Stuttgart 1843. 1. Nachtrag. 149, 1847.

A. Breithaupt. Handbuch der Mineralogie. III. 1847.

O. Volger. Über die Pseudomorphosen des Fahlerzes. Pogg. Ann. **74**, (150), 25, 1848.

A. Breithaupt. Paragenesis. 1849.

C. Zincken und C. Rammelsberg. Beiträge zur Kenntniss von Mineralien des Harzes. Pogg. Ann. **77**, (153), 236, 1849.

G. Rose. Über ein neues Zwillingsgesetz beim Quarz. Pogg. Ann. **83**, (159), 461, 1851.

G. A. Kenngott. Sitz.-Ber. Wiener Akad. **10**, 293, 1853.

W. v. Haidinger. Über den Eliasit von Joachimsthal. Sitz.-Ber. Wiener Akad. 103, 1853.

H. Senarmont. Compt. rend. **38**, 105, 1854.
G. Rose. Über einige merkwürdige Pseudomorphosen von Kalkspath und Eisenglanz. Pogg. Ann. **91**, 152, 1854.
J. L. Hausmann. Abhandl. der Göttinger Gesellsch. der Wissensch. **7**, 7, 1855.
—— Abhandl. der Göttinger Gesellsch. der Wissensch. **6**, 105, 1853.
C. Rammelsberg. Über die Zusammensetzung des Titaneisens, sowie der rhomboëdrisch und oktaëdrisch krystallisirten Eisenoxyde überhaupt. Pogg. Ann. **104**, (**180**), 497, 1858; Über den sogen. octaëdrischen Eisenglanz vom Vesuv usw. (**188**), 451, 1859.
G. vom Rath. Sitz.-Ber. Niederrhein. geol. Ges. Bonn **17**, 82, 1860.
—— Ztschr. der deutschen geologischen Gesellsch. **14**, 413, 1862.
A. Breithaupt. Berg- und Hüttenm. Zeitg. **20**, 153, 1861; **21**, 99, 1862; **22**, 36, 44, 1863.
D. Gerhard. Über lamellare Verwachsung zweier Feldspathspecies. Ztschr. der deutschen geologischen Gesellsch. **14**, 151, 1862.
G. A. Kenngott. Mineralien der Schweiz. 1866.
F. Sandberger. Über die Umwandlung von Kalkspath in Aragonit. Pogg. Ann. (**105**), 472, 1866.
H. Eck. Über die Reichensteiner Quarzzwillinge. Ztschr. der deutschen geologischen Gesellsch. **18**, 426, 1866.
G. vom Rath. Mineralogische Mittheilungen. Pogg. Ann. **135**, (**211**), 561, 1868.
E. Becker. Dissertat. Breslau 1868.
G. Rose. Über die regelmässigen Verwachsungen der verschiedenen Glimmerarten usw. Monatsber. der Berliner Akademie 1869, 339.
G. Tschermak. Über Pyroxen und Amphibol. Miner. Mittheil. 1871, 17.
H. Fischer. Krit. mikr. Stud. I. Fortsetz. 9, 1871.
G. Rose. Über die Isomorphie von Kalkspath und salpetersaurem Natron. Ber. der deutschen chem. Gesellsch. 104, 1871.
A. Sadebeck. Über Fahlerz und seine regelmässigen Verwachsungen. Ztschr. der deutschen geologischen Gesellsch. **24**, 442, 1872.
V. v. Zepharovich. Miner. Lexikon. II. 322, 1873.
G. vom Rath. Ztschr. der deutschen geologischen Gesellsch. **25**, 108, 1873.
—— Pogg. Ann. **152**, 21, 1874.
A. Frenzel. Miner. Lexikon Sachsens. 246, 1874.
G. vom Rath. Mineralogische Mittheilungen. Pogg. Ann. **155**, 24, 1875.
—— Die Zwillingsverwachsungen der triklinen Feldspathe nach dem sogen. Periklingesetz usw. Neues Jahrbuch für Mineralogie usw. 1876, 689.
H. Laspeyres. Krystallographische Bemerkungen zum Gyps. Tschermaks Mineral. Mitt. 113, 1875.
H. Eck. Neues Jahrbuch für Mineralogie usw. 1876, 407.
G. Seligmann. Mineralog. Notizen. Ztschr. für Krystallographie **1**, 335, 1877.
J. Strüver. Die Mineralien Latiums. Ztschr. für Krystallographie **1**, 225, 1877.
O. Lübecke. Der Glaukophan und die Glaukophan führenden Gesteine der Insel Syra. Ztschr. der deutschen geologischen Gesellschaft 249, 1876.
E. S. Dana. Über eine regelmässige Verwachsung von Quarz und Kalkspath. Ztschr. für Krystallographie **1**, 40, 1877.
H. Bücking. Krystallographische Studien usw. Ztschr. für Krystallographie **1**, 562, 1877.

G. vom Rath. Mineralog. Mittheilungen. Ztschr. f. Krystallographie 1, 13, 1877.
G. Tschermak. Optisches Verhalten von Korund-Krystallen. Mineral. Mitt. I, 362, 1878.
A. Sadebeck. Über die Krystallotektonik des Silbers. Mineralog. Mitth. 293, 1878.
P. Groth. Mineral. Samml. der Universität Straßburg 1878.
G. W. Hawes. Die Verwachsung von Amphibol und Pyroxen. Amer. Journ. of Sc. 16, 397, 1878.

Von den älteren Aufsätzen, welche sich mit Zwillingskristallen befassen, sind hauptsächlich zu nennen:

A. Bravais. Études cristallogr. Journ. de l'École polytechn. XXXIV.
W. Haidinger. Handbuch der Mineralogie.
—— Handbuch der bestimmenden Mineralogie. Wien 1845.
C. Fr. Naumann. Lehrbuch der reinen und angewandten Krystallographie 1830.
Chr. S. Weiß. Beschreibung einer Zwillingskrystallisation des Schwefelkieses. Mag. Gesellsch. naturforsch. Freunde. Berlin 1848, 8, 24.
Von Chr. S. Weiß liegen zahlreiche Abhandlungen über Zwillingskrystalle vor.
G. Rose. Über das Krystallisationssystem des Quarzes. Abhandl. Berliner Akad. 1846.
P. Groth. Über Krystallform und Zirkularpolarisation und über Zusammenhang beider beim Quarz und überjodsauren Natron. Monatsber. der Berliner Akad. 1869, 141; Pogg. Ann. 1869, 137, 435.
D. L. Frankenheim. Über die Anordnung der Moleküle im Krystall. 1856.
E. Mallard. Traité de Cristallographie. Paris 1879.
—— Article Cristallographie dans l'Encyclopédie chimique de Frémy.
—— Bull. soc. minéral. de France 1879, p. 9.
—— Annales des Mines 7. Serie IX, p. 160.
M. Bauer. Krystallogr. Untersuchungen des Scheelits. Württemb. naturwissensch. Jahreshefte 1870.
A. Sadebeck. Angewandte Krystallographie. Berlin 1876.
Th. Liebisch. Ztschr. der deutschen geologischen Gesellschaft 1877, 625—628; Ztschr. für Krystall. 1878, 2, 74.

Die neueren Abhandlungen über Zwillinge und Verwachsungen der Kristalle finden sich hauptsächlich in Tschermaks Mineral. Mitt., Neues Jahrbuch für Mineral. usw., Bull. soc. minéral. de France, die alle in der Ztschr. f. Krystall. von Groth referiert und besprochen sind. Die wichtigsten italienischen Abhandlungen sind meistens in der Rivista di Miner. e Cristall. italiana von R. Panebianeo referiert.

Von den neuesten Aufsätzen über Zwillinge im allgemeinen sind zu nennen:

V. Goldschmidt. Verschiedene Aufsätze. Ztschr. f. Krystall. 28, 29, 30, 254, 1897—1898.
H. Baumhauer. Beiträge zur Kenntniss und Theorie der Zwillingsbildung an Krystallen. Ztschr. f. Krystall. 1899, 31, 252.
J. Beckenkamp. Über Zwillingsbildung und Krystallmassen und von Molekülen. Ztschr. f. Krystall. 1902, 36, 466.
C. Viola. Beitrag zur Zwillingsbildung. Ztschr. f. Krystall. 1902, 36, 234.
—— Beitrag zur Zwillingsbildung. Ztschr. f. Krystall. 1903, 38, 67.

V. Goldschmidt. Über Definition eines Zwillings. Ztschr. f. Krystall. **30**, 254, 1898.
A. Cesàro. Zur Theorie d. Zwillinge. Mém. d. l'Acad. d. sc. d. Belg. **5**, 53, 1893.
F. Wallerant. Sur les groupements des cristaux d'esp. diff. Bull. soc. franç. Minér. **25**, 180, 1902.
G. Tschermak. Zur Theorie der Zwillingskrystalle. Miner. Mitth. **2**, 499, 1879.
C. Klein. Mineral. Mitth. über Leucit und Analeim usw. Sitzb. kgl. preuß. Akad. d. Wiss. **164**, (**200**), 1897.
W. J. Pope. Eine nicht zwillingsartige Verwachsung von Natriumchloratkrystallen. Ztschr. f. Krystall. **31**, 15, 1900.
V. Goldschmidt. Zur Theorie der Zwillings- und Viellingsbildung. Ztschr. f. Krystall. **33**, 468.
G. Melczer. Über den Aragonit von Urvölgy (Ungarn). Ztschr. f. Krystall. **33**, 249.
F. Stöber. Über eine Methode zur Zeichnung der Krystalle. Bull. soc. fr. Minér. **22**, 42, 1899.
G. Tschermak. Einheitliche Ableitung der Kristallisations- und Zwillingsgesetze. Ztschr. f. Kristall. **39**, 433, 1904.

Über Verzwillingung und Mimesie sind hauptsächlich zu nennen:

E. Mallard. Annales des Mines **10**, 1876.
G. Tschermak. Optische Eigenschaften der Feldspathe. Ztschr. der deutschen geologischen Gesellsch. **31**, 637, 1879.
A. Des Cloizeaux. Über den Mikroklin. Compt. rend. **82**, p. 885, 1876.
Fr. Becke. Über die Zwillingsbildung und die optischen Eigenschaften des Chabasit. Tschermaks Mineral. Mitt. **2**, 391, 1880.
J. Rumpf. Über den Krystallbau des Apophyllits. Tschermaks Mineral. Mitt. **2**, 369, 1880.
G. vom Rath. Über das Krystallsystem des Leucit. Jahrbuch für Mineral. usw. 113, 1873.
H. Baumhauer. Über den Perowskit. Ztschr. f. Krystall. **4**, 1879, 187.

Kapitel VIII.

Die Symmetrie der Kristalle.

§ 125. Die Symmetrieelemente.

Von einer harmonischen Figur in der Ebene oder im Raume wurde gesagt, daß sie in sich übergeht durch eine gewisse Operation, eine harmonische Operation. Genügt eine harmonische Figur gewissen Bedingungen, so geht sie in eine symmetrische Figur über; die darin vorhandenen Harmonieelemente werden dann Symmetrieelemente.

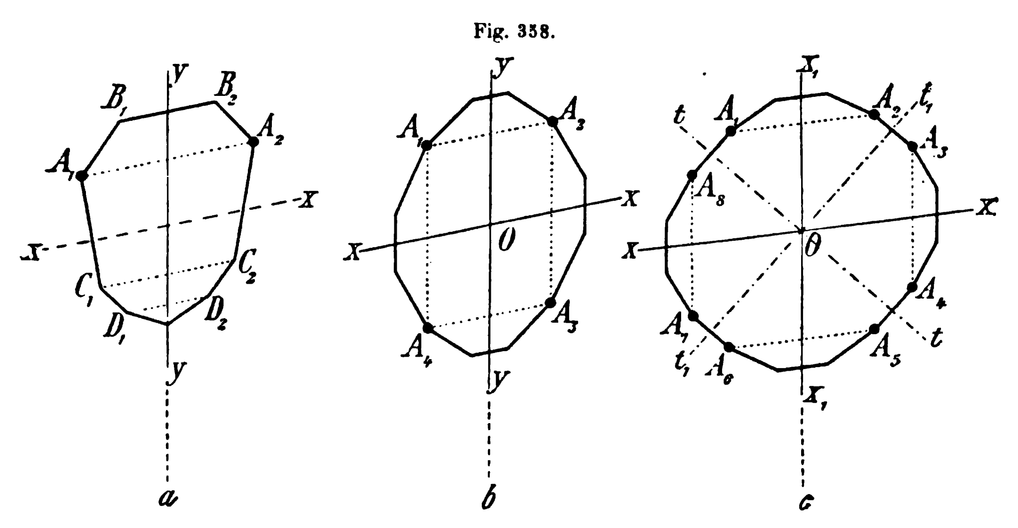
Das Symmetriezentrum kam schon im IV. Kapitel vor, wo es als gleichbedeutend mit dem Harmoniezentrum hingestellt wurde. Das Symmetriezentrum ist im Kristall vorhanden, sobald alle Richtungen einwertig erscheinen, d. h. nach beiden Sinnen denselben physikalischen Wert besitzen.

Alle Kristallharmonien also, welche mit dem **Harmoniezentrum** versehen sind, erscheinen in bezug auf das Symmetriezentrum symmetrisch. Fällt das Harmoniezentrum aus, so kann auch kein Symmetriezentrum vorhanden sein.

In den Fig. 358, 359, 360 sind die ferneren Harmonieelemente dargestellt. Wir können aus denselben die Symmetrieelemente ableiten.

In Fig. 358a ist eine Figur dargestellt, welche in bezug auf eine Harmonieebene harmonisch beschaffen ist. Die Harmonieebene war dort senkrecht zur Zeichnungsebene angenommen, sie geht durch die Spur yy. Dabei war eine Richtung xx, worauf sich die Harmonie bezieht, erforderlich. Kommt nun diese Richtung xx senkrecht zur Harmonieebene zu stehen, so verwandelt sich letztere in eine Symmetrieebene.

Fig. 358.



Eine Figur, welche in bezug auf eine Symmetrieebene symmetrisch ist, besteht aus zwei Teilen, von denen der eine das Spiegelbild des andern ist.

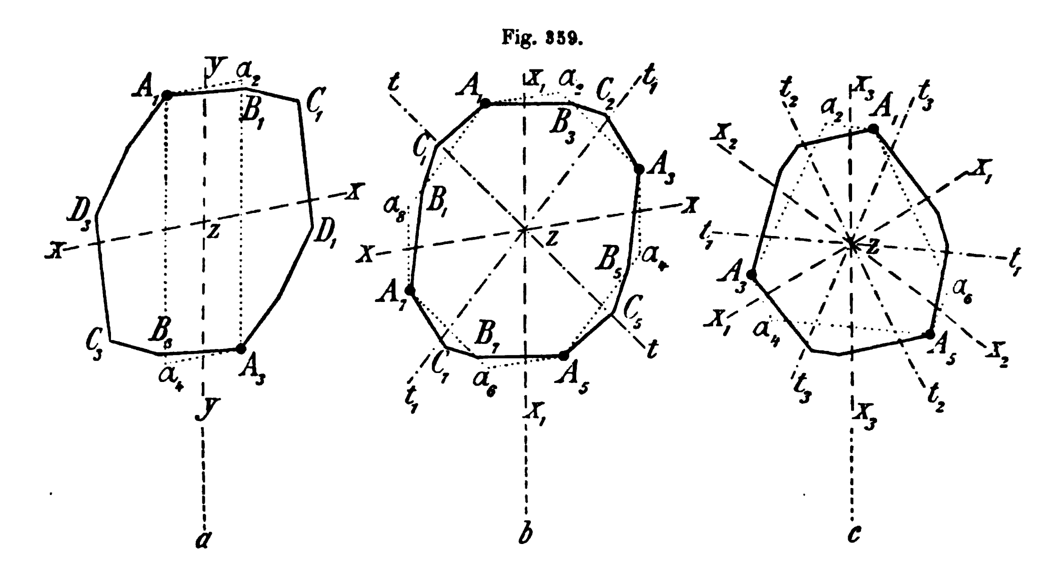
In Fig. 359a ist eine monoharmonische Achse dargestellt; sie trifft die Zeichnungsebene in der Spur x. Dabei ist eine Richtungsebene xy, in bezug auf welche die Harmonie verstanden wird, erforderlich. Ist diese Richtungsebene senkrecht zur Harmonieachse, so geht letztere in eine **Symmetrieachse** über, welche **zweizählig** heißt.

Eine Figur, welche in bezug auf eine zweizählige Symmetrieachse symmetrisch ist, besteht aus zwei Teilen, von denen der eine aus dem andern dadurch hervorgeht, daß dieser um die Symmetrieachse um 180° gedreht wird.

In der Fig. 359b ist eine diharmonische Harmonieachse dargestellt; sie trifft die Zeichnungsebene in der Spur x. Dabei sind vier in einer Ebene liegende Richtungen xx, x_1x_1, tt, t_1t_1 gegeben, in bezug auf welche die Diharmonie verstanden wird. Ist nun xx senkrecht zu x_1x_1, und bilden tt und t_1t_1 senkrecht stehend zur Harmonieachse 45° mit x_1x_1 und xx, so geht die diharmonische Achse in die **vierzählige Symmetrieachse** über.

Eine Figur, welche in bezug auf eine vierzählige Symmetrieachse symmetrisch ist, besteht aus vier Teilen, von denen einer aus irgend einem der übrigen dadurch hervorgeht, daß dieser um die vierzählige Symmetrieachse um 90° oder um 180° gedreht wird.

Fig. 359.



Eine triharmonische Harmonieachse, Fig. 359 c, geht ganz analog in eine dreizählige Symmetrieachse über und eine hexaharmonische, Fig. 360, in eine sechszählige Symmetrieachse. Mehr als so viele Symmetrieachsen sind offenbar bei den Kristallen nicht möglich, da auch nur mono-, di-, tri- und hexaharmonische Achsen möglich sind.

Wir sehen also, daß eine Figur symmetrisch sein wird in bezug auf eine Symmetrieachse, wenn sie in sich vollständig übergeht durch eine Drehung um die Achse und zwar um einen Winkel von $\frac{360°}{n}$ oder ein Vielfaches davon, wenn die Symmetrieachse n-zählig ist. Dabei kann n nur 2, 3, 4 oder 6 sein.

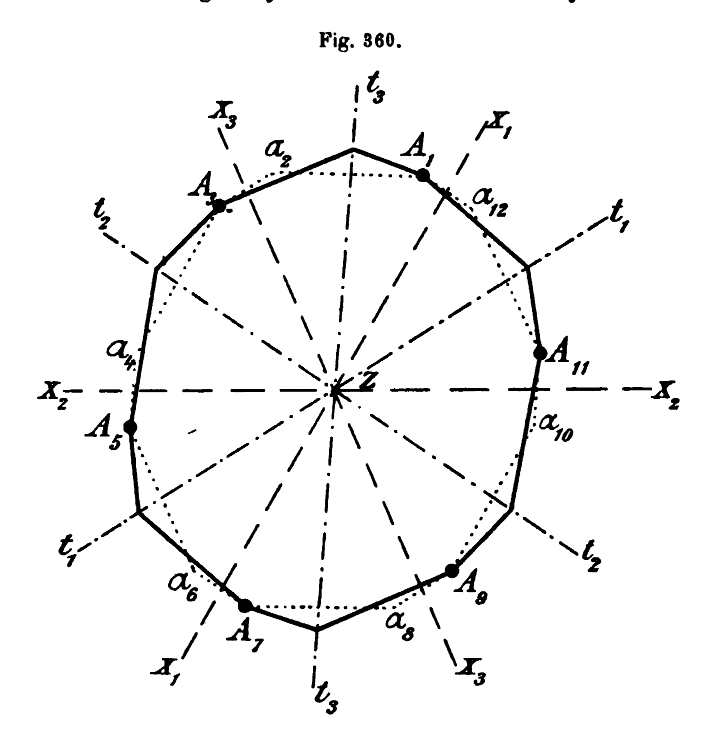
Eine Symmetrieachse, sowie eine Harmonieachse kann einwertig sowie zweiwertig sein, d. h. sie kann entweder nur einen oder aber zwei physikalische Werte auf beiden Seiten haben.

Man kann eine Drehungsachse mit einem darauf senkrechten Spiegel kombinieren. Ist z. B. die Drehungsachse $2n$-zählig, wobei $2\alpha = \frac{360}{2n}$ so wird die symmetrische Figur aus $2n$ Teilen bestehen; n Teile derselben liegen auf einer Seite der Spiegelebene und n auf der andern Seite, sie verhalten sich wie Gegenstand und Bild; aber ihre gegenseitige Lage ist derart, daß die n Teile auf der einen Seite der Spiegelebene um den Winkel α um die Drehungsachse in bezug auf die andern n Teile gedreht erscheinen. Man nennt ein solches Symmetrieelement Spiegeldrehaxe.

Mit der Spiegeldrehachse ist offenbar auch eine Symmetrieachse verbunden, welche n-zählig ist. Da n ganze Zahl sein muß, so muß $2n$ gerade sein.

Ist $2n = 2$, so entspricht das einem Symmetriezentrum. Das Symmetriezentrum und die zweizählige Spiegeldrehachse sind also äquivalent. Ist $2n = 4$, so ist $n = 2$ und für $2n = 6$ ist $n = 3$. Letztere Kombination ist aber äquivalent einer dreizähligen Symmetrieachse mit dem Symmetriezentrum.

Fig. 360.



Bei den Kristallen ist daher nur eine **Spiegeldrehachse** möglich, es ist die **vierzählige**.

Die Symmetrieelemente der Kristalle sind infolgedessen folgende:

a) Das Symmetriezentrum,

b) die Symmetrieebenen,

c) zwei-, drei-, vier- und sechszählige Symmetrieachsen

d) die vierzählige Spiegeldrehachse.

§ 126. Die Abhängigkeit der Symmetrieelemente.

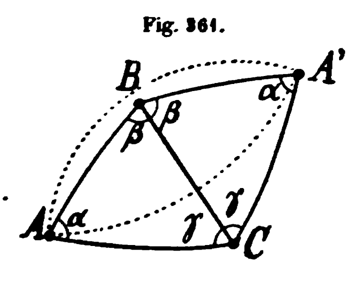
Folgende drei geometrische Sätze sollen in Erinnerung gebracht werden:

1. **Der erste Satz bezieht sich auf zwei Symmetrieachsen.**

Sind zwei Symmetrieachsen A und B, welche einen Winkel $c = \widehat{AB}$ einschließen, gegeben, so ist damit auch eine Symmetrieachse C verstanden, welche mit A und B die Winkel $a = \widehat{BC}$ resp. $b = \widehat{AC}$ einschließt. In der Fig. 361 sind die Achsen ABC durch ihre Pole A, B, C angegeben.

Die Achse A sei n-zählig, also $\frac{360^\circ}{n} = 2\alpha$, und die Achse B m-zählig, also $\frac{360^\circ}{m} = 2\beta$. Ist nun B eine m-zählige Symmetrieachse, so heißt das, daß die symmetrische Figur in sich übergeht durch eine Drehung um den Winkel 2β und um die Achse B. Durch diese Drehung geht die Achse A in A', Fig. 361, über. Tragen wir nun die zwei Winkel α und β auf, so folgt aus dem entstandenen Dreieck ein Winkel γ. Da die zwei Dreiecke ABC und $A'BC$ gleich sind, so schließt man daraus, daß A in A' übergeht, sowohl durch eine Drehung um 2β um die Achse B, als auch durch eine Drehung um den Winkel 2γ um die Achse C.

Fig. 361.



Damit ist der Satz bewiesen, daß falls A und B Symmetrieachsen sind, auch C eine Symmetrieachse sein muß, und zwar p-zählig, wobei $p = \frac{360^\circ}{2\gamma}$ ist.

Ist z. B. A n-zählig und B 2-zählig und senkrecht zu A, also:

$$\alpha = \frac{180^\circ}{n}, \quad \beta = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ, \; c = 90^\circ, \text{ so folgt}$$

$$b = \gamma = 90^\circ,$$

weil $\sin b = \sin\gamma$ und $\cos b = \cos a$, $\cos c = 0$ ist.

Da α, β, γ nur die Werte 30°, 45°, 60° und 90° haben dürfen, weil die Symmetrieachse nur zwei-, drei-, vier- oder sechszählig sein darf, und da $\alpha + \beta + \gamma > 180^\circ$ sein muß, so folgen die möglichen Kombinationen:

$\alpha =$ 30°,	$\beta =$ 90°,	$\gamma =$ 90°
45	90	90
60	90	90
90	90	90
45	60	90
60	60	90.

Für die vorletzte Kombination hat man

$$\cos a = \sqrt{\tfrac{2}{3}}, \quad \cos b = \sqrt{\tfrac{1}{2}}, \quad \cos c = \sqrt{\tfrac{1}{3}},$$

also

$$a = 35^\circ 15' 52'',$$
$$b = 45$$
$$c = 54 \;\; 44 \;\;\; 8.$$

Für die letzte Kombination hat man

$$\cos a = \cos b = \sqrt{\tfrac{1}{3}}, \quad \cos c = \tfrac{1}{3},$$

also

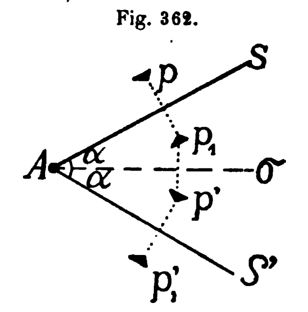
$$a = b = 54^\circ 44' \;\; 8'',$$
$$c = 70 \;\; 31 \;\; 44.$$

Wenn daher 2 Symmetrieachsen ihrer Zähligkeit und Lage nach gegeben sind, so ist damit eine dritte Symmetrieachse vollständig gegeben.

2. Der zweite Satz bezieht sich auf die Verbindung einer Symmetrieebene mit einer in ihr liegenden Symmetrieachse.

Ist eine Symmetrieachse A und eine durch sie gehende Symmetrieebene S gegeben, so geht durch dieselbe noch eine Symmetrieebene, welche mit der gegebenen nicht gleichwertig ist. Die physikalische Gleichwertigkeit, welche bei der Harmonie definiert worden ist, wird hier auf die Symmetrie übertragen.

Fig. 362.



In der Fig. 362 stellt die Spur AS die Symmetrieebene und die Spur A die Symmetrieachse dar, welche n-zählig sein mag, wobei $n = \frac{360^\circ}{2\alpha}$ ist.

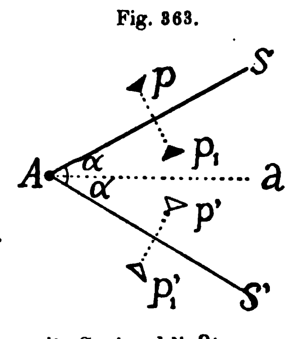
Betrachten wir zwei Teile der symmetrischen Figur p und p_1, welche in bezug auf AS symmetrisch sind. Durch Drehung derselben um 2α um die Achse A gehen sie in p' und p_1' über, während die Symmetrieebene von S nach S' geht. Nun liegen sowohl p_1 und p' als auch p und p_1' symmetrisch, also ist die durch die Spur $A\sigma$ bezeichnete Ebene ebenfalls eine Symmetrieebene; dieselbe ist aber mit der gegebenen Ebene S nicht gleichwertig, da sie mit dieser den Winkel α, nicht 2α einschließt.

Damit ist der zweite Satz bewiesen. Dasselbe gilt für n gerade oder ungerade.

3. Der dritte Satz bezieht sich auf die Verbindung einer Spiegeldrehachse mit einer durch sie gehenden Symmetrieebene.

Eine $2n$-zählige Spiegeldrehachse A ist gegeben und durch dieselbe geht eine Symmetrieebene S; man soll beweisen, daß senkrecht zur Spiegeldrehachse eine zweizählige Symmetrieachse folgt. Die Spiegeldrehachse ist durch die Spur A und die Symmetrieebene durch die Spur AS, Fig. 363, gegeben. p und p_1 sind zwei Teile der symmetrischen Figur, welche in bezug auf die Symmetrieebene symmetrisch sind. Durch Drehung um 2α $\left(\text{da } 2\alpha = \frac{360^\circ}{2n} \text{ ist}\right)$ gehen die genannten zwei Teile in die Lage von p' und p_1' über, symmetrisch gezeichnet in bezug auf den zu A senkrechten Spiegel. Damit liegen p_1 und p', sowie p und p_1' symmetrisch in bezug auf die zweizählige Symmetrieachse a, welche den Winkel α mit S einschließt.

Fig. 363.



Wenn wir diese drei Sätze berücksichtigen, so können wir folgende Regeln über die Abhängigkeit der Symmetrieelemente aufstellen:

1. Eine Symmetrieebene, eine darauf senkrechte geradzählige Symmetrieachse und das Symmetriezentrum ergänzen sich gegenseitig, d. h. zwei derselben bestehen nicht allein.

Diese Regel geht aus dem Umstand hervor, daß das Symmetriezentrum mit einer zweizähligen Spiegeldrehachse äquivalent ist.

2. Eine $2n$-zählige Symmetrieachse und eine darauf senkrechte zweizählige Symmetrieachse bedingen das Vorhandensein von $2n$ zweizähligen Symmetrieachsen, welche auf der $2n$-zähligen Symmetrieachse senkrecht stehen und Winkel miteinander einschließen, von denen der kleinste gleich $\frac{180^\circ}{2n}$ ist.

   n derselben sind abwechselnd miteinander gleichwertig.

   Diese Regel geht aus dem 1. Satz direkt hervor.

3. Eine $2n$-zählige Symmetrieachse und eine durch sie gehende Symmetrieebene bedingen das Vorhandensein von $2n$ Symmetrieebenen, welche durch sie gehen und Winkel miteinander einschließen, von denen der kleinste gleich $\frac{180^\circ}{2n}$ ist.

   n derselben sind abwechselnd miteinander gleichwertig.

   Diese Regel geht aus dem 2. Satz hervor.

   Desgleichen bedingen zwei nicht gleichwertige Symmetrieebenen, welche den Winkel $\frac{180^\circ}{2n}$ einschließen, eine $2n$-zählige Symmetrieachse, welche ihr gemeinschaftlich ist. Zwei gleichwertige Symmetrieebenen, welche den Winkel $\frac{180^\circ}{n}$ einschließen, bedingen eine $2n$-zählige Symmetrieachse, welche ihr gemeinschaftlich ist und n Symmetrieebenen, welche durch dieselbe Symmetrieachse gehen.

4. Eine $2n$-zählige Spiegeldrehachse und eine durch sie gehende Symmetrieebene bedingen n Symmetrieebenen, welche durch die Spiegeldrehachse gehen und Winkel miteinander einschließen, von denen der kleinste $\frac{180^\circ}{n}$ ist; und n zweizählige Symmetrieachsen, welche zur Spiegeldrehachse senkrecht stehen und mit den Symmetrieebenen Winkel bilden, von denen der kleinste $\frac{180^\circ}{n}$ ist.

5. Drei aufeinander senkrechte Symmetrieebenen und das Symmetriezentrum ergänzen sich gegenseitig, d. h. drei dieser Symmetrieelemente bedingen das Vorhandensein des vierten Elementes.

6. Eine paar-zählige Symmetrieachse und die darauf senkrechte Symmetrieebene bedingen das Vorhandensein des Symmetriezentrums.

§ 127. Gleichwertigkeit der Symmetrieelemente.

Gleichwertige Elemente sind überhaupt jene, welche sich physikalisch gleich verhalten. Die gleichwertigen Elemente müssen einer bestimmten geometrischen Bedingung folgen. Sind z. B. eine $2n$-zählige Symmetrieachse und $2n$ darauf

senkrechte zweizählige Symmetrieachsen gegeben, so ist von diesen $2n$ Symmetrieachsen die Hälfte, also n, unter sich abwechselnd gleichwertig. In der Tat gehen sie ineinander über durch Drehung um die $2n$-zählige Symmetrieachse um den Winkel $\frac{360^\circ}{2n}$. Desgleichen, sind eine $2n$-zählige Symmetrieachse und $2n$ durch sie gehende Symmetrieebenen gegeben, so ist die Hälfte der $2n$ Symmetrieebenen, also n, unter sich abwechselnd gleichwertig, da sie ineinander übergehen durch Drehung um die $2n$-zählige Symmetrieachse um den Winkel $\frac{360^\circ}{2n}$.

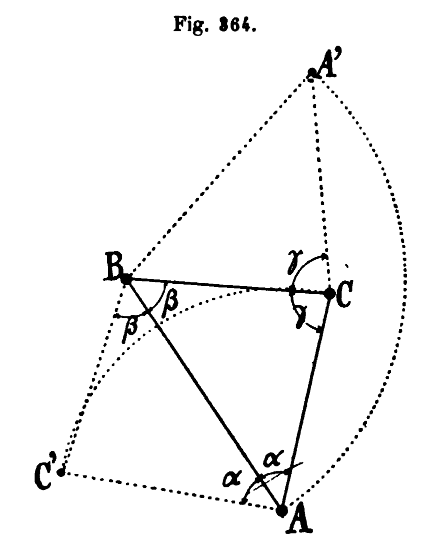
Wir können überhaupt sagen, daß zwei Symmetrieelemente unter sich gleichwertig sind, wenn sie ineinander übergehen durch eine Symmetrieoperation, welche zur Symmetrie gehört. Diese Definition gilt für je zwei Elemente, welche unter sich symmetrisch gleichwertig sein sollen. Zwei gleichwertige Elemente sind in jeder Beziehung physikalisch gleich.

Dagegen haben wir bei der Harmonie gesagt, daß zwei Elemente harmonisch beschaffen sind, wenn sie durch eine harmonische Operation ineinander übergehen. Sie verhalten sich nicht absolut physikalisch gleich, aber ähnlich, und zwar harmonisch; sie sind nämlich harmonisch gleichwertig.

§ 128. Beweis des Satzes, daß bei den Kristallen nur zwei-, drei-, vier- und sechszählige Symmetrieachsen zulässig sind.

Ein homogenes anisotropes Mittel liegt vor uns, worin Symmetrieachsen vorhanden sein sollen. Wir wollen die unter sich parallelen Symmetrieachsen in Betracht ziehen und die Zeichnungsebene so annehmen, daß sie zu den Symmetrieachsen senkrecht steht. Unter solchen Verhältnissen werden die Symmetrieachsen auf der Zeichnungsebene als Punkte erscheinen und wir wollen sie durch Punkte bezeichnen. A m-zählig, B n-zählig und C p-zählig sind solche Symmetrieachsen, siehe Fig. 364. Das Dreieck ABC bestimmt die Winkel α, β, γ, welche folgende Bedeutung haben:

Fig. 364.



$$\alpha = \frac{1}{2}\frac{360^\circ}{m}, \quad \beta = \frac{1}{2}\frac{360^\circ}{n},$$
$$\gamma = \frac{1}{2}\frac{360^\circ}{p}.$$

Ist A m-zählig, wie angenommen, so geht das homogene Mittel in sich über durch eine Drehung um den Winkel 2α um die Achse A. Analog geht es in sich über durch eine Drehung um den Winkel 2β um die Achse B. Und ebenfalls geht es in sich über durch

aufeinander folgende Drehungen um den Winkel 2α um die Achse A und um den Winkel 2β um die Achse B. Diese aufeinander folgenden Drehungen um A und B sind einer einzigen resultierenden Drehung um die Achse C und um den Winkel 2γ äquivalent.

Das ist einleuchtend, denn durch Drehung um A um den Winkel 2α geht C in C' über und A bleibt fest; durch darauf folgende Drehung um den Winkel 2β (nach demselben Sinn) um die Achse B geht A in A' und kehrt C' in C zurück. Also bleibt bei diesen nacheinander folgenden Drehungen die Achse C fest, und daher ist sie die resultierende Drehungsachse von A und B.

Die resultierende Drehung um diese Achse C beträgt 2γ. Da nun $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ ist, so folgt:

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} = 1.$$

Wenn wir also zwei unter sich parallele Symmetrieachsen A und B kennen, welche m- resp. n-zählig sind, so können wir eine dritte Symmetrieachse C ableiten, welche p-zählig sein muß, da der kleinste Winkel, um welchen das homogene Mittel um die Achse C gedreht werden muß, damit es in sich übergehen kann, 2γ ist.

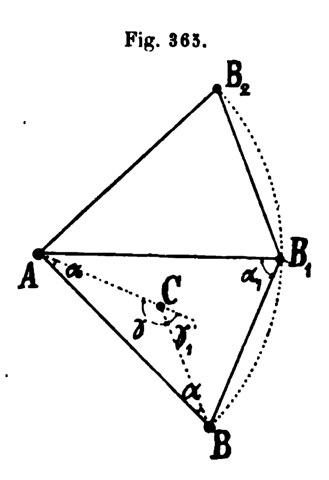
Wenn der Winkel $2\gamma > 180^\circ$ ausfällt, so wird die Zähligkeit p' der Achse C aus dem Winkel $360^\circ - 2\gamma = 2\gamma'$ zu berechnen sein. Aus $\gamma' = 180^\circ - \gamma$ und $\gamma = \frac{180^\circ}{p}$ folgt nämlich:

$$p' = \frac{p}{p-1}.$$

Wir wollen nun folgendes annehmen und untersuchen, ob resp. unter welchen Bedingungen es zulässig sei.

Zwei parallele Symmetrieachsen A und B sind gegeben, welche beide n-zählig sind $\left(\alpha = \frac{180^\circ}{n}\right)$. Da das homogene Mittel durch eine Translation in sich übergehen muß, so müssen auch zwei Symmetrieachsen, wie A und B, vorhanden sein, welche n-zählig sind. Eine solche Annahme ist also nicht nur zulässig, sondern sogar mit dem Prinzip der Homogenität innig verbunden.

Fig. 365.



Wenn wir nun das Dreieck ABC, Fig. 365, konstruieren, so muß C eine Symmetrieachse sein und zwar p-zählig. Die Zahlen p und p' werden aus den Beziehungen

$$\gamma = 180^\circ - 2\alpha \quad \text{und} \quad \gamma' = 2\alpha$$

sich ergeben. Durch Ausrechnung folgt:

$$p = \frac{n}{n-2} \quad \text{und} \quad p' = \frac{n}{2}.$$

Wir wollen jetzt für n verschiedene Zahlen einsetzen:

für $n =$	2	ist $p =$	∞			
»	3	»	3			
»	4	»	2			
»	5	»	$\frac{5}{3}$	resp. $p' =$	$\frac{5}{2}$	
»	6	»	$\frac{3}{2}$	»	3	
»	7	»	$\frac{7}{5}$	»	$\frac{7}{2}$	
»	8	»	$\frac{4}{3}$	»	4	
»	9	»	$\frac{9}{7}$	»	$\frac{9}{2}$	
»	10	»	$\frac{5}{4}$	»	5	usw.

Für $n = 5, 7, 9, 11$ usw. kann C keine Symmetrieachse sein, da ihre Zähligkeit durch keine ganze Zahl dargestellt werden kann; infolgedessen sind diese Annahmen zu streichen.

Betrachten wir ferner andere Symmetrieachsen. Durch nacheinander folgende Drehungen um die Achse A um den Winkel 2α, 4α, ... geht die Achse B in B_1, B_2, ... über. Also müssen auch B_1, B_2, ... n-zählige Symmetrieachsen sein wie B. Indem nun das Dreieck ABB_1 konstruiert wird, ergibt sich der Winkel α_1 bei B und bei B_1. Infolge der Drehung um die Achse B_1 und um den Winkel $2\alpha_1$ geht B in B_2 über. Da aber B_1 eine Symmetrieachse ist, sagen wir jetzt m-zählig, so muß m aus dem Winkel α_1 sich ergeben $\left(m = \frac{180}{\alpha_1}\right)$, da durch eine Drehung um die Achse B_1 um einen kleineren Winkel als $2\alpha_1$ das homogene Mittel nicht in sich selbst zurückgebracht werden kann.

Es geht nun aus der Fig. 365 hervor, daß

$$\gamma = 2\alpha_1 \text{ und } \gamma_1 = 2\alpha$$

ist, also:

$$\frac{180^\circ}{p} = 2\frac{180^\circ}{m}$$

und folglich

$$m = 2p = \frac{2n}{n-2}.$$

Die Zähligkeit m der Symmetrieachsen B, B_1, B_2, ... muß also das Doppelte derjenigen der Achse C sein. Andererseits ist die Zähligkeit m von der Achse B, B_2 ... ebenso groß wie diejenige von B, also n. Wollen wir nun ausrechnen, wann das geschieht:

für $n =$	2	folgt $m =$	∞
»	3	»	6
»	4	»	4
»	5	»	$\frac{10}{3}$
»	6	»	3
»	7	»	$\frac{14}{5}$
»	8	»	$\frac{8}{3}$ usw.

Für $n = 2$ geht C ins Unendliche, während B_1 auf dieselbe Gerade AB zu liegen kommt und ebenso weit entfernt von A ist wie B. $m = \infty$ drückt also aus, daß B in B_1 durch eine Translation übergeführt wird.

Für $n = 3$ ist zwar $m = 6$. Da aber ABC ein gleichseitiges Dreieck dadurch wird, so folgt, daß auch das Dreieck AB_1C gleichseitig wird; also geht die Achse A in C über durch Drehung um 120° um B_1, daher ist $m = 3$ wie n.

Für $n = 6$ ist zwar nach der Rechnung $m = 3$, aber da B ebenso weit von B_1 liegt wie A, so geht B in A über durch Drehung um die Achse B_1 um den halben Winkel, nämlich $\alpha_1 = 2\alpha$; daraus folgt, daß in diesem Fall $m = 6$ wird. Alle übrigen Annahmen wie $n = 5, 7, 8, 9, \ldots$ führen zu m verschieden von n; sie sind also unzulässig, und damit ist der Satz bewiesen.

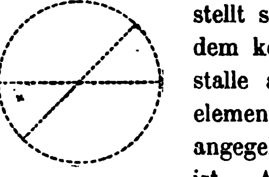
§ 129. Mögliche Symmetrien der Kristalle.

Um die Symmetrien der Kristalle einfach und deutlich darzustellen, soll die stereographische Projektion zu Hilfe genommen werden. Die Symmetrieachsen werden durch die Zeichen ⬬ ▲ ■ ⬢ angegeben, wenn sie zwei- resp. drei-, vier- oder sechszählig sind. Die vierzählige Spiegeldrehachse wird durch das Zeichen ▬ und das Symmetriezentrum durch ein Kreischen ○ angegeben. Die gleichwertigen Symmetrieebenen werden gleich ausgezogen. Die einzelnen Teile des Kristalles, welche gleichwertig sind, werden durch Pole angegeben und zwar durch ein Kreuzchen, wenn sie oberhalb der Grundebene und durch Kreise, wenn sie unterhalb derselben gedacht werden.

1. Asymmetrie.

Um aus den Harmonieelementen Symmetrieelemente zu erhalten, müssen gewisse geometrische Bedingungen vorliegen, wie oben angegeben ist. Verifizieren sich keine solchen Bedingungen, so stellt sich nur das Symmetriezentrum ein. Wenn aber außerdem kein Harmoniezentrum vorhanden ist, so sind die Kristalle asymmetrisch, d. h. bei ihnen liegt kein Symmetrieelement vor. Siehe Fig. 366, wo kein Symmetrieelement angegeben und ein Pol mit keinem gleichwertig verzeichnet ist. Alle Harmonien, welche mit keinem Harmoniezentrum versehen sind, gehören zur Asymmetrie.

Fig. 366.



2. Pinakoidale Symmetrie.

Liegt bei den Harmonien der Kristalle das Harmoniezentrum vor, so ist auch das Symmetriezentrum vorhanden. Andere Symmetrieelemente aber fehlen, wenn die Kristalle besonderen Bedingungen nicht genügen. Diese pinakoidale Symmetrie kann deshalb bei allen Harmonien auftreten, welche mit dem Harmoniezentrum versehen sind.

Jede Fläche eines Kristalls entspricht jedenfalls ihrer entgegengesetzten und beide sind physikalisch durchaus identisch. In Fig. 367 ist das Symmetriezentrum mit zwei gleichwertigen Polen angegeben, die in bezug auf das Symmetriezentrum gegenüber gelegen sind.

Fig. 367.

Die Asymmetrie und die pinakoidale Symmetrie haben das gemein, daß die Kristalle, welche zu ihnen gehören, keiner geometrischen Bedingung genügen. Ihre Grundgestalt ist mit dem Symmetriezentrum versehen, aber sonst mit keinem Symmetrieelemente. Die vorherrschenden Flächen stehen schief gegeneinander. Die zwei gleichwertigen Flächen bilden das Pinakoid.

Man hat die Asymmetrie und die pinakoidale Symmetrie in einer Syngonie vereinigt, welche triklin genannt wird Die Asymmetrie und die pinakoidale Symmetrie gehören zu einer Syngonie, da die Winkel der entsprechenden Grundgestalten an keine geometrische Bedingung gebunden sind, um dieser Syngonie zu genügen.

3. Sphenoidische Symmetrie.

Ein einziges Symmetrieelement ist vorhanden, nämlich die zweizählige Symmetrieachse.

Da kein Symmetriezentrum vorliegt, so wird die sphenoidische Symmetrie nur bei jenen Harmonien auftreten, bei welchen das Harmoniezentrum nicht vorhanden ist. Die Harmonien, welche in die sphenoidische Symmetrie übergehen können, müssen mit einer monoharmonischen oder diharmonischen oder hexaharmonischen Achse versehen und also hemimorph sein.

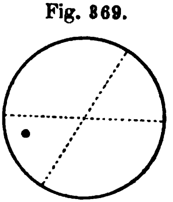
Fig. 368.

Eine Fläche des Kristalls entspricht im allgemeinen einer einzigen identischen Fläche, welche aus derselben durch eine Drehung um 180° um die Symmetrieachse hervorgeht, siehe Fig. 368. Diese zwei Flächen bilden das Sphenoid. Zwei identische Flächen fallen in eine einzige, wenn sie zur Symmetrieachse senkrecht stehen.

4. Domatische Symmetrie.

Das einzige Symmetrieelement, welches vorhanden sein darf, ist die Symmetrieebene. Das kann ebenfalls nur bei jenen Harmonien der Fall sein, bei welchen das Harmoniezentrum fehlt. Die Harmonien, welche zur domatischen Symmetrie übergehen können, müssen mit Harmonieebenen versehen sein. Eine dieser Harmonieebenen geht in die Symmetrieebene über und die entsprechende Harmonie verwandelt sich in die domatische Symmetrie.

Fig. 369.



Eine Fläche des Kristalls entspricht im allgemeinen einer einzigen gleichen Fläche und beide bilden das Doma. In der Fig. 369 ist die

Für $n = 2$ geht C ins
zu liegen kommt und ebe
also aus, daß B in B_1 d

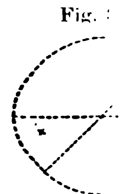
Für $n = 3$ ist zwa
dadurch wird, so folgt
geht die Achse A in
wie n.

Für $n = 6$ ist
von B_1 liegt wie
um den halben
$m = 6$ wird.
verschieden von
wiesen.

Um die
die stereog
achsen w
drei-, vier-
das Zeich
Die gleic
Teile des
und zwa
Kreise, v

Um

Fig.



versehen



auch
fehle
koin
dem

7. Bisphenoidische Symmetrie.

·n Symmetrieelemente sind 3 aufeinander senkrechte zwei-
·achsen, welche ungleichwertig sein müssen.
ıtspricht 4 Flächen, sie selbst gerechnet, welche gleichwertig
·ie bilden zusammen ein Bisphenoid. Nur wenn die Fläche
·er Symmetrieachse ist, beschränken sich die
', welche ein Pinakoid bilden, oder, wenn die
r Symmetrieachse parallel ist, erzeugen die
rhombisches Prisma.

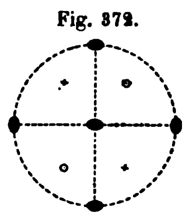


Fig. 372.

Harmonie der Kristalle bisphenoidische Sym-
kann, ist es nötig, daß sie 3 nahezu aufeinan-
·· geradharmonische Achsen haben, also entweder
he und 2 monoharmonische, oder endlich 1 hexa-
und 2 monoharmonische Achsen, dabei darf aber kein Har-
m vorhanden sein. Folgende Harmonien können also bisphenoidisch-
ı werden: In den drei- und viergliedrigen Kristallen die gyro-
·miharmonie (34), die tetraedrische Hemiharmonie $(33)^s$, die tetra-
·tartoharmonie (33); in den viergliedrigen Kristallen die gyroedrische
·onie (24), die sphenoidische Hemiharmonie $(42)^s$ und die sphenoidische
rmonie (42); in den sechsgliedrigen Kristallen die gyroedrische Hemi-
· (26).

8. Rhombisch-bipyramidale Symmetrie.

vorhandenen Symmetrieelemente sind 3 aufeinander senkrechte zwei-
Symmetrieachsen, welche ungleichwertig sind und 3 durch sie gehende
·trieebenen, welche ebenfalls ungleichwertig sein müssen. Damit ist auch
ymmetriezentrum vorhanden.

de Fläche des Kristalls entspricht 8 gleichen Flächen, sie selbst gerechnet,
he eine rhombische Bipyramide bilden, Fig. 373; nur wenn die Kristall-
·e zu einer Symmetrieachse parallel ist, entspricht sie
·m rhombischen Prisma, und wenn sie zu einer Symmetrie-
·se senkrecht steht, entspricht sie einem Pinakoid.

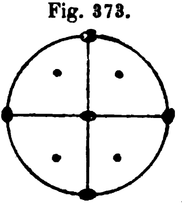


Fig. 373.

Die Harmonien, welche sich zu dieser Symmetrie verwan-
·ln sollen, müssen dieselben Harmonieelemente haben wie
·ei der vorhergehenden Symmetrie Nr. 7, nur muß noch
das Harmoniezentrum hinzutreten.

Folgende Harmonien können somit die rhombische bipyramidale Symmetrie aufweisen: In den drei- und viergliedrigen Kristallen die Holoharmonie $(34)^s$, die pentagonale Hemiharmonie $(33)^\sigma$, in den viergliedrigen Kristallen die Holoharmonie $(24)^s$, die sphenoidische Hemiharmonie $(42)^s$ und in den sechsgliedrigen die Holoharmonie $(26)^s$.

Die rhombischen Symmetrien Nr. 6, 7, 8 haben etwas gemeinschaftlich, was in den monoklinen und triklinen Syngonien vermißt wird, nämlich drei

aufeinander senkrechte herrschende Zonen und Flächen, welche ungleichwertig sind. Ihre Grundgestalten sind mit 3 aufeinander senkrechten ungleichwertigen zweizähligen Symmetrieachsen, 3 durch sie gehenden ungleichwertigen Symmetrieebenen und dem Symmetriezentrum versehen. Man hat sie deshalb in einer einzigen Syngonie vereinigt, welche **rhombisch** heißt.

9. Trigonal-pyramidale Symmetrie.

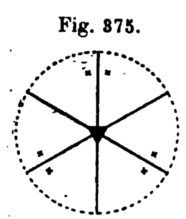
Fig. 374.

Nur die dreizählige Symmetrieachse ist vorhanden. Eine Fläche des Kristalls entspricht daher im allgemeinen 3 gleichen, sie selbst gerechnet, Fig. 374, welche eine einfache trigonale Pyramide bilden. Wenn die Fläche parallel der Symmetrieachse ist, so erzeugt sie ein Prisma, und zwar ein trigonales Prisma, und wenn sie senkrecht zur Symmetrieachse ist, ergibt sich nur die halbe Basis. Die Harmonien, welche sich in diese Symmetrie verwandeln sollen, sind hemimorph und haben eine triharmonische Achse und keine Harmonieebene. Es gehören also hierher die hemimorphe Tetartoharmonie (03) der dreigliedrigen Grundgestalten und die tetraedrische Tetartoharmonie (33) der drei- und viergliedrigen Grundgestalten.

10. Ditrigonal-pyramidale Symmetrie.

Eine dreizählige Symmetrieachse und 3 durch sie gehende gleichwertige Symmetrieebenen sind vorhanden. Eine Fläche entspricht 6 gleichen Flächen, mit sich selbst, Fig. 375, welche eine ditrigonale Pyramide oder eine trigonale Pyramide bilden, ausgenommen wenn sie parallel der Symmetrieachse ist, wo sie dann ein ditrigonales oder trigonales Prisma erzeugt; oder wenn diese Fläche zur Symmetrieachse senkrecht steht, wobei sie eine halbe Basis darstellt. Die Harmonien, welche sich in diese Symmetrie verwandeln können, sind hemimorph und haben eine triharmonische Achse sowie 3 durch sie gehende Harmonieebenen. Es gehören also hierher die hemimorphe Hemiharmonie $(03)^s$ der dreigliedrigen, die tetraedrische Hemiharmonie $(33)^s$ der drei- und viergliedrigen Grundgestalten und die hemimorphe Hemiharmonie $(06)^s$ der sechsgliedrigen Grundgestalten, wenn darin nur 3 Harmonieebenen Symmetrieebenen werden.

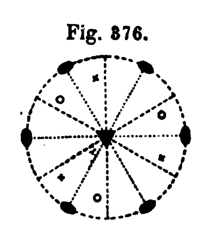
Fig. 375.



11. Trigonal-trapezoedrische Symmetrie.

Eine dreizählige Symmetrieachse und 3 zu ihr senkrechte gleichwertige zweizählige Symmetrieachsen sind vorhanden. Eine Fläche entspricht im allgemeinen 6 gleichen Flächen, mit sich selbst, welche ein trigonales Trapezoeder bilden, Fig. 376; ausnahmsweise erzeugen sie eine trigonale Bipyramide oder ein Rhomboeder; wenn sie zur dreizähligen Symmetrieachse parallel ist, ergibt sich ein ditrigonales oder trigonales Prisma: und endlich bei senkrechter Stellung zur dreizähligen

Fig. 376.

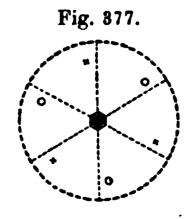


Symmetrieachse erzeugt sie die Basis. Die einzige Harmonie, welche in diese Symmetrie übergehen kann, ist die gyroedrische Hemiharmonie (23) der dreigliedrigen Kristalle.

12. Rhomboedrische Symmetrie.

Eine dreizählige Symmetrieachse und das Symmetriezentrum sind vorhanden. Eine Fläche entspricht im allgemeinen 6 Flächen, sie selbst gerechnet, welche ein Rhomboeder, Fig. 377, bilden. Das Rhomboeder geht in ein hexagonales Prisma über, wenn die Flächen parallel der dreizähligen Achse sind; oder in die Basis, wenn die Flächen zur Achse senkrecht stehen. Alle Harmonien der Kristalle, welche mit der triharmonischen Achse und mit dem Harmoniezentrum versehen sind, können in die rhomboedrische Symmetrie übergehen, dabei darf aber durch die triharmonische Achse keine Harmonieebene gehen. Es sind somit die pentagonale Hemiharmonie $(33)^0$ der drei- und viergliedrigen Grundgestalten, und die rhomboedrische Hemiharmonie (63) der dreigliedrigen Kristalle, welche hierher gehören können.

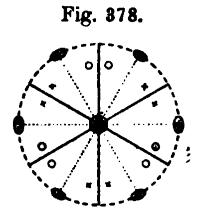
Fig. 377.



13. Skalenoedrische Symmetrie.

Eine dreizählige Symmetrieachse und 3 durch dieselbe gehende gleichwertige Symmetrieebenen mit dem Symmetriezentrum sind vorhanden; folglich müssen auch 3 gleichwertige zweizählige Symmetrieachsen, welche zu den Symmetrieebenen senkrecht stehen, gegenwärtig sein. Daher erzeugt eine Fläche im allgemeinen ein Skalenoeder, Fig. 378. Dasselbe geht in speziellen Fällen in ein Rhomboeder über. Sind die Flächen parallel der dreizähligen Achse, so entsteht aus dem Skalenoeder und aus dem Rhomboeder ein dihexagonales resp. ein hexagonales Prisma. Sind endlich die Flächen zur dreizähligen Achse senkrecht, so geht das Skalenoeder in die Basis über. Nur die Holoharmonie $(63)^s$ der dreigliedrigen Kristalle kann sich in die skalenoedrische Symmetrie verwandeln, wenn nämlich die triharmonische Achse in die dreizählige Symmetrieachse übergeht.

Fig. 378.



Die 5 vorstehenden Symmetrien, nämlich die trigonal-pyramidale (9), die ditrigonal-pyramidale (10), die trigonal-trapezoedrische (11), die rhomboedrische (12) und die skalenoedrische (13) haben folgendes gemeinschaftlich: Die dreizählige Symmetrieachse und zwar nur eine. Diese Symmetrieachse ist dabei derart, daß sie durch das Hinzutreten des Symmetriezentrums dreizählig bleibt. Bei den Kristallen, welche diesen 5 Symmetrien folgen, ist also die dreizählige Zone oder die Basis vorherrschend.

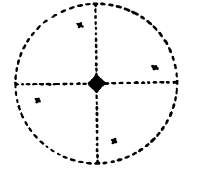
Die Grundgestalten dieser 5 Symmetrien nämlich 9, 10, 11, 12 und 13 sind mit denselben Symmetrieelementen versehen, welche der skalenoedrischen Symmetrie eigen sind. Deshalb hat man diese 5 Symmetrien in

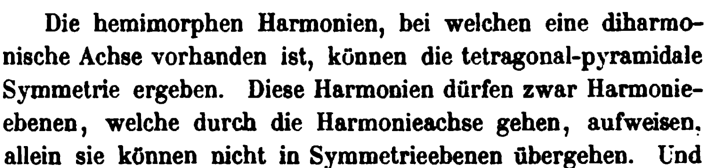
einer **Syngonie** vereinigt, welche **rhomboedrisch** heißt, da das Rhomboeder mehr oder weniger bei allen vorherrscht.

14. Tetragonal-pyramidale Symmetrie.

Eine vierzählige Symmetrieachse ist vorhanden. Infolge dieser Achse erzeugt eine Fläche im allgemeinen eine Tetragonalpyramide, Fig. 379, die in ein Tetragonalprisma übergeht, wenn die sie erzeugende Fläche parallel der Achse ist, und in die halbe Basis, wenn die Fläche zur Achse senkrecht steht.

Fig. 379.



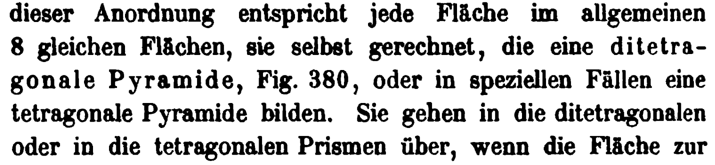


Die hemimorphen Harmonien, bei welchen eine diharmonische Achse vorhanden ist, können die tetragonal-pyramidale Symmetrie ergeben. Diese Harmonien dürfen zwar Harmonieebenen, welche durch die Harmonieachse gehen, aufweisen, allein sie können nicht in Symmetrieebenen übergehen. Und wir sehen, daß die hierher gehörende Harmonie die hemimorphe Tetartoharmonie (04) der viergliedrigen Kristalle ist.

15. Ditetragonal-pyramidale Symmetrie.

Eine vierzählige Symmetrieachse und 4 durch sie gehende Symmetrieebenen sind vorhanden und davon je 2 zu 2 abwechselnd gleichwertig. Infolge dieser Anordnung entspricht jede Fläche im allgemeinen 8 gleichen Flächen, sie selbst gerechnet, die eine **ditetragonale Pyramide**, Fig. 380, oder in speziellen Fällen eine tetragonale Pyramide bilden. Sie gehen in die ditetragonalen oder in die tetragonalen Prismen über, wenn die Fläche zur Symmetrieachse parallel ist, oder in die halbe Basis bei senkrechter Stellung der Fläche zur Symmetrieachse.

Fig. 380.

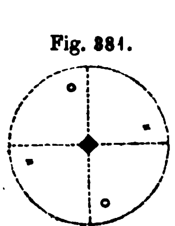


Nur die hemimorphe Hemiharmonie $(04)^s$ der viergliedrigen Grundgestalten kann diese Symmetrie zeigen.

16. Tetragonal-sphenoidische Symmetrie.

Eine vierzählige Spiegeldrehachse ist vorhanden. Damit entspricht jede Fläche im allgemeinen 4 Flächen, sie selbst gerechnet, die ein **Bisphenoid**, Fig. 381, bilden. Dasselbe geht für Flächen parallel der Spiegeldrehachse in ein tetragonales Prisma und für die Fläche senkrecht zur Achse in die Basis über.

Fig. 381.



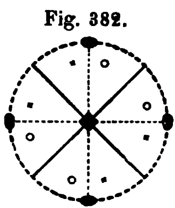
Sowohl die tetraedische Hemiharmonie $(33)^s$ und die tetraedrische Tetartoharmonie (33) der drei- und viergliedrigen Kristalle als auch die sphenoedrische Tetartoharmonie (42) der viergliedrigen Kristalle können diese Symmetrie aufweisen.

17. Tetragonal-skalenoedrische Symmetrie.

Eine vierzählige Spiegeldrehachse und 2 durch dieselbe gehende Symmetrieebenen, gleichwertig und aufeinander senkrecht stehend, sind vorhanden; damit

gegeben sind auch 2 zweizählige Symmetrieachsen, welche ebenfalls gleichwertig sind und mit den Symmetrieebenen einen Winkel von 45° bilden. Infolge dieser Anordnung entspricht im allgemeinen jede Fläche 8 Flächen, sie selbst gerechnet, welche das Skalenoeder Fig. 382 bilden. Dasselbe geht speziell in das Bisphenoid über, oder wenn die Fläche zur Achse parallel ist, in ein tetragonales Prisma. Die Basis entsteht, wenn die Fläche zur Achse senkrecht ist.

Fig. 382.



Sowohl die pentagonale Hemiharmonie $(33)^{\sigma}$ der drei- und viergliedrigen Kristalle als auch die sphenoidische Hemiharmonie $(42)^{s}$ der viergliedrigen Kristalle können diese Symmetrie aufweisen.

18. Tetragonal-bipyramidale Symmetrie.

Eine vierzählige Symmetrieachse und eine darauf senkrechte Symmetrieebene sind vorhanden; zugleich muß auch das Symmetriezentrum die Symmetrieelemente ergänzen. Somit entspricht jede Fläche im allgemeinen einer aus 8 Flächen gebildeten tetragonalen Bipyramide, Fig. 383. Sobald aber die Fläche zur Symmetrieachse parallel ist, geht die Bipyramide in ein tetragonales Prisma und, falls sie zur Symmetrieachse senkrecht steht, in die Basis über.

Fig. 383.

Eine einzige Harmonie, nämlich die pyramidale Hemiharmonie $(04)^{\sigma}$ der viergliedrigen Kristalle kann diese Symmetrie aufweisen, da sie nur mit einer diharmonischen Zone verbunden mit einer Harmonieebene versehen ist.

19. Tetragonal-trapezoedrische Symmetrie.

Eine vierzählige und vier darauf senkrechte zweizählige Symmetrieachsen, welche letztere je zu 2 gleichwertig sein müssen, sind vorhanden. Damit erzeugt jede Fläche im allgemeinen ein tetragonales Trapezoeder, Fig. 384, das in speziellen Fällen in eine tetragonale Bipyramide, oder wenn die Fläche zur vierzähligen Achse parallel ist, in ein ditetragonales Prisma übergeht. Eine Fläche entspricht der Basis, wenn sie zur vierzähligen Achse senkrecht steht.

Fig. 384.

Es ist einleuchtend, daß 2 Harmonien der Kristalle diese Symmetrie aufweisen werden, nämlich die gyroedrische Hemiharmonie (24) der viergliedrigen und die gyroedrische Hemiharmonie (34) der drei- und viergliedrigen Kristalle.

20. Ditetragonal-bipyramidale Symmetrie.

Eine vierzählige Symmetrieachse, 4 durch sie gehende Symmetrieebenen, eine darauf senkrechte Symmetrieebene und folglich auch 4 zweizählige Symmetrieachsen, welch letztere in die Symmetrieebenen fallen, und damit

ferner das Symmetriezentrum, sind vorhanden. Die durch die vierzählige Symmetrieachse gehenden Symmetrieebenen sind je zu 2 und ebenfalls je zu 2 die zweizähligen Symmetrieachsen gleichwertig. Eine Fläche erzeugt somit im allgemeinen eine ditetragonale Bipyramide, Fig. 385, welche, wenn die Fläche zur vierzähligen Achse parallel steht, in ein ditetragonales Prisma übergeht. In speziellen Fällen erzeugt eine Fläche eine tetragonale Bipyramide, welche bei Parallelstellung zur vierzähligen Achse in ein tetragonales Prisma übergeht; endlich erscheint die Basis bei senkrechter Stellung der Fläche zur vierzähligen Achse.

Fig. 385.

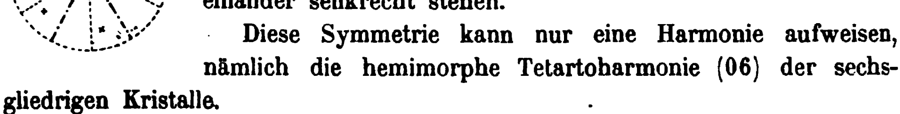
2 Harmonien der Kristalle werden diese Symmetrie aufweisen können, nämlich die Holoharmonie (24)^{s} der viergliedrigen und die Holoharmonie (34)^{s} der drei- und viergliedrigen Kristalle.

Die letzten 7 mit den Nrn. 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20 bezeichneten Symmetrien haben etwas gemeinschaftlich, nämlich eine vierzählige Symmetrieachse, die auch Spiegeldrehachse werden kann; bei den zu diesen Symmetrien gehörenden Grundgestalten sind ganz besonders eine diharmonische Zone oder eine diharmonische Fläche vorherrschend und weisen sie die Symmetrieelemente der ditetragonal-pyramidalen Symmetrie auf. Man hat deshalb diese 7 Symmetrien in einer Syngonie vereinigt, welche tetragonal heißt. Zu derselben gehören die viergliedrigen und die drei- und viergliedrigen Grundgestalten der Kristalle.

21. Hexagonal-pyramidale Symmetrie.

Eine sechszählige Symmetrieachse ist vorhanden. Sie muß natürlich zweiwertig d. h. hemimorph sein. Infolgedessen entspricht jede Fläche im allgemeinen 6 gleichen eine hexagonale Pyramide, Fig. 386, bildenden Flächen. Dieselbe geht speziell über in das hexagonale Prisma bei paralleler Stellung der Fläche zur Achse oder in die halbe Basis, wenn erstere zu einander senkrecht stehen.

Fig. 386.



Diese Symmetrie kann nur eine Harmonie aufweisen, nämlich die hemimorphe Tetartoharmonie (06) der sechsgliedrigen Kristalle.



22. Dihexagonal-pyramidale Symmetrie.

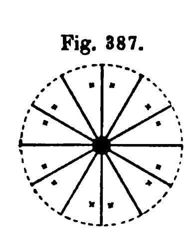


Fig. 387.

Eine sechszählige Symmetrieachse und 6 durch sie gehende Symmetrieebenen sind vorhanden. Die Symmetrieachse muß zweiwertig d. h. hemimorph und von den 6 Symmetrieebenen müssen je 3 gleichwertig sein. Infolge dieser Symmetrieelemente entspricht jede Fläche 12 gleichen Flächen, sie selbst gerechnet, die im allgemeinen eine dihexagonale Pyramide, Fig. 387, bilden, welche in speziellen Fällen, d. h. wenn die Fläche zu einer Symmetrieebene senkrecht ist, in eine hexagonale

Pyramide übergeht. Ist die Fläche zur Symmetrieachse parallel, so geht die Pyramide in ein dihexagonales Prisma über. Es erscheint nur die halbe Basis, wenn die Fläche zur Symmetrieachse senkrecht steht.

Eine einzige Harmonie wird diese Symmetrie zeigen können, nämlich die hemimorphe Hemiharmonie $(06)^s$ der sechsgliedrigen Kristalle.

23. Trigonal-bipyramidale Symmetrie.

Eine dreizählige Symmetrieachse und die zu ihr senkrechte Symmetrieebene sind vorhanden. Aus diesen 2 Symmetrieelementen folgt, daß eine Fläche im allgemeinen 6 Flächen, sie selbst gerechnet, entspricht, die eine trigonale Bipyramide, Fig. 388, bilden; sobald aber die Fläche zur Symmetrieachse parallel ist, geht die Bipyramide in ein trigonales Prisma, und wenn sie zur Symmetrieachse senkrecht steht, geht die Fläche in die Basis über.

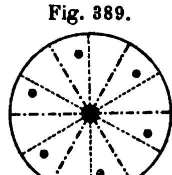
Fig. 388.

Eine einzige Harmonie wird diese Symmetrie aufweisen dürfen, nämlich die pyramidale Tetartoharmonie $(03)^\sigma$ der sechsgliedrigen Kristalle.

24. Hexagonal-bipyramidale Symmetrie.

Eine sechszählige Symmetrieachse und die zu ihr senkrechte Symmetrieebene sind vorhanden. Damit wird eine Fläche mit sich selbst im allgemeinen 12 Flächen, die eine hexagonale Bipyramide bilden, entsprechen, Fig. 389. Sobald aber die Fläche zur Symmetrieachse parallel ist, geht die Bipyramide in ein hexagonales Prisma, und wenn sie zur Symmetrieachse senkrecht steht, geht sie in die Basis über.

Fig. 389.

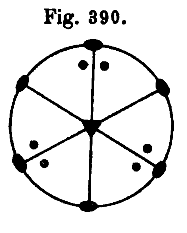


Eine einzige Harmonie der Kristalle wird diese Symmetrie aufweisen dürfen, nämlich die pyramidale Hemiharmonie $(06)^\sigma$ der sechsgliedrigen Kristalle.

25. Ditrigonal-bipyramidale Symmetrie.

Eine dreizählige Symmetrieachse, 3 zu ihr senkrechte gleichwertige zweizählige Symmetrieachsen und 4 durch die Symmetrieachsen gehende Symmetrieebenen sind vorhanden. Die 3 durch die dreizählige Symmetrieachse gehenden Symmetrieebenen sind unter sich gleichwertig. Infolge dieser Einrichtung entspricht eine Fläche im allgemeinen 12 gleichen Flächen, sie selbst gerechnet, die eine ditrigonale Bipyramide bilden, Fig. 390. Ist die Fläche senkrecht zu einer der 3 gleichwertigen Symmetrieebenen, so geht die ditrigonale Bipyramide in eine trigonale über; ist die Fläche aber parallel der dreizähligen Symmetrieachse, so entsteht daraus ein ditrigonales resp. trigonales Prisma; und wenn die Fläche zur dreizähligen Symmetrieachse senkrecht steht, so bildet sich die Basis.

Fig. 390.

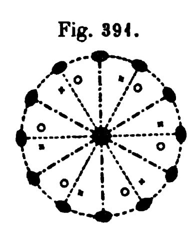


Nur die trigonotypische Hemiharmonie (23)[s] der sechsgliedrigen Kristalle kann diese Symmetrie aufweisen.

26. Hexagonal-trapezoedrische Symmetrie.

Eine sechszählige Symmetrieachse und 6 zu ihr senkrechte zweizählige Symmetrieachsen sind vorhanden. Letztere sind zu je 3 gleichwertig. Eine Fläche erzeugt im allgemeinen ein hexagonales Trapezoeder, Fig. 391, da sie 12 Flächen entspricht, sie selbst gerechnet. Letzteres geht in eine hexagonale Bipyramide über, wenn die sie erzeugende Fläche zu einer Ebene, die durch 2 Symmetrieachsen geht, senkrecht steht. Ist die Fläche zur sechszähligen Symmetrieachse parallel, so geht das Trapezoeder in das dihexagonale Prisma resp. in das hexagonale Prisma über, wenn sie außerdem zu einer der zweizähligen Symmetrieachsen senkrecht steht; ist sie zur sechszähligen Symmetrieachse senkrecht, so geht daraus die Basis hervor.

Fig. 391.

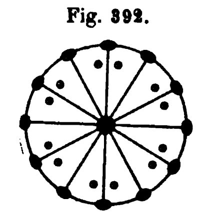


Nur die gyroedrische Hemiharmonie (26) der sechsgliedrigen Kristalle kann diese Symmetrie zeigen.

27. Dihexagonal-bipyramidale Symmetrie.

Zu den vorigen Symmetrieelementen kommt eine durch 2 Symmetrieachsen gehende Symmetrieebene. Dadurch entstehen im ganzen folgende Symmetrieelemente: Eine sechszählige Symmetrieachse, 6 zu je 3 gleichwertige zweizählige Symmetrieachsen, welche zu den vorigen senkrecht stehen, 7 durch die Symmetrieachsen gehende Symmetrieebenen und das Symmetriezentrum. Infolgedessen entspricht jede Fläche im allgemeinen 24 Flächen, sie selbst gerechnet, die eine dihexagonale Bipyramide, Fig. 392, bilden, und speziell eine hexagonale Bipyramide oder ein Prisma, wenn die angenommene Fläche zu irgend welcher Symmetrieebene senkrecht steht. Die Bipyramide geht in die Basis über, wenn die Flächen zu der sechszähligen Symmetrieachse senkrecht stehen.

Fig. 392.



Es ist einleuchtend, daß nur die Holoharmonie (26)[s] der sechsgliedrigen Kristalle diese Symmetrie wird aufweisen können.

Die 7 zuletzt behandelten Symmetrien, nämlich die hexagonal-pyramidale (21), dihexagonal-pyramidale (22), trigonal-bipyramidale (23), hexagonal-bipyramentale (24), ditrigonal-bipyramidale (25), hexagonal-trapezoedrische (26) und die dihexagonal-bipyramidale Symmetrie (27), haben eine entweder sechszählige oder durch das Hinzutreten des Symmetriezentrums sechszählig werdende Symmetrieachse gemeinschaftlich. Deshalb herrscht bei diesen Kristallen entweder ein hexagonales Prisma, eine hexagonale Pyramide, oder eine hexagonale Basis, und ihre Grundgestalten sind bei allen zu diesen Symmetrien gehörenden Kristallen gleich und haben dieselben Symmetrieelemente. Man hat auch diese 7 Symmetrien in einer Syngonie, die hexagonale genannt, vereinigt.

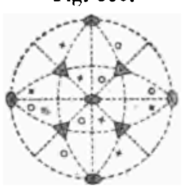
28. Tetraedrische Symmetrie.

Denke man sich ein reguläres Hexaeder, so sind auf und in demselben folgende Richtungen hervorzuheben: Die 3 Kanten, die 4 Diagonalen der Gestalt und die 6 Diagonalen der Flächen.

Bei dieser Symmetrie ergeben sich 4 dreizählige mit den 4 Diagonalen der Gestalt übereinstimmende und unter sich gleichwertige Symmetrieachsen, ferner 3 zweizählige den 3 Kanten des Hexaeders parallel gehende und folglich untereinander gleichwertige Symmetrieachsen.

2 dreizählige Achsen bilden unter sich zusammen den Winkel 70°31′44″; jede derselben schließt mit der zweizähligen Achse den Winkel 35°15′52″ ein, wie wir in § 126 gesehen haben.

Fig. 393.



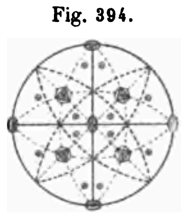
Infolge dieser Anordnung der Symmetrieelemente entspricht jede Fläche im allgemeinen 12 Flächen, sie selbst gerechnet, welche ein tetraedrisch-pentagonales Dodekaeder, Fig. 393, bilden. Dieses geht speziell in ein Tetraeder über, wenn die angenommene Fläche zu einer dreizähligen Symmetrieachse senkrecht steht, oder in ein Hexaeder bei senkrechter Stellung der Fläche zu einer zweizähligen Symmetrieachse.

Nur die tetraedrische Tetartoharmonie (33) der viergliedrigen Kristalle kann in diese Symmetrie übergehen.

29. Dyakis-dodekaedrische Symmetrie.

4 dreizählige Symmetrieachsen, die mit den 4 Diagonalen des Hexaeders übereinstimmen, sind vorhanden. Außerdem erscheinen 3 zweizählige, den 3 Kanten dieser Gestalt parallel laufende Symmetrieachsen, durch welche 3 Symmetrieebenen gehen und die aufeinander senkrecht stehen. Infolgedessen ist auch das Symmetriezentrum vorhanden. Alle Achsen sind einwertig. Daher entspricht jede Fläche im allgemeinen 24 Flächen, sie selbst gerechnet, welche ein Diakisdodekaeder bilden, Fig. 394. Dasselbe geht in ein Pentagondodekaeder über, wenn die Fläche zu einer Symmetrieebene, in ein Oktaeder, wenn sie zu einer dreizähligen Achse senkrecht steht, usw.

Fig. 394.



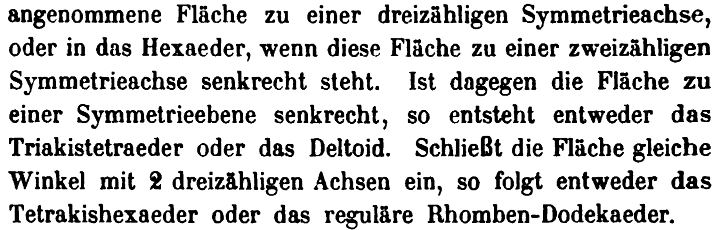
Nur die pentagonale Hemibarmonie $(33)^{\sigma}$ der drei- und viergliedrigen Kristalle wird diese Symmetrie zeigen können.

30. Hexakis-tetraedrische Symmetrie.

4 gleichwertige dreizählige mit den 4 Diagonalen übereinstimmende Symmetrieachsen sind vorhanden; dazu kommen noch 3 gleichwertige zweizählige mit den Kanten des Hexaeders parallel laufende Symmetrieachsen. Außerdem erscheinen noch 6 gleichwertige Symmetrieebenen, die durch je 2 der dreizähligen Symmetrieachsen gehen. Diese Symmetrieebenen stimmen mit den Diagonalebenen des Hexaeders überein. Infolge dieser Anordnung entspricht

eine Fläche im allgemeinen 24 das Hexakistetraeder, Fig. 395, bildende Flächen, sie selbst gerechnet. Letzteres geht in das Tetraeder über, wenn die angenommene Fläche zu einer dreizähligen Symmetrieachse, oder in das Hexaeder, wenn diese Fläche zu einer zweizähligen Symmetrieachse senkrecht steht. Ist dagegen die Fläche zu einer Symmetrieebene senkrecht, so entsteht entweder das Triakistetraeder oder das Deltoid. Schließt die Fläche gleiche Winkel mit 2 dreizähligen Achsen ein, so folgt entweder das Tetrakishexaeder oder das reguläre Rhomben-Dodekaeder.

Fig. 395.

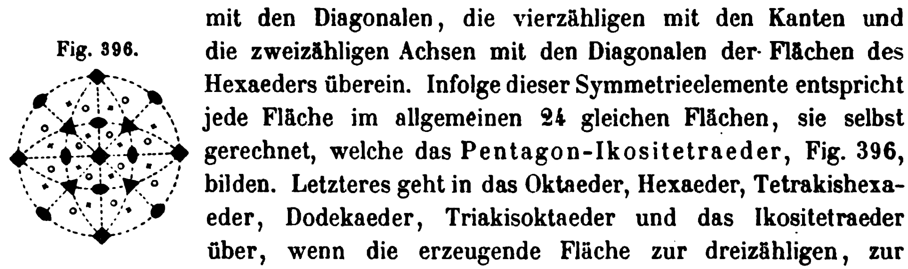


Nur die tetraedrische Hemiharmonie (33)[s] der drei- und viergliedrigen Kristalle wird diese Symmetrie zeigen dürfen.

31. Plagiedrische Symmetrie.

4 gleichwertige dreizählige, 3 gleichwertige vierzählige und 6 gleichwertige zweizählige Symmetrieachsen sind vorhanden. Die dreizähligen Achsen stimmen mit den Diagonalen, die vierzähligen mit den Kanten und die zweizähligen Achsen mit den Diagonalen der Flächen des Hexaeders überein. Infolge dieser Symmetrieelemente entspricht jede Fläche im allgemeinen 24 gleichen Flächen, sie selbst gerechnet, welche das Pentagon-Ikositetraeder, Fig. 396, bilden. Letzteres geht in das Oktaeder, Hexaeder, Tetrakishexaeder, Dodekaeder, Triakisoktaeder und das Ikositetraeder über, wenn die erzeugende Fläche zur dreizähligen, zur vierzähligen, zur zweizähligen und resp. zu einer Symmetrieebene usw. senkrecht steht.

Fig. 396.



Diese Symmetrie kann nur die gyroedrische Hemiharmonie (34) der drei- und viergliedrigen Kristalle zulassen.

32. Hexakis-oktaedrische Symmetrie.

Zu den 13 Symmetrieachsen der vorigen Symmetrie kommen 9 Symmetrieebenen hinzu. 3 derselben sind unter sich gleichwertig und gehen durch die vierzähligen Symmetrieachsen, während die übrigen 6, auch unter sich gleichwertigen, durch die zwei- und dreizähligen Achsen gehen. Daher entspricht eine Fläche im allgemeinen 48 gleichen, das Hexakisoktaeder, Fig. 397, bildenden Flächen, sie selbst gerechnet. Ist die angenommene Fläche zu einer dreizähligen Achse senkrecht, so entsteht das Oktaeder, ist sie senkrecht zur vierzähligen Achse, so bekommen wir das Hexaeder usw., wie bei der vorigen Symmetrie.

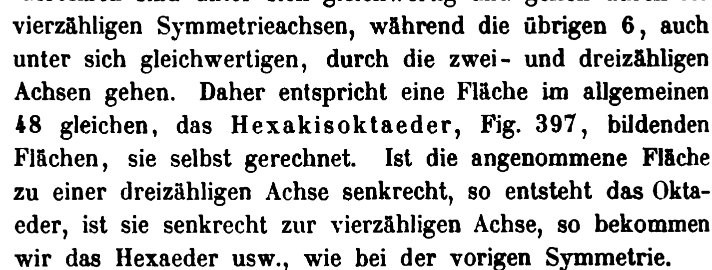
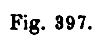
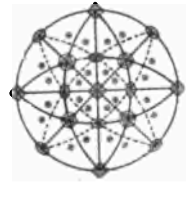


Fig. 397.





Nur die Holoharmonie (34)[s] der viergliedrigen Kristalle wird diese Symmetrie zeigen dürfen.

Die letzten 5 Symmetrien, nämlich die tetraedrische (28), die dyakisdodekaedrische (29), die hexakis-tetraedrische (30), die plagiedrische (31) und die hexakis-oktaedrische (32) haben gemeinschaftlich: 4 dreizählige unter sich

gleichwertige Symmetrieachsen, welche bald zweiwertig (wie bei der tetraedrischen und hexakis-tetraedrischen), bald einwertig (wie bei der dyakisdodekaedrischen, plagiedrischen und hexakis-oktaedrischen Symmetrie) werden können.

Die Grundgestalten dieser 5 Symmetrien haben dieselben 23 Symmetrieelemente, wie sie die hexakis-oktaedrische Symmetrie aufweist. Man hat sie deshalb in einer Syngonie vereinigt, welche regulär genannt wird. Ihre herrschenden Gestalten sind in der Tat alles reguläre Hexaeder, Oktaeder, Dodekaeder usw.

§ 130. Beweis, daß nur 32 Symmetrien bei den Kristallen möglich sind.

Die 24 möglichen und voneinander verschiedenen Harmonien der Kristalle gehen in ebenso viele Symmetrien über, wenn alle dort vorhandenen Harmonieelemente den Symetrieelementen entsprechen. Diese Symmetrien sind durch 1 zweizählige, durch 1 vierzählige, durch 1 sechszählige oder durch 4 dreizählige Symmetrieachsen ausgezeichnet.

Um weitere Symmetrien zu bauen, haben wir nur die Anzahl der Symmetrieelemente zu reduzieren. Mit den zweizähligen Symmetrieaxen sind 5 Symmetrien möglich, nämlich eine solche, wo 3 zweizählige Achsen aufeinander senkrecht stehen; eine zweite, wo noch 3 Symmetrieebenen hinzutreten; eine dritte, wo nur eine zweizählige Symmetrieachse vorhanden ist; eine vierte, wo noch 2 durch die Achse gehende Symmetrieebenen hinzukommen und endlich eine fünfte Symmetrie, wo nur eine zur Symmetrieachse senkrecht stehende Symmetrieebene hinzutritt. Ist keine Symmetrieachse vorhanden, so sind 2 Symmetrien möglich, nämlich eine mit 1 Symmetrieebene und die andere mit dem Symmetriezentrum.

Endlich ist noch die Asymmetrie anzuführen, bei welcher gar kein Symmetrieelement vorkommt. Also im Ganzen $24 + 5 + 2 + 1 = 32$ Symmetrien.

Von den 32 Symmetrien sind nur 30 bei den Kristallen beobachtet worden, und diese nicht alle mit Sicherheit.

Die trigonal-bipyramidale und die ditrigonal-bipyramidale Symmetrie sind bis jetzt bei den Kristallen als bestimmt nicht nachgewiesen.

§ 131. Zusammenstellung der 32 Symmetrien und der 7 Syngonien bei den Kristallen.

I. Trikline Syngonie:

1. Asymmetrie,
2. pinakoidale Symmetrie.

II. Monokline Syngonie:

3. Sphenoidische Symmetrie,
4. domatische Symmetrie,
5. prismatische Symmetrie.

III. Rhombische Syngonie:

6. Rhombisch-pyramidale Symmetrie,
7. bisphenoidische Symmetrie,
8. rhombisch-bipyramidale Symmetrie.

IV. Trigonale Syngonie:

9. Trigonal-pyramidale Symmetrie,
10. ditrigonal-pyramidale Symmetrie,
11. trigonal-trapezoëdrische Symmetrie,
12. rhomboedrische Symmetrie,
13. skalenoëdrische Symmetrie.

V. Tetragonale Syngonie:

14. Tetragonal-pyramidale Symmetrie,
15. ditetragonal-pyramidale Symmetrie,
16. tetragonal-sphenoidische Symmetrie,
17. tetragonal-skalenoëdrische Symmetrie,
18. tetragonal-bipyramidale Symmetrie,
19. tetragonal-trapezoëdrische Symmetrie,
20. ditetragonal-bipyramidale Symmetrie.

VI. Hexagonale Syngonie:

21. Hexagonal-pyramidale Symmetrie,
22. dihexagonal-pyramidale Symmetrie,
23. trigonal-bipyramidale Symmetrie,
24. hexagonal-bipyramidale Symmetrie,
25. ditrigonal-bipyramidale Symmetrie,
26. hexagonal-trapezoedrische Symmetrie,
27. dihexagonal-bipyramidale Symmetrie.

VII. Reguläre Syngonie:

28. Tetraedrische Symmetrie,
29. dyakis-dodekaedrische Symmetrie,
30. hexakis-tetraedrische Symmetrie,
31. plagiedrische Symmetrie,
32. hexakis-oktaedrische Symmetrie.

§ 132. Bestimmung der Symmetrien bei den Kristallen.

Die Symmetrien werden hingestellt als die Grenzen der Harmonien. Die Grenze bezieht sich sowohl auf die physikalischen, als auch auf die geometrischen Verhältnisse; infolgedessen werden sich die Symmetrien aus den Harmonien ergeben müssen. Ein Beispiel wird die Sache klarlegen:

Die Grundgestalt des Leuzits ist drei- und viergliedrig und die Harmonie desselben ist wahrscheinlich die pentagonale Hemiharmonie $(33)^{\sigma}$ mit 3 Diharmonieebenen, 4 Triharmonieachsen, 3 Monoharmonieachsen und dem

Harmoniezentrum. Auch die Mimesie und die Verwachsungen des Leuzits deuten auf diese Hemiharmonie hin.

Würden nun die Flächen (110) und (1$\bar{1}$0) aufeinander senkrecht stehen, sowie (011) und (0$\bar{1}$1) und ebenfalls die 3 Harmonieebenen, so würde sich daraus die dyakis-dodekaedrische Symmetrie ergeben. Nun haben die Messungen der Winkel nicht zu einem endgültigen Resultat geführt, was offenbar mit den unvermeidlichen Störungen der Kristallausbildung beim Leuzit zu erklären ist.

Man hat daher die geometrische Grenze der Grundgestalt zu umgehen gesucht und man ist zu den optischen Erscheinungen übergegangen. Die eingehenden Untersuchungen C. Kleins haben hinreichend bewiesen, daß der Leuzit bei der gewöhnlichen Temperatur nur eine Symmetrieebene besitzt. Die Untersuchungen H. Baumhauers haben bei dem Leuzit auch das Symmetriezentrum nachgewiesen; infolgedessen ist die Syngonie des Leuzits monoklin und die Symmetrie prismatisch.

Geometrisch verhält sich der Leuzit der regulären Syngonie so nahe, daß man lange Zeit den Leuzit für regulär gehalten hat. Seit den Forschungen C. Kleins haben sich die kleinen, in den Winkeln nicht nachweisbaren Differenzen bei den empfindlichen optischen Erscheinungen kundgegeben.

Man hat sogar eine Zeitlang den Leuzit für geometrisch regulär gehalten und physikalisch monoklin, was offenbar ein Unsinn ist, da die geometrischen Verhältnisse bei dem Kristall der Ausdruck der physikalischen Verhältnisse sind und beide sprechen die physikalische Eigentümlichkeit des Kristalls aus.

Man hat oft mit recht kleinen Differenzen zu tun, damit die wahre Symmetrie der Kristalle zum Vorschein kommt. Manchmal ist von wenig Belang, ob bei den Untersuchungen die Grenze der Symmetrie erreicht wird. Die Symmetrie drückt zwar eine wichtige Eigenschaft des Kristalls aus; die gesamte Ausbildung des Kristalls geht aber erst aus den Harmonieeigenschaften hervor. Man wird daher vorerst die Harmonie eines Kristalls erforschen durch die angegebenen Methoden; erst dann wird untersucht, ob die betreffenden Harmonieelemente zu Symmetrieelementen werden können, indem die Grenze der Winkel und der physikalischen Erscheinungen erreicht wird.

§ 133. Beziehung zwischen Symmetrie und Harmonie der Krystalle. Anomalien. Brewsters Gesetz.

Aus der Art und Weise wie die Symmetrieelemente aus den Harmonieelementen erhalten worden sind, geht hervor, daß die Symmetrieeigenschaften die Grenze der Harmonieeigenschaften darstellen. Diese Grenze ist physikalisch und geometrisch gegeben. Die physikalischen und die geometrischen Bedingungen einer Symmetrie ergänzen sich gegenseitig. Genügt nämlich ein Kristall den physikalischen Bedingungen für eine gewisse Symmetrie, so sind damit ebenso die Syngonieeigenschaften vorhanden. Stellen sich umgekehrt gewisse Syngoniebedingungen bei einem Kristall ein, so kann dieser nur jene physikalischen Symmetrien aufweisen, welche zur Syngonie gehören. In jedem einzelnen Fall müssen diese Sätze an der Hand der Erfahrung bewiesen werden. Diese Sätze rühren von Brewster her.

Die Störungen der Krystalle und die Beobachtungsfehler haben dabei keinen beträchtlichen Einfluß, da sie mit Hilfe zahlreicher Beobachtungen an vielen Kristallen derselben Art in den Resultaten ausgeglichen werden können. Dagegen ist die Genauigkeit der Messungen von großem Belang. Die Empfindlichkeit der physikalischen Erscheinungen zeigt bedeutende Unterschiede. Die Methode, mit welcher die optischen Konstanten angegeben werden, ist empfindlicher als diejenige, welche man gebraucht, um die geometrischen oder die elastischen Konstanten zu bestimmen. So sind viele Kristalle geometrisch einer bestimmten Symmetrie so nahe gekommen, daß man für sie diese Symmetrie angenommen hat; später stellte es sich dann heraus, daß dieselbe den betreffenden Kristallen nicht zukam. Der Aragonit z. B. wurde unter die rhombisch-bipyramidale Symmetrie gestellt, während er durch die pyroelektrischen Erscheinungen als asymmetrisch nach Beckenkamp bestimmt werden mußte. Flußspat, Granat, Leuzit, usw., deren Kristalle als zu einer der regulären Syngonie angehörenden Symmetrie eingereiht wurden, müssen einer niedrigeren Symmetrie zugeschrieben werden, wenn man die optischen Erscheinungen in Betracht zieht. Beryll wurde immer für hexagonal gehalten und dies folgt sowohl aus den geometrischen als auch aus den elastischen Konstanten; und doch stimmen seine optischen Erscheinungen mit keiner Symmetrie der hexagonalen Syngonie überein. Dasselbe läßt sich auch vom Turmalin sagen.

Dieser Zwiespalt zwischen den verschiedenen Resultaten der Beobachtung wurde mit dem Wort Anomalie bezeichnet. So spricht man von einer optischen Anomalie, wenn die aus den optischen Erscheinungen sich ergebende Symmetrie eine andere ist als diejenige, welche sich aus den Messungen der Flächenwinkel oder aus den elastischen Erscheinungen ergibt.

Von einer Anomalie des Gesetzes ist eigentlich keine Rede. Der Anomalie liegt vielmehr die verschiedene Empfindlichkeit zugrunde, mit welcher die einzelnen physikalischen Erscheinungen festgesetzt werden.

Bei den Harmonieeigenschaften kommt natürlich keine Anomalie vor, denn sie stellen den Ausdruck von allen physikalischen und geometrischen Erscheinungen dar; außerdem wird die Harmonie durch keine Grenze angegeben wie die Symmetrie, und somit kommt dabei die Genauigkeit der Bestimmungen nicht in Betracht. So ist der Beryll harmonisch sechsgliedrig in bezug auf alle physikalischen Erscheinungen wie der Aragonit. Will man seine Symmetrie feststellen, so wäre er bald hexagonal, bald rhombisch, bald gar monoklin je nach der Genauigkeit, mit welcher die einzelnen physikalischen Erscheinungen zum Vorschein kommen.

Es ist ersichtlich, daß nur ein recht kleiner Unterschied genügt, um sofort einen Kristall von einer Symmetrie zu einer andern überzuführen, sodaß sie für die Systematik der Kristalle nicht gut brauchbar ist.

Wahrscheinlich ist die Symmetrie nur eine ideale Grenze der Harmonie bei den Kristallen, welche in der Natur nicht erreicht werden kann. Es ist sicher, daß viele Symmetrien mit Hilfe der Verzwillingung oder mimetischen Mischung entstehen.

Man bleibt daher in der natürlichcn Deutung der Eigenschaften der Kristalle, wenn die Harmonie in den Vordergrund gestellt und die Symmetrie nur nebenbei behandelt wird. Mit Hilfe der Harmonie erhält auch der Isomorphismus eine klarere Deutung als durch die Symmetrie der Kristalle, wie wir in der Folge sehen werden.

Außer der vorhin besprochenen scheinbaren Anomalien, welche dem verschiedenen Grad der Empfindlichkeit zugeschrieben werden, mit der die physikalischen und geometrischen Konstanten zum Vorschein kommen, oder der mimetischen Mischung, hat man auch mit wirklichen Anomalien zu tun, sodaß es Kristalle gibt, welche Brewsters Gesetz umstoßen. Wir können das Brewstersche Gesetz von demselben Gesichtspunkt auffassen, wie das Haüysche Gesetz, keine Gestalt für sich reicht zur Bestimmung des Haüyschen Gesetzes aus; also keine Gestalt genügt diesem Gesetz vollkommen. Das rührt offenbar davon her, daß Störungen bei dem Wachsen der Kristalle unvermeidlich sind. Nun haben wir hervorgehoben, daß diese Störungen von zweierlei Natur sein können, nämlich solche Störungen, welche auf die Homogenität Einfluß haben, und solche welche die Homogenität unverändert lassen. Beide haben die Veränderung der Gestalt zur Folge; aber nur die ersteren werden die wirklichen Anomalien der Kristalle hervorrufen. Während also die scheinbaren Anomalien durch die scheinbare Symmetrie der Kristalle, oder durch mimetische Mischung zu erklären sind, werden die wirklichen Anomalien durch innere Störungen zu erklären sein, welche die Homogenität aufheben. Diese Störungen beruhen entweder auf einer späteren Deformation der Kristalle, auf Druck, auf Spannung oder auf wirklicher Störung der molekularen Anordnung beim Wachsen der Kristalle. Beispiele der ersteren sind Ferrocyankalium, Autunit, Ekdemit, Natrolith, Prehnit usw.; Beispiele der letzteren sind Bornit, Leuzit, Trydimit, Cristobalit usw., Steinsalz, Sylvin, Diamant, Senarmontit, Turmalin, Apatit usw., Analzim, Granat, Korund, Flußspat usw.

§ 134. Geschichtliches. Literatur.

R. J. Haüy ist der Entdecker der Gesetze der Symmetrie (Sur une loi de cristallisation appelée loi de symétrie. Mém. du Musée d'Hist. nat. 1815, t. I). Haüy stellte die merkwürdige Eigenschaft der Kristalle fest, daß an einem vollkommen auskristallisierten Körper von einer Gruppe gleichwertiger Flächen niemals eine ohne die andere auftreten wird. In der Ableitung der Kristallsymmetrien verfuhr man im Anfang induktiv, dabei ergaben sich irrtümliche Folgerungen.

Der erste, welcher alle möglichen Symmetrien systematisch ableitete, war F. C. Hessel (Artikel Kristallographie in Gehlers physikalischem Wörterbuch S. 1062 ff. 1830). Zwanzig Jahre später wurde das Problem wieder aufgenommen und zwar von A. Bravais (Mémoire sur les polyèdres de forme symétrique. Journ. de math. par Liouville, t. 14, p. 141—1849). Diese von Bravais in klarer Darstellung durchgeführte Untersuchung ist nicht erschöpfend,

da ihm eine Symmetrie, nämlich diejenige mit der vierzähligen Spiegeldrehachse Bravais, entgangen ist. Ehe die Untersuchungen Bravais vorlagen, hatte A. F. Möbius (Über das Gesetz der Symmetrie der Kristalle, Ber. d. Sächs. Ges. der Wissenschaften 1849, Bd. 1, S. 65) die Ableitung der Kristallsysteme abgefaßt. Später hatte Möbius die Aufgabe der möglichen Symmetrien bei den Kristallen aufgenommen und im Jahre 1851 in der Sächsichen Gesellschaft der Wissenschaften darüber kurz Bericht erstattet. Die zweite erschöpfende Erledigung der Aufgabe, alle theoretisch denkbaren Kristallsymmetrien aufzustellen, verdanken wir A. Gadolin (Mémoire sur la déduction d'un seul principe de tous les systèmes cristallographes. Act. soc. scient. Fennicae, Helsingfors, t. 9, p. 1—71, 1871 [deutsch übersetzt von P. v. Groth]); er hat von neuem und zwar, wie es scheint, ohne die Bravaisschen Arbeiten zu kennen, die 32 Symmetrien geometrisch abgeleitet. In jüngster Zeit ist dasselbe jedoch nach wesentlich verschiedener Methode auch von E. v. Fedorow (Elemente der Lehre von den Figuren, Petersburg 1885), P. Curie (Sur les questions d'ordre, Bull. de la soc. min. de France, t. 7, p. 89 u. 418, 1884), B. Minnigerode (Untersuchungen über die Symmetrieverhältnisse der Krystalle, Neues Jahrb. f. Min. usw. B. B. 5, S. 145, 1887), L. Sohncke (Entwicklung einer Theorie der Krystallstruktur, Leipzig 1879), A. Schoenflies (Kristallsysteme und Krystallstruktur, Leipzig 1891), Fr. Becke, C. Viola, E. Billows, u. a. geschehen.

Grundgestalten nach Symmetrieeigenschaften scheinen schon bei Haüy vorzukommen. Als vorkommende Kerngestalten, aus welchen alle Gestalten abzuleiten sind, bezeichnete Haüy: das Parallelopipedon, das Oktaeder, das Tetraeder, das reguläre sechsseitige Prisma, das Rhomboidaldodekaeder und das Dodekaeder mit dreieckigen Flächen.

Auffallend ist, daß J. J. Bernhardi seine sechs Grundgestalten nicht auf die Symmetrieeigenschaften fußte. Die jetzigen 7 Syngonien rühren von G. S. Weiß (1815) her, welcher sie Systeme nannte. Nicht viel anders wurde die Frage von Fr. Mohs (1832), W. Haidinger (1825—1845), K. F. Naumann (1830—1856), J. Dana, W. H. Miller (1839—1866), J. Hausmann, F. A. Quenstedt (1855) u. a. behandelt.

Die Bezeichnungen regulär, tetragonal, hexagonal, rhombisch, monoklin, triklin rühren von Naumann her, während A. Sella die in Italien gebräuchlichen und von J. Strüver angenommenen Benennungen monometrisch, dimetrisch, hexagonal, trimetrisch, monoklin und triklin vorzog. Hessel führte nur drei Systeme der Kristalle ein, d. h. hexagonal, tetragonal und digonal. Fedorow verfolgte im großen und ganzen diese Einteilung.

Bedeutend verschieden behandelten diese Aufgabe J. F. Breithaupt (1869) und G. Jenzsch. Letzterer führte nur 4 nicht auf die Symmetrie begründete Systeme ein, die er als tesserales, tetragonales, hexagonales und heterogonales bezeichnete.

Die Einführung der Syngonie in die Kristallographie verdanken wir Ch. Soret. E. v. Fedorow hat sich ihr mit erweiterter Bedeutung angeschlossen.

Alle späteren Kristallographen haben ohne große Veränderungen die 7 Kristallsysteme nach Weiß beibehalten.

Durch Einführung der Morphotropie hat P. v. Groth (1870) die Basis für eine neue Systematik gelegt, da alle morphotropen Kristalle das Merkmal der Harmonie (nicht der Symmetrie) gemeinschaftlich haben. Darüber wird in dem folgenden Kapitel eingehender gesprochen.

F. Wallerant hat in den letzten Jahren das Prinzip verfolgt, daß alle Kristalle ein einziges System bilden, da alle Kristallgestalten aus einer einzigen Grundgestalt ableitbar sind. Infolge nicht genügender Ausbildung der Lehre Wallerants scheint das ein Irrtum zu sein, denn eine Grundgestalt läßt sich nur durch die herrschenden, nicht durch irgendwelche beliebig abgeleitete Flächen definieren.

Bald nach der ersten Arbeit D. Brewsters (1821), durch welche der Satz ausgesprochen wurde, daß die physikalischen Symmetrien mit den geometrischen Verhältnissen der Kristalle zusammenhängen, hatte Brewster (1821) selbst gezeigt, daß Steinsalz, Flußspat, Diamant und Alaun im Widerspruch stehen mit der Annahme über die geometrische und physikalische Symmetrie, welche Haüy, E. L. Malus und J. B. Biot annahmen. Später zeigte er, daß auch der Borazit anomal sei, und ebenfalls der Analzim (1824). Selbst Brewster (1835) zeigte, daß durch Druck die Kristalle anomal werden können. Biot untersuchte (1841) mehrere anomale Kristalle, wie Alaun, Steinsalz, Flußspat, Salmiak, Borazit, Leuzit, Apophyllit, und glaubte, daß der Borazit aus Zwillingslamellen bestehe, da eben er anomal sei. Auch F. E. Neumann (1841) wies nach, daß durch Druck Anomalien erzeugt werden. O. Volger (1855) dachte sich, daß fremde Beimengungen die Anomalie hervorrufen, so z. B. Lamellen von Parisit im Borazit. Dieser Meinung war auch H. Marbach (1855), und F. E. Reusch (1855) bestätigte durch Versuche, daß der Druck die Anomalie der Kristalle erzeugt. Obwohl auch A. Des Cloizeaux (1868) der Meinung war, daß fremde Beimengungen die Anomalie erzeugen können, wie z. B. die Lamellen von Parisit beigemengt in Borazit, so wurde doch von H. B. Geinitz ganz reiner Borazit gezeigt, der anomal war.

E. Mallard (1876) hatte die Hypothese aufgestellt, daß die anomalen Kristalle mimetische Mischungen seien von niedriger Symmetrie. Das konnte aber den Tatsachen nicht entsprechen, die später von C. Klein reichlich gesammelt worden sind. Daher nahm C. Klein (1880) an, daß die von ihm untersuchten Kristalle anomal werden durch innere Spannung. Auch H. Rosenbusch schloß sich den Ansichten C. Kleins an, wenigstens was den Leuzit betrifft. Derselben Theorie huldigte auch G. Wyrouboff (1884—1885), und H. Bücking (1882) bestätigte sie durch Versuche an Quarz und Turmalin.

Später gründete E. Mallard (1887) die Theorie der anomalen Kristalle auf die Struktur. Er läßt die Pseudosymmetrie in Vordergrund treten; für ihn ist nämlich ein Kristall pseudosymmetrisch, wenn die Symmetrie des Netzes höher ist als diejenige der Moleküle. Diese Mallardsche Theorie leidet daran, daß sie durch Versuche nicht bestätigt werden kann. Jedenfalls zog Mallard

nur die scheinbaren Anomalien, nicht diejenigen, welche durch andere Forscher beobachtet worden sind, in Betracht.

Über anomale Kristalle liegen zahlreiche Untersuchungen vor, so von Senarmont, Breithaupt (1860), Websky (1869), Zirkel (1873), Baumhauer (1874, 1886), Wichmann (1875), Tschermak (1875), Brauns u. a., aber ganz besonders von C. Klein. Eine der Mallardschen naheliegende Theorie der anomalen Kristalle war auch die von Fr. Wallerant (1898). V. Goldschmidt (1897) dachte sich, daß die Anomalien vielleicht zu erklären sein werden durch die Oberflächenspannung der festen Körper.

Andere Forscher sind hauptsächlich zu nennen: A. Karnojitzky (1891—1895), E. von Fedorow (1891), Fr. Klocke (1881), J. Beckenkamp, P. v. Groth usw.

Eine genau historische, theoretische und praktische Zusammenstellung der optischen Anomalien der Kristalle findet man in R. Brauns: Die optischen Anomalien der Krystalle. Preisschrift. Leipzig 1891.

Die neue Literatur ist sehr reich über Symmetrie und Anomalien der Kristalle. Folgendes mag an dieser Stelle genügen:

V. v. Lang. Über die Symmetrieverhältnisse der Krystalle. Sitzgb. k. Akad. d. Wiss. Wien 1896, 105; IIa 362.

C. Viola. Elementare Darstellung der 32 Krystallklassen. Ztschr. f. Krystall. **27**, 1.

E. v. Fedorow. Beitrag zur Syngonielehre. Ztschr. f. Krystall. **28**, 36.

—— Nachträgliche Studie über Symmetrielehre. Ztschr. f. Krystall. **28**, 468.

H. Ambronn und M. L. Blanc. Einige Beiträge zur Kenntniss isomorpher Mischkrystalle. Ztschr. f. phys. Chemie **22**, 121.

J. Beckenkamp. Zur Symmetrie der Krystalle. Ztschr. f. Krystall. **28**, 69; **30**, 55, 321; **32**, 9; **33**, 606; **34**, 569.

H. Baumhauer. Verschiedene Aufsätze über die Bestimmung der Symmetrie bei den Mineralien.

V. Goldschmidt. Über Krystallsysteme, deren Definition und Erkennung. Ztschr. f. Krystall. **31**, 135.

H. Ambronn. Über Anomalien bei der accidentalen Doppelbrechung (mit Literatur) k. sächs. Ges. d. Wiss. 1898, 315.

A. Schmidt. Die Klassen der Krystalle. Ztschr. f. Krystall. **33**, 620.

E. v. Fedorow. Neue Auffassung der Syngonie, eines Grundbegriffs der Krystallographie. Ztschr. f. Krystall. **31**, 21.

W. Barlow. The relation between the morphological symmetry and the ophical symmetry of crystals. Rep. Brit. assoc. 1895, 617.

—— Über homogene Strukturen und ihre symmetrische Teilung, mit Anwendung auf die Kristalle. Ztschr. f. Kristall. **27**, 449, 1897.

—— Die Symmetrie der Krystalle. Ztschr. f. Krystall. **34**, 1.

C. Viola. Zur Begründung der Krystallsymmetrien. Ztschr. f. Krystall. **34**, 353.

Kapitel IX.

Chemisch-physikalische Beziehungen.

§ 135. Das Haüysche Gesetz.

Die chemischen und die physikalischen Erscheinungen bestimmen zusammen den Zustand des Raumes, in dem die Erscheinungen beobachtet werden, und dieser Raumzustand drückt sich in der Grundgestalt und in der Harmonie der Kristalle aus. Durch kleine Änderung des Raumzustandes erhält man eine entsprechende Änderung in der Grundgestalt der Kristalle.

Bekanntlich treten verschiedene chemische Elemente so nahe zusammen, daß sie in der Natur immer oder fast immer beisammen vorzukommen pflegen; man hat sie deshalb auch in eine Gruppe vereinigt. So bilden die Alkalien eine Gruppe von nahe stehenden Elementen. Kalzium, Magnesium, Barium, Strontium, dann auch Eisen, Mangan und Zink sind ebenfalls unter sich sehr nahe verwandte Elemente usw.

Tritt in einer chemischen Verbindung an die Stelle eines Elements irgend ein mit demselben verwandtes, so hat man in der chemischen Verbindung nur eine kleine Änderung hervorgerufen, und man kann deshalb eine kleine Änderung des Zustandes erwarten. Als Beispiel wollen wir folgende Karbonate anführen; daneben mag ihre chemische Zusammensetzung und ein spezieller Winkel der Grundgestalt notiert werden.

Kalzit, $CaCO_3$	$(110)\widehat{:}(011) = 74°55'$
Dolomit, $CaMg(CO_3)^2$	$(110):(011) = 73\ 45$
Rhodochrosit, $MnCO_3$	$(110):(011) = 73\ \ 9$
Siderit, $FeCO_3$	$(110):(011) = 73\ \ 0$
Magnesit, $MgCO_3$	$(110):(011) = 72\ 40$
Smithsonit, $ZnCO_3$	$(110):(011) = 72\ 20.$

Sie gehören zur dreigliedrigen Grundgestalt, haben 3 gleich vollkommene Spaltungsflächen (110), (011) und (101), und zeigen sonst ein sehr ähnliches physikalisches und chemisches Verhalten, obwohl ihre Harmonie nicht immer dieselbe ist. So z. B. ist der Kalzit skalenoedrisch, während der Dolomit rhomboedrisch ist. Das physikalische und chemische Verhalten dieser Karbonate drückt sich in dem Fundamentalwinkel $(\widehat{110\ 011})$ aus.

Kalzit $CaCO_3$ und Aragonit $Ca_2C_2O_6$ haben zwar gleiche chemische Zusammensetzung, da sie aus 44% Kohlensäure und 56% Kalziumoxyd bestehen; sie stellen aber zwei ganz verschiedene chemische Verbindungen dar. Die chemische Verschiedenheit drückt sich sowohl in der Differenz ihrer Moleküle, $CaCO_3$ für Kalzit und $Ca_2C_2O_6$ für Aragonit, als auch in dem Verhalten in bezug auf die verschiedenen Reagentien aus. Gleichzeitig wie sie chemisch

differieren, sind sie auch physikalisch verschieden. Kalzit, wie gesagt, ist dreigliedrig und besitzt 3 vollkommen gleiche Spaltungsflächen, welche 74° 55′ miteinander einschließen. Aragonit ist dagegen sechsgliedrig; seine Spaltbarkeit ist unvollkommen, und die unvollkommenen Spaltungsflächen stimmen mit dem hexagonalen Prisma {1000} zusammen. Die Fundamentalwinkel von Aragonit sind:

$$(1000 \widehat{\ } 00\bar{1}0) = 63°50' \text{ und } (0\bar{1}01 \widehat{\ } 0101) = 71°34'.$$

Wenn aus dem Aragonit Kalzit erhalten werden soll, so geht mit dieser plötzlichen chemischen Änderung auch eine sprungweise Änderung in dem chemischen Verhalten vor sich.

Bei allen diesen Erscheinungen, handle es sich um kleine Änderungen des Raumzustandes oder habe man es mit Sprüngen zu tun, bleibt eins fest, daß chemische Veränderungen parallel zu den physikalischen Variationen vor sich gehen. Wenn man daher einen Zustand durch das chemische Verhalten definiert, so ist er auch in bezug auf das physikalische Verhalten unzweideutig bestimmt. Man nennt dies das Haüysche Gesetz, welches folgendermaßen abgefaßt werden kann:

Chemisches und physikalisches Verhalten bei den Kristallen entsprechen sich gegenseitig.

Also ein chemischer Zustand entspricht immer nur einem physikalischen Zustand, und umgekehrt ein physikalischer Zustand entspricht nur einem chemischen Zustand.

§ 136. Isomorphismus und Polymorphismus. Morphotropie.

Wenn alle Raumzustände nach ihren eigentümlichen Grundgestalten und Harmonien geordnet werden, so können wir daraus Reihen bilden, in denen die genannten Zustände durch sehr kleine, fast kontinuierliche Verschiedenheiten zusammenhängen. Man hat solche Reihen isomorphe Reihen genannt. Natürlich würde man keine Aufmerksamkeit auf sie lenken, wären die verschiedenen isomorphen Reihen nicht durch Sprünge voneinander getrennt.

Die oben angeführten 6 Karbonate, die der Kalzitoide, bilden eine isomorphe Reihe, insofern als ihr chemisches und psysikalisches Verhalten recht wenig von einem Glied zum andern ändert. Das wird in der vollkommenen Spaltbarkeit, in den drei gleichen Spaltungsflächen, in der Grundgestalt und in dem Fundamentalwinkel $(110 \widehat{\cdot} 011)$ ausgedrückt. Diese Erscheinung, welche sich in einer isomorphen Reihe kundgibt, nennt man Isomorphismus der Kristalle. Das Wort ist offenbar nicht ganz passend gewählt, da damit ausgedrückt wird, daß zwei oder mehrere Kristalle, welche chemisch voneinander verschieden sind, die nämliche Form haben; es handelt sich dagegen in einer isomorphen Reihe nicht nur um die gleiche Gestalt (Form), sondern um ein ähnliches chemisches und physikalisches Verhalten der einzelnen Glieder der Reihe. Man würde daher besser der Natur der Sache entsprechen, wenn anstatt

Isomorphismus Grad des Isomorphismus gesagt würde. Wir werden daher sagen, daß z. B. Dolomit und Magnesit einen größeren Grad des Isomorphismus haben als z. B. Dolomit und Smithsonit.

Folgende Karbonate bilden ebenfalls untereinander eine isomorphe Reihe:

	(1000 : 00$\bar{1}$0)	(0$\bar{1}$01 : 0101)
Aragonit $Ca_2C_2O_6$	63° 50′	71° 34′
Strontianit $Sr_2C_2O_6$	62 41	71 48
Cerussit $Pb_2C_2O_6$	62 41	71 44
Witherit $Ba_2C_2O_6$	62 12	72 16;

hier darf noch das kohlensaure Magnesium beigefügt werden. Diese Karbonate zeigen dieselbe Grundgestalt, dieselbe Harmonie und dieselbe Spaltbarkeit wie der Aragonit. Man wird auch von diesen Gliedern sagen, daß Aragonit mit Strontianit höher isomorph sei als mit Cerussit oder Witherit. Wir werden später noch mehrere isomorphe Reihen kennen lernen.

Diese Reihe der Karbonate, die Aragonitoiden, ist grundverschieden von derjenigen der Kalzitoiden; zwischen denselben liegt ein Sprung sowohl in chemischer als in physikalischer Beziehung. Wir können nämlich von keinem Glied der Kalzitoidenreihe zu keinem Glied der Aragonitoidenreihe weder physikalisch noch chemisch kontinuierlich übergehen. Zwischen Kalzit und Aragonit ist aber doch ein Merkmal gemeinschaftlich, nämlich die chemische Zusammensetzung; es bestehen beide je aus 44% Kohlenbioxyd und 56% Kalziumoxyd. Also sind Kalzit und Aragonit chemisch und physikalisch verschieden; sie sind zwei ganz verschiedene Zustände, welche wir durch ihre chemische Moleküle $CaCO^3$ für Kalzit und $Ca^2C^2O^6$ für Aragonit zum Ausdruck gebracht haben; da aber ihre quantitative chemische Zusammensetzung die gleiche ist, so nennt man diese Erscheinung Polymorphismus. Mit Polymorphismus will man also ausdrücken, daß die gleich quantitive chemische Zusammensetzung unter verschiedenen Modifikationen chemisch und physikalisch auftritt. Diese Benennung ist auch nicht passend gewählt, da mit diesem Wort die Tatsache ausgedrückt wird, daß eine und dieselbe chemische Substanz zwei oder mehrere verschiedene Grundgestalten entfalten, also zwei oder mehreren physikalischen Zuständen entsprechen kann, während doch Polymorphismus bedeuten soll, daß zwei oder mehrere chemisch und physikalisch verschiedene Zustände einer und derselben quantitativ gleichen chemischen Zusammensetzung entsprechen.

Man hat in der organischen Chemie fortwährend mit solchen sogenannten polymorphen Substanzen zu tun, so z. B. Cyanamid (CM_2H_2) und Dicyandiamid ($C_2M_4H_4$), sowie flüssiges Chlorcyan ($CMCl$) und festes Chlorcyan ($C_3M_3Cl_3$) usw,, um nur einige zu nennen.

Auch im Mineralreich weisen zahlreiche Beispiele diese Erscheinung auf, welche man mit der Bezeichnung Polymorphismus ausdrücken will. So haben Wasserdampf, Wasser und Eis gleiche Zusammensetzung, da sie aus 88,9% Sauerstoff und 11,1% Wasserstoff bestehen. Sie entsprechen drei Zuständen,

welche chemisch und physikalisch verschieden sind und sie gehen ineinander über durch Aufwand oder Gewinn an Wärme. Sie sind aber nicht bloß drei verschiedene Zustände in den bekannten physikalischen Eigenschaften, sondern auch in chemischer Beziehung. Der Wasserdampf reagiert z. B. stark auf Chlorgas, das Wasser langsam und das Eis sehr schwer. Ihre chemischen Moleküle sind offenbar auch verschieden, ihre Beständigkeit vergrößert sich vom Dampf zum Wasser und zum Eis.

Polymorphe Substanzen haben nur das Merkmal gemeinschaftlich, daß ihre chemische Zusammensetzung dieselbe ist, sonst gehen sie auseinander im Bezug auf jede andere Erscheinung, mag diese chemischer oder physikalischer Natur sein.

Wenn wir nun zwei isomorphe Reihen miteinander vergleichen, und wenn ein Glied der einen mit einem Glied der andern genau die gleiche chemische Zusammensetzung besitzt, so haben alle Glieder der einen Reihe mit den Gliedern der andern Reihe ein Merkmal gemeinschaftlich. Betrachten wir z. B. die Reihe der Kalzitoiden und vergleichen sie mit der Reihe der Aragonitoide, so ist Kalzit polymorph mit Aragonit, nicht aber mit Strontianit. Kalzit und Strontianit sind Karbonate, welche aus Kohlensäure und Alkalierdoxyden bestehen im Verhältnis der Moleküle wie 1 : 1. Wegen dieses gemeinschaftlichen Merkmals nennt man sie isopolymorph (§ 147).

Zwei isopolymorphe Reihen setzen also voraus, daß jede derselben eine isomorphe Reihe ist und wenigstens ein Glied besitzt, das mit einem entsprechenden Glied der andern polymorph ist.

Die Glieder einer isomorphen Reihe müssen dieselbe Grundgestalt zeigen und auch dieselbe Harmonie; nur unter dieser Bedingung werden sie dasselbe physikalische Verhalten aufweisen können. Sind die nötigen Merkmale vorhanden, um ein Glied in einer isomorphen Reihe einzuschließen und liegen ferner die geometrischen Konstanten an der Grenze, wo zwei voneinander verschiedene Grundgestalten zusammenstoßen, so wird man einen hinreichenden Grund besitzen, das in Frage kommende Glied in diejenige Grundgestalt einzureihen, in der die übrigen Glieder derselben isomorphen Reihe Platz nehmen müssen.

Als Beispiel einer isomorphen Reihe mögen die nach P. v. Groth in Fig. 88, 89, 90, S. 81 abgebildeten Kaliumplatojodonitrit, Cäsiumplatojodonitrit und Rubidiumplatojodonitrit angeführt sein, welche zu der viergliedrigen Grundgestalt gehören.

Der Isomorphismus der Krystalle ermöglicht also die natürlichen Grenzen zu ziehen zwischen den verschiedenen Grundgestalten, wo sonst Willkür herrschen würde. Würde man die Grundgestalten durch die Symmetrieeigenschaft definieren, so müßte man die oben drei genannten chemischen Verbindungen trennen, die erste in die tetragonale, die zweite in die monokline und die dritte in die trikline Syngonie einreihen. Eine so gebaute Systematik würde die geometrischen nicht aber die chemischen Verhältnisse für sich haben, und würde daher gegen die Natur der Sache verstoßen.

Betrachten wir eine große Anzahl von chemisch und physikalisch nahe stehenden Gliedern, so bemerken wir daß sie eine isomorphe Reihe bilden, welche von einer Symmetrie zu einer andern oder von einer Syngonie zu einer andern kontinuierlich übergeht, wie die oben genannten Platojodonitrite hinreichend beweisen. Durch Hinzukommen einer kleinen chemischen Veränderung bildet sich gewissermaßen, oder tritt eine Kraft hinein, welche den Isomorphismusgrad um ein wenig ändert; man könnte sie isomorphe Kraft nennen. Man würde besser eine solche Kraft morphotrope Kraft nennen, da sie nicht die gleiche Gestalt, sondern eine kleine Abänderung derselben zu erzeugen vermag. Und würde man auch eine isomorphe Reihe nur auf solche Glieder beschränken, welche der gleichen Symmetrie angehören, so müßte man in einer morphotropen Reihe alle jene Glieder zusammenfassen, welche untereinander isomorph sind, aber verschiedenen Symmetrien oder Syngonien angehören. Wir werden später von der Morphotropie zu reden haben.

Um zwei naheliegende Benennungen zu vermeiden, lassen wir dem Wort Isomorphismus die allgemeine Bezeichnung, welche sowohl isomorphe nach dem oben genannten Sinn als auch morphotrope Glieder begreift, falls sie chemissh und physikalisch recht nahe stehen. Isomorphe oder morphotrope Glieder müssen also einer Harmonie und einer Grundgestalt angehören. Die Grundgestalt richtet sich demnach nach der isomorphen resp. morphotropen Eigenschaft der Kristalle.

§ 137. Moleküle, Molekulargewicht, Äquivalentvolumen.

Von den verschiedenen Erscheinungen, welche zu Hilfe genommen werden, um eine isomorphe Reihe zu erforschen oder aufzustellen, ist die Größe und die Struktur der Kristallmoleküle von Wichtigkeit. Vor allem taucht die Frage auf, ob die chemischen Moleküle und die Kristallmoleküle sich vollständig decken. Natürlich versteht man unter chemischem Molekül dasjenige kleinste Teilchen, welches nicht weiter teilbar ist, ohne den chemischen Zustand selbst zu ändern. Unter Kristallmolekül muß das kleinste Teilchen verstanden werden, welches nicht mehr teilbar ist, ohne das Wesen des Kristalls zu zerstören; also stellt das Kristallmolekül noch immer denselben Kristall dar.

Wir wollen bei unserer Untersuchung von einer Annahme ausgehen, welche eigentlich bewiesen werden soll; wir wollen nämlich voraussetzen, daß das Kristallmolekül von dem chemischen Molekül verschieden ist. Das Kristallmolekül besteht also aus einer Anzahl $= \mu$ chemischen Molekülen; wenn wir daher das Kristallmolekül weiter teilen, so müssen wir schließlich das chemische Molekül erhalten.

Das spezifische Gewicht des Kristalls und seiner Moleküle sei S.

Wenn man nun mit Γ das Volumen der Kristallmoleküle bezeichnet, so wird das Gewicht eines Moleküls $S\Gamma$ sein. Wenn M das Molekulargewicht der chemischen Moleküle bedeutet, und da μ solcher Moleküle erforderlich

sind um ein Kristallmolekül zu bilden, so wird das Gewicht des letztern μM. Wir können also die Gleichung schreiben:

$$(45) \qquad S\Gamma = \mu M.$$

Wird nun irgend welches Volumen V des Kristalls ins Auge gefaßt, welches aus n Teilchen besteht, so wird das Gesamtgewicht des Kristalls vom Volumen V sowohl SV als auch $n\mu M$. Wir werden also wie früher haben

$$SV = n\mu M,$$

woraus folgt

$$(46) \qquad V = n\Gamma.$$

Die zwei Gleichungen (45) und (46) drücken aus, daß die Zwischenräume, welche zwischen den chemischen Molekülen in dem Kristallmolekül bestehen, nicht verschieden sein können von denjenigen Zwischenräumen, welche die Kristallmoleküle von einander trennen. Dasselbe Resultat würde sich ergeben, wenn wir von der Annahme ausgegangen wären, daß das chemische Molekül das Mehrfache des kristallinischen Moleküls ist. Es kann also kein Unterschied bestehen zwischen chemischen und kristallinischen Molekülen. Das geht übrigens aus der Annahme hervor, daß das chemische Molekül schon einen physikalischen Zustand ausdrückt, also schon ein kleines Kriställchen darstellt, das ebenso beschaffen sein muß wie der Kristall bei seinem Wachstum.

Wenn wir daher $\mu = 1$ setzen, so erhält man aus (45)

$$S\Gamma = M$$

und folglich

$$(47) \qquad \frac{M}{S} = \Gamma.$$

Man nennt Γ das Molekularvolumen der Substanz und folglich auch des Kristalls.

Es werden unter chemische Moleküle der festen Körper und ganz besonders der Kristalle manche Dinge verstanden. Man mißt z. B. das Molekulargewicht der in einer Lösung befindlichen Moleküle, und man behauptet, daß dieses Molekulargewicht dasjenige der Kristallmoleküle ist, welche in die Lösung übergegangen sind.

Wir können keinesfalls annehmen, daß die in der Lösung befindlichen Moleküle diejenigen des Kristalles seien. Wird nämlich der Kristall aufgelöst, so hört der Kristall auf zu existieren, und wir haben in den aufgelösten Molekülen zwar dieselbe chemische Zusammensetzung aber nicht dieselbe chemische Substanz, welche das Wesen des Kristalls ausmacht. — Man muß sagen, daß durch die Lösung eine Modifikation erhalten wird, welche, im allgemeinen, von derjenigen des Kristalls verschieden ist. Indem wir für Kalzit das Molekül so geschrieben haben: $CaCO^3$, und für Aragonit so: $Ca^2C^2O^6$, wollen wir ausdrücken, daß das chemische sowie das kristallographische Molekül in beiden Modifikationen des kohlensauren Kalkes verschieden ist.

Die Gleichung (45) hat offenbar Gültigkeit, wenn das Molekulargewicht auf das Gewicht des Wassermoleküls bezogen wird, so wie das spezifische Gewicht

auf das Gewicht des gleichen Volumen Wasser bezogen ist. Das geschieht gewöhnlich nicht, da die Molekulargewichte sowie die Atomgewichte der Elemente auf das Atomgewicht des Wasserstoffs bezogen werden. Um also die Gleichung (45) resp. (47) aufrecht zu erhalten, sollte man das gewöhnliche Molekulargewicht M durch 18 dividieren.

Das wahre Molekulargewicht sollte also darstellen

$$\frac{M}{18 \cdot S}.$$

Wir benützen das Molekulargewicht, um die Kristalle einer isomorphen Reihe miteinander zu vergleichen; dabei ist aber gleich, ob der Divisor 18 berücksichtigt wird oder nicht. Der Einfachheit wegen wollen wir ihn weglassen, dann aber

$$\Gamma \text{ d. h. } \frac{M}{S} \tag{48}$$

Äquivalentvolumen anstatt Molekularvolumen nennen.

§ 138. Isomorphe Reihen der chemischen Elemente.

Von einigen chemischen Elementen ist die Grundgestalt bekannt; man kann daher behaupten, daß dieselben gut bestimmt sind. Von den meisten chemischen Elementen aber ist die Grundgestalt nie beobachtet worden. Einige chemische Elemente sind flüssig bei gewöhnlicher Temperatur und Druck, andere sind gasförmig. Es wäre heutzutage unmöglich, isomorphe Reihen der chemischen Elemente aufzustellen, wollte man sich nur mit dem begnügen, was von ihnen im freien Zustande gegeben ist. Wir müssen infolgedessen induktiv vorgehen und den Grad des Isomorphismus der Elemente ableiten, indem die chemischen Verbindungen ins Auge gefaßt und der Isomorphismus derselben bestimmt werden. Dabei wird es erforderlich sein, an den einfachen chemischen Verbindungen festzuhalten, da solche Verbindungen schneller eine Veränderung erleiden werden als die komplizierten, wenn darin die Elemente ausgetauscht werden. Die hier gestellte Aufgabe wird noch lange nicht gelöst sein; die fleißige Forschung bringt immer wieder neue Beiträge, und wir können uns der Hoffnung hingeben, daß mit der Lösung dieser Aufgabe auch die der Beziehung zwischen Grundgestalt und chemischer Zusammensetzung gegeben sein wird.

In der folgenden Tabelle sind die isomorphen Reihen der Elemente zusammengestellt, wobei M das Molekulargewicht, S das spezifische Gewicht und Γ das Äquivalentvolumen bedeutet. Das Atomgewicht des Wasserstoffes ist $= 1$ angenommen.

1. Wasserstoff-Halogenreihe.

	M	S	Γ
Chlor Cl_2	70,36	1,470	47,87
Brom Br_2	158,68	3,187	49,74
Jod J_2	251,78	4,950	50,87
Fluor F_2	37,82	—	—
Wasserstoff H_2	2,—	—	—

2. Schwefelreihe.

	M	S	r
Schwefel S_8	254,60	1,957 (amorph)	130,10
		2,045	124,49
Selen Se_8	628,64	4,800	130,97
Tellur Te_m	m 126,73	6,200	m 20,44
Zinn (Stannijon) Sn_m . . .	m 118,10	?7,290	m 16,20

3. Antimon-Arsenreihe.

	M	S	r
Phosphor P_4	123,00	1,83—2,11—2,34	67,20—58,30 —52,56
Stickstoff N_4	42,60	—	—
Arsen As_4	297,80	5,73	51,97
Antimon Sb_4	477,08	6,70	84,28
Wismut Bi_4	206,54 × 4	9,80	84,28
Zinn (Stannijon) Sn_4	472,40	?7,29	64,80

4. Alkalireihe.

	M	S	r
Silber Ag	107,11	10,600	10,10
Lithium Li	6,97	0,590	11,81
Quecksilber Hg	198,50	13,600	14,60
Natrium Na	22,80	0,974	23,50
Ammonium NH_4	17,93	—	—
Kalium K	38,82	0,865	44,88
Cäsium Cs	131,89	2,400	54,95
Rubidium Rb	84,75	1,522	55,68

5. Kalk-Magnesiumreihe.

	M	S	r
Nickel Ni	58,30	8,90	6,55
Mangan Mn	54,57	8,00	6,82
Eisen (Ferrojon) Fe	55,47	7,88	7,04
Zink Zn	64,91	7,01	9,14
Magnesium Mg	24,10	1,75	13,77
Blei Pb	205,36	11,44	17,90
Kalzium Ca	39,76	1,58	25,20
Strontium Sr	86,95	2,54	34,20
Barium Ba	136,39	3,75	36,30

6. Kupferreihe.

	M	S	Γ
Kupfer *Cu*	63,12	8,90	7,09
Silber *Ag*	107,11	10,60	10,10
Gold *Au*.	195,74	19,33	10,12
Quecksilber (Merkurijon) *Hg*.	198,50	13,60	14,60
Thallium (Tallojon) *Tl* . . .	202,61	11,90	17,03
Blei *Pb*	205,36	11,40	18,01

7. Eisen-Magnesiumreihe.

	M	S	Γ
Beryllium *Be*	9,01	1,60	5,63
Nickel *Ni*	58,30	8,90	6,55
Mangan *Mn*	54,57	8,00	6,82
Kobalt *Co*	58,80	8,50	6,92
Eisen (Ferrojon) *Fe*	55,47	7,88	7,04
Kupfer (Cuprijon) *Cu* . . .	63,12	8,09	7,09
Chrom (Chromojon) *Cr*. . .	51,74	6,80	7,61
Zink *Zn*.	64,91	7,10	9,14
Wolfram *W*	182,60	19,13	9,54
Molybdän *Mo*.	95,26	9,01	10,57
Uran *U*	237,77	18,70	12,71
Cadmium *Cd*	111,55	8,60	12,97
Magnesium *Mg*	24,10	1,75	13,77
Quecksilber (Merkurijon) *Hg*.	198,50	13,60	14,60

8. Gold-Platinreihe.

	M	S	Γ
Ruthenium *Ru*	100,91	12,26	8,23
Osmium *Os*	189,55	22,48	8,43
Rhodium *Rh*	102,23	12,10	8,44
Iridium *Ir*	191,66	22,42	8,55
Palladium *Pd*.	106,00	11,08	9,00
Platin *Pt*	193,41	21,48	9,03
Gold *Au*.	175,74	19,33	10,12

9. Erdmetallreihe.

	M	S	Γ
Beryllium *Be*	9,01	1,60	5,63
Eisen (Ferrijon) *Fe*	55,47	7,88	7,04
Chrom (Chromijon) *Cr* . . .	51,74	6,80	7,61
Aluminium *Al*	26,91	2,70	10,35
Gallium *Ga*.	69,50	5,96	11,66

	M	S	Γ
Scandium Sc	47,78	3,50	12,80
Indium In	113,10	7,42	15,37
Thallium (Tallijon) Tl . . .	202,61	11,90	17,03
Ytterbium Yb	171,89	9,17	18,73
Wismution Bi	206,54	9,80	21,07
Zirkonium Zr	89,72	4,15	21,62
Titan Ti	47,79	—	—

10. Siliziumgruppe.

	M	S	I
Kohlenstoff C	11,91	3,52	3,38
Bor B	10,86	2,95	4,05
Mangan Mn	54,57	8,00	6,82
Molybdän Mo	95,26	9,01	10,57
Titan Ti	47,79	?	?
Silizium Si	28,18	2,49	11,32
Germanium Ge	71,93	5,47	13,15
Zirkonium Zr	89,72	4,15	21,62
Zinn (Stannijon) Sn	m(118,10)	7,29	m(16,20)

Diese zehn isomorphen Reihen der Elemente haben, wie bemerkt, lange nicht die Ansprüche ein vollkommenes System zu bilden. Es ist zu vermuten, daß die Metallelemente nicht in verschiedenen isomorphen Reihen auftreten dürfen, wie hier angeführt worden ist, d. h. daß sie nicht polymorph sondern monomorph seien; daß dagegen nur die Nichtmetallelemente isopolymorphe Reihen bilden. Allein es fehlen bis jetzt genügende Erfahrungsresultate um zu diesem Schluß zu kommen. Einige Elemente treten in verschiedenen isomorphen Reihen auf, die oben nicht angegeben sind. So z. B. Schwefel mit Chrom und Arsen; Silicium mit Titan und Zirkon u. a. m.

Die aufgeführten Molekulargewichte und Äquivalentvolumen sind relative Zahlen, welche einen vergleichenden Wert haben für die bestimmte isomorphe Reihe, auf welche sie sich beziehen. Sie sind also nicht Vergleichungszahlen von einer zu den andern Reihen.

Im allgemeinen sind zwei Glieder einer isomorphen Reihe um so mehr isomorph, je näher ihre Äquivalentvolumen kommen.

Von den isomorphen Reihen der Elemente ist noch anzuführen, daß sie in Gruppen teilbar sind; die Glieder einer Gruppe sind unter sich mehr isomorph als alle Glieder der betreffenden isomorphen Reihe. So gehören Chlor, Brom und Jod in eine isomorphe Gruppe, was auch das Äquivalentvolumen (50) angibt, während Fluor nur stellenweise mit den übrigen der 1. isomorphen Reihe isomorph aufzutreten scheint. Schwefel und Selen der 2. Reihe hängen mehr zusammen als mit Tellur und Zinn. Arsen und Antimon der 3. Reihe bilden Verbindungen, welche zuweilen mit denjenigen von Schwefel isomorph sind. Die 4. Reihe gibt hauptsächlich zwei isomorphe Gruppen, wovon die eine von

Silber bis Natrium, die andere von Kalium bis Rubidium geht. Die 5. Reihe zeigt auch eine ausgesprochene Teilung, welche einerseits die Elemente von Nickel bis Magnesium und andererseits von Blei bis Barium umfaßt. Auffallend ist hier, daß sowohl die 1. als die 2. Gruppe zwei verschiedene isomorphe Reihen bilden. In der 6. Reihe geht eine isomorphe Gruppe von Kupfer bis Gold, eine andere von Quecksilber bis Blei. Ziemlich regelmäßige isomorphe Gruppen bilden die Glieder der 7. Reihe, von Beryllium bis Chrom und von Zink bis Quecksilber, was in den Äquivalentvolumen ausgesprochen zu sein scheint. Die 8. Reihe spaltet sich wahrscheinlich in die zwei Gruppen von Ruthenium bis Iridium und von Palladium bis Gold. Die Verbindungen der 9. Reihe sind nicht ausreichend bekannt; hier scheint es, daß eine isomorphe Gruppe von Beryllium bis Gallium, eine zweite von Scandium bis Indium, dann ferner eine dritte von Thallium bis Titan gehe. In der 10. Reihe bilden isomorphe Gruppen Kohlenstoff und Bor, Mangan und Molybdän, endlich Titan bis Zinn.

§ 139. Isomorphe Reihen der einfachen Verbindungen.

Die einfachen chemischen Verbindungen sind im allgemeinen um so mehr untereinander isomorph, je größer die Analogie zwischen den chemischen Elementen ist, welche sie hervorrufen. Das ist auch begreiflich, da, wenn Elemente in einer chemischen einfachen Verbindung vertauscht werden, sie um so kleinere Veränderung hervorrufen werden, je mehr sie untereinander isomorph sind. Daher sind die einfachen Verbindungen viel mehr für die Bestimmung der isomorphen Reihen der Elemente geeignet als die komplizierten Verbindungen.

Die einfachen chemischen Verbindungen bestehen aus zwei Teilen, von denen der eine elektrisch positiv, der andere elektrisch negativ ist. Die komplizierten Verbindungen sind zwei-, drei- und mehrfache Verbindungen oder sind Mischungen. Die beiden Teile, aus welchen die einfachen Verbindungen bestehen, können sowohl Elemente als Radikale sein; wir nennen sie mit A und B. Wir wollen mit a und b das Vielfache bezeichnen, wie A und resp. B in der einfachen Verbindung eintreten. Sind nun zwei einfache Verbindungen gegeben

$$A^a B^b \quad \text{und} \quad A_1^{a_1} B_1^{b_1}$$

und sollen sie isomorph sein, so muß $a = a_1$ sowie $b = b_1$ sein. Dabei müssen A und A_1 sowie B und B_1 isomorph sein. Geht umgekehrt aus den Untersuchungen hervor, daß die zwei einfachen Verbindungen unter sich isomorph sind, so darf zurückgeschlossen werden, daß A und A_1 sowie B und B_1 isomorph sein müssen. Sind ferner

$$A^c B^d \quad \text{und} \quad A_1{}^c B_1{}^d$$

zwei einfache Verbindungen, so werden sie ebenfalls isomorph sein, was immer c und d seien.

Wir bringen nun einige isomorphe Reihen der einfachen Verbindungen, indem wir dabei der Ordnung der isomorphen Reihen der Elemente folgen und wieder unter den gleichen Zeichen ihre Molekulargewichte, spezifische Gewichte und Äquivalentvolumen angeben.

Die 1. isomorphe Reihe der Elemente liefert als einfache isomorphe Verbindungen die Halogenite, von denen folgende Reihen angeführt sein sollen:

		M	S	Γ
Sylvin	KCl	74,10	1,95	37,9
	KBr	118,16	2,67	44,2
	KJ	164,71	3,06	53,8
Salmiak	NH_4Cl	53,11	1,53	34,7
	NH_4Br	97,27	2,38	40,9
Chlorsilber	$AgCl$	142,29	5,55	25,6
Bromid	$AgBr$	186,45	6,35	29,3
Jodid	AgJ	233,00	5,60	41,6
	Cu_2Cl_2	98,30	3,68	53,40
	Cu_2Br_2	142,46	4,72	60,36
Marshit	Cu_2J_2	189,50	4,41	85,94
	$TlBr$	281,75	8,83	31,91
	$TlCl$	237,79	7,02	33,02
	TlJ	328,50	8,00	38,29

Von den in der 2. und 3. isomorphen Reihe angegebenen Elementen mögen folgende isomorphe Reihen einfacher Verbindungen angeführt werden:

	M	S	Γ
Millerit NiS	90,12	5,3	17,0
Nickelin $NiAs$	132,75	7,5	17,7
Breithauptit $NiSb$	177,59	7,6	23,4
Markasit FeS_2	119,11	4,8	24,8
Löllingit $FeAs_2$	204,37	7,4	24,9
Pyrit FeS_2	119,11	5,00	23,8
Smaltin $CoAs_2$	207,70	6,70	31,0
Chloanthit $NiAS_2$	207,20	6,60	31,4
Hauerit MnS_2	118,21	3,46	34,1
Auripigment As_2S_3	244,36	3,5	69,8
Stibnit Sb_2S_3	334,00	4,6	72,6
Bismutinit Bi_2S_3	508,54	6,5	78,2
Guanajuatit Bi_2As_3	636,43	6,6	96,4
Frenzelit Bi_2S_3	638,86	6,3	101,4

Als Beispiele isomorpher Verbindungen aus der 4. Reihe der Elemente mögen folgende angegeben sein:

	M	S	Γ
Hornsilber $AgCl$	142,29	5,55	25,6
Steinsalz $NaCl$	58,06	2,16	26,9
Salmiak NH_4Cl	53,11	1,53	34,7
Sylvin KCl	74,00	1,95	37,9
$LiNO_3$	67,39	2,33	28,9
$NaNO_3$	84,26	2,27	37,2
KNO_3	98,86	2,11	46,8
$CsNO_3$	192,31	4,05	47,48
$RbNO_3$	145,17	2,97	48,88
K_2SO_4	172,99	2,66	64,68
Rb_2SO_4	264,85	3,61	73,04
Cs_2SO_4	359,13	4,24	84,32
$(NH_4)_2SO_4$	131,21	1,77	73,89

Beispiele aus den in der 5. isomorphen Reihe angegebenen Elementen:

	M	S	Γ
CaO	55,64	3,18	17,46
SrO	102,93	4,61	22,36
BaO	152,27	4,98	28,05
Magnesit $MgCO_3$	82,53	3,0	27,5
Smithsonit $ZnCO_3$	123,34	4,3	28,7
Siderit $FeCO_3$	113,90	3,8	29,9
Rhodochrosit $MnCO_3$	113,00	3,4	33,2
Kalzit $CaCO_3$	98,19	2,7	36,3
Aragonit $Ca_2C_2O_6$	2 (98,19)	3,0	65,4
Strontianit $Sr_2C_2O_6$	2 (145,38)	3,7	78,6
Cerussit $Pb_2C_2O_6$	2 (263,79)	6,5	81,2
Witherit $Ba_2C_2O_6$	2 (194,81)	4,2	92,8
Anhydrit $CaSO_4$	135,11	2,98	45,25
Cölestin $SrSO_4$	182,03	3,96	46,04
Anglesit $PbSO_4$	300,71	6,20	48,50
Baryt $BaSO_4$	231,74	4,49	51,88
Forsterit Mg_2SiO_4	139,74	3,24	43,1
Tephroit Mn_2SiO_4	200,68	4,10	48,9
Fayalit Fe_2SiO_4	202,48	4,10	49,3
Olivin $FeMgSiO_4$	171,11	3,30	51,9

Aus diesen isomorphen Reihen geht hervor, daß *Ca* mit *Sr*, *Pb* und *Ba* nicht so nahe stehen, wie man bis jetzt angenommen hat. Desgleichen weicht *Ca* physikalisch und chemisch bedeutend ab von *Mg*, *Zn*, *Fe* und *Mn*, so daß die S. 275 und S. 277 angegebenen isomorphen Reihen der Kalzitoiden und der Aragonitoiden nicht als vollkommen richtig zu bezeichnen sind.

Beispiele für die 6. isomorphe Reihe der Elemente:

	M	*S*	*r*
Covellin CuS	94,94	3,8	25,0
Cinnabarit (Zinnober) HgS .	230,32	8,1	28,4

Einige der isomorphen Reihen, welche wir als Beispiele der 5. Reihe der Elemente angeführt haben, können auch als Beispiele für die 7. Reihe dienen. Wir fügen noch folgende hinzu:

	M	*S*	*r*
Beryllerde BeO	24,85	2,97	8,0
Zinkit (Rotzinkerz) ZnO . .	80,75	5,73	14,1
Wurtzit ZnS	96,73	4,0	24,2
Greenockit CdS	143,37	4,9	29,2

Beispiele für die in der 9. und 10. Reihe enthaltenen Elemente:

	M	*S*	*r*
Chromoxyd Cr_2O_3	98,26	5,0	19,6
Korund Al_2O_3	100,36	4,0	25,1
Hämatit Fe_2O_3	157,46	5,2	30,3
Ti_2O_3	142,10	4,0	37,3
Polianit MnO_2	86,25	5,0	17,2
Rutil TiO_2	79,47	4,2	18,9
Zirkon $\frac{1}{2}(ZrSi)O$	91,55	4,7	19,48
Molybdändioxyd MoO_2 . . .	128,60	6,4	19,88
Brookit TiO_2	79,47	3,9	20,4
Kassiterit SnO_2	149,78	7,0	21,4
Tridymit SiO_2	59,86	2,3	26,0
Thorit $\frac{1}{2}(ThSi)O_2$	162,45	5,4	30,80
Plattnerit PbO_2	238,9	8,5	20,11
Diaspor $H_2Al_2O_4$	60,11	3,30	18,2
Manganit $H_2Mn_2O_4$	88,01	4,34	20,3
Goethit $H_2Il_2O_4$	88,01	4,37	20,4

§ 140. Isomorphe Reihen der komplizierten Verbindungen.

Bei diesen Verbindungen ist die Vertauschung der Elemente mehrfach möglich, und entfaltet sich daher der Isomorphismus nach vielen Seiten.

Ein schönes Beispiel von isomorph zusammenhängenden Gliedern liefern die Alaune, wie die folgende Tabelle zeigt.

	M	S	Γ
$K_2Al_2(SO_4)_4 + 24 H_2O$ . . .	949,0	1,735	546,9
$Na_2Al_2(SO_4)_4 + 24 H_2O$. . .	916,8	1,667	549,9
$Am_2Al_2(SO_4)_4 + 24 H_2O$ . .	906,8	1,631	555,9
$Rb_2Al_2(SO_4)_4 + 24 H_2O$ . . .	1041,2	1,852	562,2
$Tl_2Al_2(SO_4)_4 + 24 H_2O$ . . .	1278,8	2,257	566,6
$Cs_2Al_2(SO_4)_4 + 24 H_2O$ . . .	1139,8	2,020	579,7
$(NH_3 \cdot CH_3)_2Al_2(SO_4)_4 + 24 H_2O$	934,8	1,661	596,2
$K_2Cr_2(SO_4)_4 + 24 H_2O$ . . .	1000,8	1,817	550,8
$Am_2Cr_2(SO_4)_4 + 24 H_2O$ . .	958,6	1,719	557,6
$Rb_2Cr_2(SO_4)_4 + 24 H_2O$ . . .	1093,0	1,946	561,7
$Tl_2Cr_2(SO_4)_4 + 24 H_2O$ . . .	1188,6	2,043	581,8
$Cs_2Cr_2(SO_4)_4 + 24 H_2O$. . .	1330,6	2,311	575,7
$K_2Fe_2(SO_4)_4 + 24 H_2O$ . . .	1006,2	1,806	557,7
$Am_2Fe_2(SO_4)_4 + 24 H_2O$ . .	964,0	1,713	562,8
$Rb_2Fe_2(SO_4)_4 + 24 H_2O$. . .	1098,4	1,916	573,3
$Tl_2Fe_2(SO_4)_4 + 24 H_2O$ . . .	1336,0	2,385	560,2
$Cs_2Fe_2(SO_4)_4 + 24 H_2O$ . . .	1194,0	2,061	579,3
$K_2Ga_2(SO_4)_4 + 24 H_2O$ . . .	1034,0	1,895	545,6
$Tl_2Ga_2(SO_4)_4 + 24 H_2O$. . .	1308,8	2,177	550,6
$Am_2Ga_2(SO_4)_4 + 24 H_2O$ . .	991,8	1,745	568,4
$Rb_2Ga_2(SO_4)_4 + 24 H_2O$. . .	1125,2	1,962	574,0
$Cs_2Ga_2(SO_4)_4 + 24 H_2O$. . .	1221,8	2,113	578,2
$Am_2In_2(SO_4)_4 + 24 H_2O$ . .	1078,8	2,011	536,5
$Cs_2In_2(SO_4)_4 + 24 H_2O$ . . .	1308,8	2,241	584,0
$Rb_2In_2(SO_4)_4 + 24 H_2O$. . .	1212,2	2,065	587,0

Die hier verzeichneten Alaune liefern eine zweifach isomorphe Reihe, da zwei Elemente darin vertauscht werden. Es ist hier auffallend, daß K mit Na vertauscht werden kann.

Schon aus diesem Beispiel ist zu ersehen, daß das Äquivalentvolumen Γ viel langsamer variiert als in einer einfachen Verbindung.

Die isomorphen Reihen der komplizierten Verbindungen entwickeln sich durch Vertauschung der Elemente einer isomorphen Reihe; gleichzeitig erfährt das Äquivalentvolumen eine kleine Änderung, im allgemeinen um so kleiner, je mehr zwei Verbindungen sich dem Isomorphismus nähern.

Bei diesen Verbindungen tritt aber noch der Umstand hinzu, daß zwei Glieder isomorph werden können durch Vertauschung von Elementen, welche unter sich gar nicht isomorph sind; und das wird um so eher möglich sein, je komplizierter die Verbindungen sind.

Das sehen wir besonders bei den folgenden isomorphen Reihen:

	M	S	r
Dinatriumsubphosphat $H_2Na_2P_2O_6 + 6H_2O$	323,9	1,840	170,6
Dinatriumpyrophosphat $H_2Na_2P_2O_7 + 6H_2O$	329,9	1,848	178,5
Tetranatriumsubphosphat $Na_4P_2O_6 + 10H_2O$	430,0	1,832	234,7
Tetranatriumpyrophosphat $Na_4P_2O_7 + 12H_2O$	446,0	1,824	244,5
$Na_2CrO_4 + 2H_2O$	196,2	2,78	70,6
Na_2SO_4	140,7	2,65	53,09
$NaNH_4CrO_4 + 2H_2O$ . . .	191,3	2,74	69,8
$NaNH_4SO_4 + 2H_2O$	171,5	2,51	68,2
Marialith $Na_4Al_3Si_9O_{24}Cl$	840,1	2,60	323,1
Meionit $Ca_4Al_6Si_6O_{25}$	884,2	2,62	337,5

Besonders bemerkenswert sind in dieser Beziehung die Feldspäthe, welche eine schöne isomorphe Reihe bilden und doch alle keine Ähnlichkeit in ihrer Zusammensetzung zeigen, da eben Na und K nicht isomorph sind:

	M	S	r
Orthoklas $(KAlSi_3O_8)_2$ . . .	548,2	2,56	21,0
Albit $(NaAlSi_3O_8)_2$.	516,6	2,60	20,4
Anorthit $(CaAl_2Si_2O_8)_2$ . . .	547,6	2,76	20,5

Wir sehen sogar, daß Albit und Anorthit fast gleiches Äquivalentvolumen besitzen, was heißen sollte, daß Albit mit Anorthit mehr isomorph ist als mit Orthoklas.

Nicht minder interessant ist folgende Reihe:

	M	S	r
Ammoniumplatinchlorid $(NH_4)_2PtCl_6$	446,0	4,58	97,3
Ammoniumsiliciumchlorid $(NH_4)_2SiCl_6$	277,0	2,56	108,2

Sowie die Reihe der Sulfate:

$Y_2(SO_4)_3 \cdot 8H_2O$	610,08	2,56	238,50
$Pr_2(SO_4)_3 \cdot 8H_2O$	712,28	2,82	252,67
$Nd_2(SO_4)_3 \cdot 8H_2O$	720,28	2,85	252,73
$Er_2(SO_4) \cdot 8H_2O$	764,28	2,73	279,85

In der organischen Chemie gibt es zahllose isomorphe Reihen, deren Glieder durch Hinzutreten anderer Radikale oder durch Vertauschung verschiedener nicht isomorpher Elemente ineinander übergehen.

§ 141. Polymorphe Körper.

Wenn dieselbe quantitativ chemische Zusammensetzung zwei oder mehrere chemisch und physikalisch verschiedene Zustände aufweist, so ist sie polymorph, S. 277. Es gibt polymorphe Körper sowohl bei den Elementen als auch bei den chemischen Verbindungen. Die polymorphen Körper werden sowohl durch ihr verschiedenes chemisches Verhalten als durch alle physikalischen Erscheinungen erkannt, also durch ihre Löslichkeit, durch das Schmelzen, durch das spezifische Gewicht und hauptsächlich durch die Grundgestalt, Harmonie und die optischen Erscheinungen.

Man unterscheidet nach O. Lehmann zwei Gruppen von Substanzen, welche nach zwei oder mehreren Modifikationen krystallisieren, die enautiotrope und die monotrope. Die erstern polymorphen Körper gestatten eine Umwandlung der verschiedenen Modifikationen ineinander in jedem Sinn, so daß bei gleichzeitiger Anwesenheit zweier Formen, welche sich berühren, die Überschreitung einer bestimmten Temperatur (normale Umwandlungstemperatur), die Umwandlung in dem einen Sinne (unter Wärmebindung), die Abkühlung unter dem gleichen Wärmegrad, die Umwandlung im entgegengesetzten Sinn (unter Wärmeentwicklung) hervorbringt; sie heißen darum auch umkehrbar.

Der Schwefel krystallisiert aus der geschmolzenen Masse oder aus heißen Lösungen in der β-Modifikation, welche sich beim Abkühlen mehr oder minder rasch in die α-Modifikation umwandelt, während umgekehrt letztere beim Erhitzen in die β-Modifikation übergeht. Der Schwefel ist daher in seiner α- und β-Modifikation ein umkehrbarer polymorpher Körper.

Sowie der Schwefel sind auch Zinn, salpetersaures Ammoniak, doppelchromsaures Kalium, Kupfervitriol, Eisenvitriol usw. umkehrbar.

Der Kohlenstoff (C), der kohlensaure Kalk, Al_2O_3, SbO_3, TiO_2, ... sind höchstwahrscheinlich umkehrbare Substanzen. Betrachtet man die gasförmigen, flüssigen und festen Aggregatzustände aller Körper, so sind sie in bezug auf diese drei Modifikationen umkehrbar.

Die monotropen Substanzen besitzen eine labile und eine stabile Modifikation, und die Umwandlung geschieht nur von der labilen zu der stabilen Modifikation; sie heißen darum auch nicht-umkehrbar.

Wird stark erhitzter geschmolzener Schwefel rasch abgekühlt, so erhält man die bekannte zähflüssige β-Modifikation. Mit der Zeit bilden sich nun in der Masse zweierlei Krystalle, eigentümlich gekrümmte einer γ-Modifikation und sphärolitische Gestalten. Bei Berührung gehen erstere rasch in letztere über. Beim Erwärmen verschwinden sie zuerst, besitzen also jedenfalls den niedrigeren Schmelzpunkt. Bringt man rhombischen Schwefel in Berührung mit der zähflüssigen Masse, so wächst auch dieser weiter in Form von fein verästelten und gekrümmten Krystallskeletten; indes sind seine Formen wohl zu unterscheiden von den der eben erwähnten labilen, namentlich wenn man schwach erwärmt, wodurch sie zu schönen großen Pyramidengruppen anwachsen, während die andern sich zu kleinen blätterartigen Krystallen ausbilden.

Benzophenon, Dibrompropionsäure, Hydrochinon, Pananitrophenol, Chlorzink usw. sind nicht-umkehrbare Substanzen.

Von den chemischen Elementen sind hauptsächlich die Nichtmetalle und die Halbmetalle polymorph, während die Metallelemente fast hauptsächlich monomorph selten dimorph oder gar trimorph sind. Es läßt sich vermuten, daß die Polymorphie der chemischen Verbindungen aus der Polymorphie der Nichtmetalle herrühre; allein der Beweis dafür ist noch nicht gegeben.

Schwefel ist septamorph und zwar:

α-Schwefel, viergliedrig.
β-Schwefel, viergliedrig (Mitscherlich, Lehmann)
γ-Schwefel, viergliedrig (Bruhns und Muthmann).
δ-Schwefel, sechsgliedrig (Muthmann).
ε-Schwefel, dreigliedrig, tafelartig (Engel).
ζ-Schwefel, dreigliedrig (Magnus).
η-Schwefel, existiert nur in Mischungen.

Der Selen ist tetramorph und zwar:

γ-Selen, sechsgliedrig, existiert nur mit der entsprechenden γ-Modifikation des Schwefels.
δ-Selen, sechsgliedrig, tafelartig und isomorph mit δ-Schwefel.
ζ-Selen, dreigliedrig und wahrscheinlich mit ζ-Schwefel isomorph.
η-Selen, sechsgliedrig und wahrscheinlich mit η-Schwefel isomorph.
(Muthmann).

Es scheint sogar, daß alle Modifikationen des Schwefels ebenso vielen Modifikationen des Selens entsprechen, von denen aber für Selen nur vier bekannt sind.

Das Arsen ist dimorph, nämlich:

Arsen, dreigliedrig.
Arsenolamprit, sechsgliedrig.

Das Antimon ist wahrscheinlich trimorph, nämlich:

α-Antimon, dreigliedrig.
β-Antimon, drei- und viergliedrig (Cooke).
γ-Antimon, sechsgliedrig (Durscher).

Das Wismut ist wahrscheinlich trimorph, davon aber nur die dreigliedrige Modifikation bekannt.

Der Kohlenstoff ist dimorph, nämlich:

Diamant, drei- und viergliedrig.
Graphit, sechsgliedrig.

Das Zinn ist trimorph, hiervon:

α-Zinn, viergliedrig.
β-Zinn, drei- und viergliedrig.
γ-Zinn, sechsgliedrig.

Man führt zwar an, daß Zinn als tetramorph anzusehen sei, aber diese Tatsache ist nicht sicher festgestellt.

Die Krystallisation des Stickstoffs ist nicht bekannt, ebensowenig die des Sauerstoffs. Die daraus entstehenden chemischen Verbindungen sind aber polymorph, was vermuten läßt, daß sowohl Stickstoff als auch Sauerstoff polymorph seien.

Dasselbe läßt sich von Chlor, Brom, Jod und Fluor sagen, da diese Elemente ebenfalls und zwar stets polymorphe Verbindungen erzeugen.

Als Beispiele von polymorphen Verbindungen mögen folgende dienen:

α-NH_4Cl . . . . drei- und viergliedrig.
β-NH_4Cl . . . . drei- und viergliedrig.

α-NH_4Br . . . . drei- und viergliedrig.
β-NH_4Br . . . . drei- und viergliedrig.

ZnS . . . . . . drei- und viergliedrig, Sphalerit.
ZnS . . . . . . sechsgliedrig, Wurtzit.
ZnS . . . . . . dreigliedrig.

FeS_2 . . . . . drei- und viergliedrig, Pyrit.
FeS_2 . . . . . drei- und viergliedrig, Markasit.

SiO_2 . . . . . dreigliedrig, Quarz.
SiO_2 . . . . . sechsgliedrig, α-Tridymit.
SiO_2 . . . . . sechsgliedrig, β-Tridymit.
SiO_2 . . . . drei- und viergliedrig, α-Cristobalit.
SiO_2 . . . . . viergliedrig, β-Cristobalit.
TiO_2 . . . . . viergliedrig, Rutil.
TiO_2 . . . . . viergliedrig, Anatas.
TiO_2 . . . . . viergliedrig, Brookit.
TiO_2 . . . . Edisonit.

Fe_2O_3 . . . . . dreigliedrig, Hämatit.
Fe_2O_3 . . . . . drei- und viergliedrig, Martit.
Fe_2O_3 . . . . Hafisiderit.

Al_2SiO_5 . . . . viergliedrig, Andalusit.
Al_2SiO_5 . . . . viergliedrig, Sillimanit.
Al_2SiO_5 . . . . viergliedrig, Cyanit.

KNO_3 . . . . . sechsgliedrig.
KNO_3 . . . . . sechsgliedrig.

K_2SO_4 . . . . . sechsgliedrig.
K_2SO_4 . . . . . sechsgliedrig.

Ferner nach B. Gossner:

$(NH_4)NO_3$ . . .
KNO_3 . . . . .
$CsNO_3$ . . . . .
$TlNO_3$ . . . . .
$RbNO_3$ . . . .
} mit 4 Modifikationen.

§ 142. Mischkristalle. Isomorphe Mischungen. Kristallverdünnung.

Es giebt zahllose Fälle, wo man mit Kristallen zu tun hat, deren physikalisches und chemisches Verhalten aus andern Kristallen abzuleiten ist, die gewissermaßen ihre Grenze bilden. Und man ist zu der Ansicht gekommen, daß diese dazwischen liegenden Kristalle keine chemischen Verbindungen sind, sondern Mischungen von Verbindungen, also Mischkristalle, gleichwie die mimetischen Kristalle und die Verwachsungen von Kristallen aller Art.

Wir müssen nun die Merkmale kennen lernen, die die Mischkristalle von den eigentlichen Kristallen unterscheiden, und wir werden sehen, daß während in vielen Fällen die Annahme von Mischkristallen durchaus berechtigt ist, in andern Fällen es doch zweifelhaft bleibt, ob Mischungen oder chemische Verbindungen vorliegen.

Mischkristalle werden sich bilden können, wenn zwei oder mehrere Kristallarten gleichzeitig und immer in demselben Verhältnis entstehen und fortwachsen. Die Bedingung dafür muß chemischer und physikalischer Natur sein. Also werden zwei oder mehrere Kristallarten sich zusammen bilden, wachsen und mischen, wenn ihr physikalisches und chemisches Verhalten dasselbe oder nahezu dasselbe ist, oder mit anderen Worten, verschiedene Kristallarten werden eine Mischung eingehen, hauptsächlich wenn sie isomorph sind, d. h. wenn ihr Isomorphismusgrad recht groß ist.

Somit mischen sich untereinander folgende Karbonate:

$$CaMg(CO^3)^2,$$
$$CaFe(CO^3)^2,$$
$$CaMn(CO^3)^2,$$
$$MgFe(CO^3)^2,$$

welche physikalisch und chemisch unter sich stark isomorph sind.

Auch folgende Karbonate mischen sich untereinander:

$$MgCO^3, \quad FeCO^3, \quad MnCO^3, \quad ZnCO^3, \ \ldots,$$

da sie auch unter sich stark isomorph sind.

Folgende Silikate gehen eine Mischung ein:

$$CaMg(SiO^3)^2 \text{ und } CaFe(SiO^3)^2,$$
$$MgSiO^3 \text{ und } (MgFe)SiO^3,$$
$$Mg^2SiO^4, \ (MgFe)^2SiO^4 \text{ und } Fe^2SiO^4 \text{ usw.},$$

sowie die Arsenmetalle

$$FeAs^2, \quad CoAs^2, \quad NiAs^2,$$

und unter sich auch:

Fe·SAs (Arsenkies), *NiSAs* (Wolfachit), *CoSAs* (Glaukodot).

Alle Vitriole mischen sich untereinander und in ganz beliebigem Verhältnis, sowie auch die Alaune.

Wenn zwei Kristalle sich innig und homogen untereinander mischen, so entsteht von beiden eine Verdünnung, wir wollen sie Kristallverdünnung nennen.

Sind nämlich v_1 und v_2 die Volumen der beiden die Mischung erzeugenden Bestandteile, und ist v das Volumen der Mischung, so beträgt die Verdünnung, welche der erstere Bestandteil durch die Mischung erfährt, offenbar $\frac{v_1}{v}$, denn die das Volumen v_1 einnehmende Materie dehnt sich bis auf $v = v_1 + v_2$ aus. Die Verdünnung des zweiten Bestandteiles wird $\frac{v_2}{v_1}$ sein; und das Verhältnis beider Verdünnungen wird sein $\frac{v_1}{v_2}$ resp. $\frac{v_2}{v_1}$.

Je größer der Isomorphismusgrad zweier Kristalle ist, um so mannigfaltiger wird das Verhältnis ihrer Verdünnungen $\frac{v_1}{v_2}$ sein; es kann kontinuierlich von 0 bis ∞ variieren. Das sehen wir z. B. bei den verschiedenen Vitriolen, bei den Alaunen usw. Es muß sich also der Grad des Isomorphismus auch aus der Fähigkeit der Kristallverdünnung ergeben.

Ist die Kristallverdünnung an enge Grenzen gebunden, so muß man daraus schließen, daß auch die sich verdünnenden Bestandteile wenig oder gar nicht isomorph sind; denn jede Zusammensetzung ist eben imstande, eine Verdünnung bei einem Kristall hervorzubringen, welche aber äußerst klein ist, wenn die Zusammensetzung mit dem Kristall gar nicht oder äußerst wenig isomorph ist. Diese Tatsache wiederholt sich in dem ganzen Mineralreich. Als Beispiel seien besonders die Feldspäte hervorgehoben.

Die chemische Zusammensetzung des Albits von Arendal kann so dargestellt werden:

$$\begin{array}{lllll} SiO^2 = 65{,}78 & + & SiO^2 = 0{,}88 & + & SiO^2 = 1{,}80 \\ Al^2O^3 = 18{,}55 & & Al^2O^3 = 0{,}75 & & Fe^2O^3 = 0{,}29 \\ Na^2O = 11{,}27 & & CaO = 0{,}41 & & CaO = 0{,}27 \\ \text{Summa } 95{,}60 & + & 2{,}04 & + & 2{,}36 \end{array}$$

und entspricht ungefähr:

$$\underset{\text{(Albit)}}{Na^2Al^2Si^6O^{16}} + \tfrac{1}{20}\underset{\text{(Anorthit)}}{CaAl^2Si^2O^8} + \{\tfrac{1}{2}\,CaO + \tfrac{1}{10}Fe^2O^3 + SiO^2\}.$$

Die letzte fremde Substanz ist dem Albit beigemischt, ohne daß sie mit dem Albit irgendwie isomorph sei. Aber diese Beimischung geht nie über eine recht kleine Grenze hinaus.

Der Feldspat vom Kyffhäuser, dessen Zusammensetzung folgende ist:

$$\begin{array}{llllll} SiO^2 & = 24{,}67 + & SiO^2 & = 21{,}78 + & SiO^2 & = 12{,}82 \\ Al^2O^3 & = 6{,}95 & Al^2O^3 & = 18{,}42 & Al^2O^3 & = 0{,}65 \\ (NaK)^2O & = 4{,}39 & \begin{pmatrix} Ca \\ Mg \\ Fe \end{pmatrix} O & = 10{,}32 & & \\ \text{Summe} & \overline{36{,}01} + & & \overline{50{,}52} + & & \overline{13{,}47}, \end{array}$$

kann dargestellt werden durch folgende Mischung:

$$\begin{pmatrix} Na \\ K \end{pmatrix}^2 \underset{\text{(Albit)}}{Al^2Si^6O^{16}} + 3 \begin{pmatrix} Ca \\ Mg \\ Fe \end{pmatrix} \underset{\text{(Anorthit)}}{Al^2Si^2O^8} + \{\tfrac{1}{10} Al^2O^3 + 2\,SiO^2\}.$$

Man sieht auch hier, daß dem Feldspat fremde Bestandteile beigemischt sind, welche aus Al^2O^3 und SiO^2 bestehen, die aber weder mit dem Albit noch mit dem Anorthit irgendwie isomorph sind. Die Verdünnung, welche der Feldspat dadurch erfährt, ist aber sehr klein; nur die Kieselsäure SiO^2 kann die Feldspäte ziemlich viel verdünnen, obwohl sie mit diesen nicht isomorph ist.

Wir wollen jetzt andere Beispiele herausgreifen. Die zwei Karbonate, deren Molekulargewicht, spezifisches Gewicht und Äquivalentvolumen folgende sind:

	M	S	Γ
$CaCO^3$	100	2,712	36,87
$MgCO^3$	84,5	3,017	28,01

mischen sich nicht in allen möglichen Verhältnissen, da ihr Isomorphismusgrad sehr klein ist. Das geht aus allen chemischen und physikalischen Erscheinungen hervor. Auch zwischen den Äquivalentvolumen beider Kristalle scheint ein größerer Unterschied zu herrschen als zwischen 36,87 und 28,01, da das Molekül des Magnesits nicht $MgCO^3$, sondern zweifach, dreifach usw. sein darf. Das Verhältnis ihrer gegenseitigen Verdünnungen bleibt deshalb auch auf enge Grenzen beschränkt. So kommt in $CaCO^3$ höchstens 2,5% $MgCO^3$, und in $MgCO^3$ höchstens 3,0% $CaCO^3$ vor.

Ebenso mischen sich die 2 Silikate

$CaSiO^3$ (Wollastonit)

und

$MgSiO^3$ (Enstatit)

nur in äußerst kleiner Menge.

Im Wollastonit kommt höchstens 0,6% von $MgSiO^3$ und im Enstatit höchstens 7,2% von $CaSiO^3$ vor.

Dieselbe Erscheinung wiederholt sich bei der Olivingruppe. In Forsterit Mg^2SiO^4 tritt höchstens 6,4% von Ca^2SiO^4 auf.

Die gegenseitige Verdünnung oder Mischungsfähigkeit wird aber vermehrt, wenn die chemische Konstitution der Bestandteile etwas Gemeinschaftliches

enthält und die Äquivalentvolumen nahezu gleich ausfallen. Somit mischen sich untereinander folgende Doppelkarbonate:

$$CaMg(CO^3)^2, \quad CaFe(CO^3)^2$$
$$CaMn(CO^3)^2, \quad MgFe(CO^3)^2.$$

Ebenso mischen sich die Doppelsilikate:

$$CaFe(SiO^3)^2 \text{ und } CaMg(SiO^3)^2,$$

sowie die Doppelnitrate:

$$KAg(NO^3)^2 \text{ und } KNa(NO^3)^2.$$

Aus der Fähigkeit zweier Kristalle, sich untereinander zu mischen, zeigt sich ob sie nahe oder weit isomorph sind. Und aus der Grenze ihrer Kristallverdünnung leitet sich somit ihr Isomorphismusgrad ab.

Ist der Isomorphismusgrad zweier sich gegenseitig verdünnender Kristalle ziemlich groß, so können wir auch zurück auf ihr Äquivalentvolumen schließen. Und aus dem Äquivalentvolumen läßt sich dann das Molekulargewicht bestimmen.

Wir können also mit Bestimmtheit sagen, daß Magnesiumkarbonat und Kalkkarbonat zwei verschiedenartige Moleküle besitzen. Schreibt man das eine in der Form

$$Mg^2(CO^3)^2$$

so muß das Molekül des Kalkkarbonates (als Calcit) eine andere Form haben, also z. B.:

$$CaCO^3 \text{ oder } Ca^3CO^3)^3 \text{ usw.}$$

Dann aber muß das Molekül der Doppelkarbonate sein

$$CaMg(CO^3)^2, \quad MgFe(CO^3)^2 \text{ usw.}$$

Eine Kristallverdünnung stellt sich als eine homogene Deformation dar. Eine homogene Deformation ist nämlich eine solche Verunstaltung, wo alle parallelen Vektoren verhältnismäßig gleich ausgedehnt werden. Auf diese Weise bleiben die parallelen Vektoren nach der Deformation unter sich physikalisch gleich, wie sie vor der Deformation waren. Daher ist eine Kristallverdünnung, eine homogene Mischung, genau wie eine Lösung, und deshalb wurde die Kristallverdünnung nach van 'tHoff auch feste Lösung genannt. Bei der Lösung ist das Molekül eine bestimmte einheitliche Größe; bei der Kristallverdünnung bleibt es eigentlich unbestimmt.

Eine Frage, welche für die Kristallverdünnung wichtig sein kann, ist die, ob ein Kristall durch einen isomorphen Kristall nach allen Richtungen gleich oder ungleich verdünnt wird.

Hat ein Vektor die Größe a und wird er nach der Verdünnung von der Größe $a' = \varepsilon a$, so heißt ε die lineare spezifische Verdünnung.

Die Frage ist nun die, ob die spezifische Verdünnung nach allen Richtungen gleich oder ungleich ist.

Wir wollen sie vorläufig ungleich annehmen.

Vereinfachen wir die Sache dadurch, daß die 3 Konstanten des Kristalles

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 90^\circ$$

seien. Das trifft annähernd sowohl für die drei- und viergliedrigen, als auch für die viergliedrigen Grundgestalten zu. Es sei wieder

$$a : b : c$$

das Achsenverhältnis, und es mögen ε_1, ε_2, ε_3 die spezifischen Verdünnungen der Strecken a, b, c sein. Da die Kohäsionsminima c_1, c_2 und c_3 sich umgekehrt verhalten wie die Achsenlängen, also (Gleichung (12), S. 59):

$$a : b : c = \frac{1}{c_1} : \frac{1}{c_2} : \frac{1}{c_3},$$

so werden

$$c_1' = \frac{c_1}{\varepsilon_1}, \quad c_2' = \frac{c_2}{\varepsilon_2}, \quad c_3' = \frac{c_3}{\varepsilon_3} \tag{49}$$

die Kohäsionsminima nach der Verdünnung bedeuten. Sie werden also kleiner, je größer die Verdünnung wird.

Das Volumen $abc = v_1$ wird nach der Verdünnung

$$v = abc \cdot \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3, \tag{50}$$

also ist

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 = \frac{v}{v_1} = 1 + \frac{v_2}{v_1}; \tag{51}$$

nämlich die spezifische Volumenverdünnung ist dem Verhältnis der Kristallverdünnung äquivalent.

Wenn nun diese Volumenverdünnung bekannt ist, was wir durch Messung erhalten werden, so besitzen wir auch das Mittel, die linearen spezifischen Verdünnungen zu berechnen.

Es seien φ_1, φ_2, φ_3 die Winkel, welche die Fläche (111) vor der Verdünnung mit den bezüglichen Flächen (100), (010), (001) einschließt; und es seien gleichfalls die betreffenden Winkel nach der Verdünnung bezw. φ_1', φ_2', φ_3' geworden.

Wir werden mit Leichtigkeit die Beziehung gewinnen:

$$\varepsilon_1 : \varepsilon_2 : \varepsilon_3 = \frac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi_1'} : \frac{\sin\varphi_2}{\sin\varphi_2'} : \frac{\sin\varphi_3}{\sin\varphi_3'}. \tag{52}$$

Wir können sie so schreiben:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \varepsilon_1 \\
\varepsilon_2 &= \frac{\sin\varphi_2}{\sin\varphi_2'} \cdot \frac{\sin\varphi_1'}{\sin\varphi_1} \cdot \varepsilon_1 \\
\varepsilon_3 &= \frac{\sin\varphi_3}{\sin\varphi_3'} \cdot \frac{\sin\varphi_1'}{\sin\varphi_1} \cdot \varepsilon_1.
\end{aligned}$$

Das Produkt derselben ist:

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 = \frac{v}{v_1} = \frac{\sin\varphi_2}{\sin\varphi_2'} \cdot \frac{\sin\varphi_3}{\sin\varphi_3'} \cdot \left(\frac{\sin\varphi_1'}{\sin\varphi_1}\right)^2 \cdot \varepsilon_1^3.$$

Daraus leiten wir ε_1 ab. Analog werden ε_2 und ε_3 berechnet.

Wir haben daher folgende Beziehungen für die linearen spezifischen Verdünnungen:

$$
(53)\quad \begin{cases}
\varepsilon_1 = \sqrt[3]{\dfrac{v}{v_1} \cdot \dfrac{\sin\varphi_2'}{\sin\varphi_2} \cdot \dfrac{\sin\varphi_3'}{\sin\varphi_3} \cdot \left(\dfrac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi_1'}\right)^2} \\
\varepsilon_2 = \sqrt[3]{\dfrac{v}{v_1} \cdot \dfrac{\sin\varphi_3'}{\sin\varphi_3} \cdot \dfrac{\sin\varphi_1'}{\sin\varphi_1} \cdot \left(\dfrac{\sin\varphi_2}{\sin\varphi_2'}\right)^2} \\
\varepsilon_3 = \sqrt[3]{\dfrac{v}{v_1} \cdot \dfrac{\sin\varphi_1'}{\sin\varphi_1} \cdot \dfrac{\sin\varphi_2'}{\sin\varphi_2} \cdot \left(\dfrac{\sin\varphi_3}{\sin\varphi_3'}\right)^2} .
\end{cases}
$$

Die Veränderungen, welche die Winkel φ_1, φ_2, φ_3 nach der Verdünnung erfahren, sind im allgemeinen sehr klein, wie groß auch die Verdünnung sein mag; sie sind um so kleiner, je mehr die sich verdünnenden Kristalle untereinander isomorph sind. Also folgt, daß für innig isomorphe Kristalle die spezifischen Verdünnungen ε_1, ε_2, ε_3 untereinander nahezu gleich sein werden.

Für nicht isomorphe Kristalle ist nur eine kleine Verdünnung möglich; also auch bei ihnen dürfen ε_1, ε_1, ε_3 nahezu untereinander gleich ausfallen. Das gilt für alle 4 Grundgestalten.

Wir stellen also den Satz auf:

Durch die Kristallverdünnung, mag sie isomorphe oder nicht isomorphe Kristalle betreffen, erfährt die Grundgestalt der Kristalle keine merkliche Veränderung.

Wenn also z. B. die Grundgestalt drei- und viergliedrig ist, so kann sie durch Verdünnung weder dreigliedrig noch viergliedrig werden; und wenn sie z. B. tafelartig ist, so kann sie nicht durch die erfolgte Verdünnung prismatisch werden, usw.

Ein ähnlicher Satz wurde auch bei den Kristallverwachsungen gefunden. Siehe § 125, S. 240. Ausnahmen werden wohl in der Natur vorkommen; sie verschwinden aber in der Mehrzahl der gleichmäßigen Erscheinungen.

Es gibt Kristalle, welche nur nach einer oder mehreren Beziehungen untereinander ähnlich sind. Sie können aber nicht isomorph sein, da sie in manchen Beziehungen weit voneinander sind. So z. B. verhalten sich die dreigliedrigen Kristalle

$$CaCO^3 \text{ und } MgCO^3.$$

Abgesehen daß bei den ersten derselben die Holoharmonie (63)[s] und bei den anderen die Hemiharmonie (63) auftritt, mischen sie sich auch nicht in jedem beliebigen Verhältnis, wie wir oben (S. 297) gesehen haben. Man kann solche Kristalle pseudoisomorph nennen. Sie erzeugen nur Doppelsalze, denn der Dolomit $CaMg(CO^3)^2$ ist nach Retgers ein Doppelsalz.

Die Grundgestalt des Dolomits ist dieselbe wie die des Kalzits und des Magnesits. Die Harmonie (63) des ersteren stimmt mit der Harmonie des Magnesits (63) überein. Es ist zu erwarten, aber nicht bewiesen, daß das Doppelsalz diejenige Harmonie annehmen wird, welche die niedrigste ist bei den einfachen Salzen, welche das Doppelsalz erzeugen. Daher wird sich der Dolomit eher mit dem Magnesit als mit dem Kalzit mischen.

Die schwefelsauren Salze

$$K_2SO_4 \quad \text{und} \quad Na_2SO_4$$

sind nach B. Gossner ebenfalls pseudoisomorphe Kristalle, da sie lediglich Doppelsalze bilden.

Auch die zwei Chloride

$$KCl \quad \text{und} \quad NaCl$$

veranlassen keine Mischung, sondern das Doppelsalz

$$KNa(Cl)^2.$$

Desgleichen sind die zwei salpetersauren Salze

$$KNO^3 \quad \text{und} \quad AgNO^3$$

nicht isomorph, obwol sie in manchen Beziehungen untereinander ähnlich sind. Sie mischen sich nicht innig und in jedem Verhältnis zusammen, sondern erzeugen das Doppelsalz

$$KAg(NO^3)^2$$

und wahrscheinlich noch andere Doppelsalze, die noch wenig bekannt sind.

Es kommt vor, daß die berechneten Konstanten mit der Annahme einer Mischung, und die gemessenen sich so wenig voneinander unterscheiden, daß es von wenig Belang ist, ob man ein Doppelsalz oder eine Kristallverdünnung annimmt. Das kommt z. B. bei den Doppelsalzen $(SO^4)^2K^3Na$ und $(CrO^4)^2K^3Na$ vor.

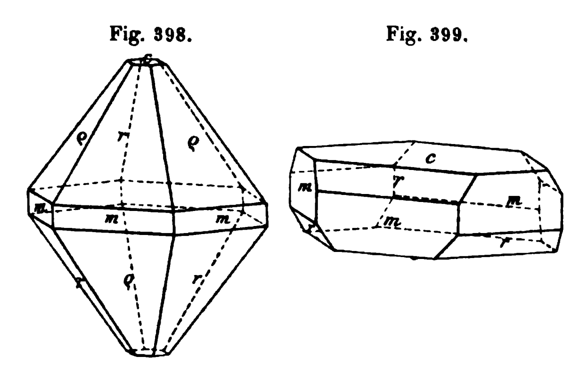


Fig. 398. Fig. 399.

In der folgenden Tabelle sind das Molekulargewicht, das spezifische Gewicht und das Äquivalentvolumen der einfachen Salze $(SO^4)^2K^4$ und $(CrO^4)^2K^4$ und der zwei Doppelsalze angegeben, wie sie B. Gossner angeführt hat.

	M	S	Γ berech.	Γ beob.
$(SO^4)^2K^4$	316,72	2,666	118,8	64,92 × 2
$(CrO^4)^2K^4$	356,80	2,741	130,2	70,39 × 2
$(SO^4)^2K^3Na$	300,62	2,697	111,5	122,42
$(CrO^4)^2K^3Na$	340,72	2,768	123,1	133,63

Die dreigliedrigen Kristalle sind in den Figg. 398 und 399 dargestellt.

	$(SO^4)^2K^4$	$(CrO^4)^2K^4$	$(SO^4)^2K^3Na$	$(CrO^4)^2K_3Na$
$\widehat{m:m}$ =	59° 36′	59° 19′	60° 0′	60° 9′
$\widehat{r:c}$ =	56 11	55 51	56 8	56 2
$\widehat{\varrho:c}$ =	56 26	55 50	56 8	56 2
$\widehat{\varrho:r}$ =	48 46	48 22	49 4	49 0
$\widehat{r:\varrho}$ =	49 12	—	49 5	49 0

Die Feldspatgruppe scheint auch hierher zu gehören. Die Feldspäte, welche sehr oft beobachtet werden, lassen sich folgenderweise darstellen, indem mit *Ab* der Albit und mit *An* der Anorthit bezeichnet wird:

1. Albit $= Ab$
2. Oligoklas-Albit $= 6 Ab + 1 An$
3. Oligoklas $= 7 Ab + 2 An$
4. Andesin $= 7 Ab + 5 An$
5. Labradorit $= 2 Ab + 3 An$
6. Bitownit $= 2 Ab + 7 An$
7. Anorthit $= An$

Nach G. Tschermak und C. Schuster sind die Feldspäte 2, 3, 4, 5, 6 isomorphe Mischungen von Albit und Anorthit. In der Tat lassen sich ihre physikalischen Verhältnisse aus den 2 Endgliedern ableiten. Andererseits, wie Fouqué hervorhob, kommen nicht alle möglichen Mischungen von Albit und Anorthit vor. Es scheint vielmehr, daß jeder der 7 Feldspäte sich recht wenig sowohl mit Albit als mit Anorthit mische, wie auch übrigens mit anderen fremden Substanzen, SiO^2, Al^2O^3, Fe^2O^3 usw. Dadurch wäre erklärlich, weshalb in der Natur hauptsächlich Feldspäte vorkommen, welche nahe den 7 Feldspattypen liegen, und sich beständig wiederholen. Wie dem aber auch sei, so haben wir bei den Feldspäten ein Beispiel, wo die Deutung der Erscheinungen sowohl durch die Annahme einer Mischung als auch durch die der chemischen Verbindung gegeben werden kann.

§ 143. Mimetische Mischungen. Razemische Verbindungen.

Zwei Kristalle, welche chemisch und physikalisch identisch sind, können doch voneinander verschieden sein, obwohl ihre Grundgestalt in jeder Beziehung dieselbe ist; sie haben nämlich eine verschiedene Harmonie. Werden sie, gleich orientiert, übereinander gelegt, so erzeugen sie dadurch eine höhere Harmonie, als sie allein besitzen; sind sie z. B. tetartoharmonisch, so werden sie hemiharmonisch, und sind sie hemiharmonisch, so erzeugen sie zusammen die Holoharmonie. Damit aber die Homogenität und die höhere Harmonie hervorgehen, müssen sie in gleichem Verhältnis beisammen sein, und homogen gemischt werden, was die größte Wahrscheinlichkeit für sich hat.

Solche Kristalle spielen dieselbe Rolle wie die isomorphen Kristalle, und ihre homogene Mischung ist gleichbedeutend mit einer isomorphen Mischung, d. h. einer Kristallverdünnung. Wir wollen sie in diesem speziellen Fall mimetische Mischung nennen. Siehe auch § 121, S. 235. Eine mimetische Mischung ist daher eine homogene Mischung von zwei chemisch und physikalisch identischen Kristallen, deren Harmonien sich zu einer höheren Harmonie ergänzen.

Sind z. B. beide Kristalle hemimorph, d. h. elektrisch aktiv, so ist die daraus sich ergebende mimetische Mischung holomorph, d. h. elektrisch inaktiv. Haben beide Kristalle das Drehungsvermögen nach links resp.

nach rechts, d. h. sind sie optisch aktiv, so verliert die daraus sich ergebende mimetische Mischung ihre Aktivität. Wirken beide drehenden Kristalle, (enantiomorphe Kristalle), auf die Polarisationsebene des Lichtes, sobald sie aufgelöst werden, so wird gar nicht auf das Licht eine Lösung wirken, welche die entsprechende mimetische Mischung aufgelöst enthält.

Zu den mimetischen Mischungen können Asparagin ($CONH_2 \cdot CH_2 \cdot CHNH_2 \cdot$ $\cdot CO^2H \cdot H_2O$), Cis-para-Camphansäure ($C_{10}H_{14}O_4$) gezählt werden. Von der letzteren Substanz ist nachgewiesen, daß sie chemisch und physikalisch genau dieselbe ist, mag sie aktiv oder inaktiv auftreten.

Die zwei aktiven Bestandteile, welche ein aktives kristallisiertes Produkt liefern, erscheinen nicht immer als mimetische Mischung, sondern als eine chemische Verbindung. Als Beispiel sei folgendes erwähnt.

Die links- resp. rechtsdrehende optisch aktive Weinsäure $C_4H_6O_6$ erzeugt die inaktive Traubensäure, auch razemische Säure (S. 200) genannt. Die Traubensäure ist aber keine homogene Mischung der zwei aktiven Weinsäuren links- und rechtsdrehend, sondern eine wirkliche chemische Verbindung mit bestimmtem Molekulargewicht. Das geht genügend hervor auch aus dem spezifischen Gewicht der beiden Säuren.

Eine Mischung von rechts- und von linksdrehendem weinsauren Natrium-Ammonium verwandelt sich bei 27°, nach J. H. van't Hoff, in das von A. Scacchi entdeckte traubensaure Salz $Na \cdot NH_4C_4H_4O_6 \cdot H_2O$ (auch Razemat genannt), welches inaktiv ist. Dieses ist jedoch nur bei den Temperaturen zwischen 27° und 36° beständig; oberhalb der letzteren findet Zerfall statt und zwar in Natriumrazemat und Ammoniumrazemat, die nebeneinander bei 40° auskristallisieren. Fig. 400 und 401 zeigen die erste, die Rechts-trans-para-Camphansäure $C_{10}H_{14}O_4 + H_2O$, nach F. St. Kipping und W. J. Pope, wie sie aus einer wässerigen Lösung auskristallisiert, und die andere die inaktive trans-para-Camphansäure $C_{10}H_{14}O_4 + H_2O$. Die Ausbildung beider ist gleich; die Verschiedenheit derselben geht aber aus den folgenden Winkeln hervor:

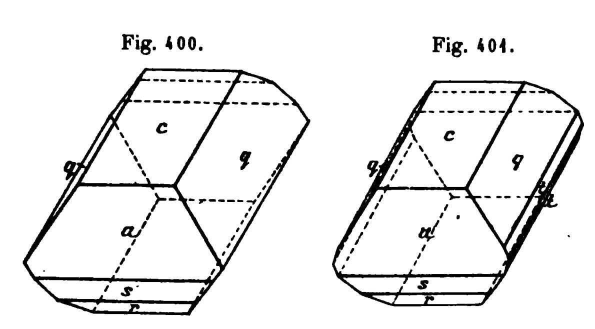


Fig. 400. Fig. 401.

	aktive Säure	inaktive Säure
$\widehat{cq}$	53°48′	53°18′
$\widehat{qq}$	72 24	73 24
$\widehat{ac}$	69 5	67 41
$\widehat{cv}$	44 32	46 48
$\widehat{cs'}$	72 24	75 12.

In neuester Zeit sind zahlreiche solche inaktive chemische Verbindungen zur Untersuchung gekommen, die man durchwegs razemische Verbindungen nennt, zum Unterschied von den gewöhnlichen Doppelverbindungen und den mimetischen Mischungen. Ein schönes Beispiel bietet die wasserfreie Para-Methoxymandelsäure. Die inaktive Säure wurde neulich von J. Baeyer in links- und rechtsdrehende wasserfreie Methoxymandelsäure gespaltet und von F. Zambonini kristallographisch untersucht. Die inaktive Säure ist schwerer (spez. Gew. 1,396) als die aktive (spez. Gew. 1,355). Beide kristallisieren sechsgliedrig tafelförmig. Ihre Fundamentalwinkel sind aber für beide bedeutend verschieden, wie folgt:

Winkel	inaktive Säure	aktive Säure
$(1000\widehat{\ }0100)$	120° 30′	109° 36′
$(1000\widehat{\ }0001)$	83 18	87 51
$(0100\widehat{\ }0001)$	83 18	87 51.

§ 144. Skalare Größen der Mischkristalle.

Die skalaren Größen werden, da sie von der Richtung unabhängig sind, skalar in den Mischkristallen bleiben, wie sie skalar in den einzelnen Bestandteilen sind. Um diese Aufstellung zu erklären, wollen wir das spezifische Gewicht einer Mischung betrachten. Es sei p das Gesamtgewicht einer Mischung; ferner seien p_1 und p_2 die Gewichte der einzelnen Bestandteile, welche die Mischung hervorbringen, also

$$p = p_1 + p_2 . \tag{54}$$

Wenn man nun mit V, V_1 und V_2 die Volumina der Mischung, resp. der Bestandteile bezeichnet, und wenn ferner S, S_1 und S_2 die spezifischen Gewichte derselben bedeuten, so folgt aus (54)

$$VS = V_1 S_1 + V_2 S_2$$

oder

$$S = \frac{V_1 S_1 + V_2 S_2}{V} . \tag{55}$$

Diese allgemeine Beziehung gilt natürlich in allen Fällen, möge es sich um eine Mischung oder um eine chemische Verbindung handeln.

Von einer Mischung behauptet man, daß die Summe der einzelnen Volumina gleich dem Volumen der Mischung sei, also

$$V = V_1 + V_2 . \tag{56}$$

Dagegen tritt in einer chemischen Verbindung Kontraktion oder Verdünnung ein und gilt daher nicht für sie die Gleichung (56), welche somit dem Wesen einer Mischung eigen ist.

Setzt man nun $V = 100$, also $V_2 = 100 - V_1$, so folgt aus (55)

$$S = \frac{S_1 - S_2}{100} V_1 + S_2 . \tag{57}$$

Will man die Bestandteile in Gewichtsprozenten (n_1 und $n_2 = 100 - n_1$) einführen, so wird man aus (57) erhalten

$$\frac{1}{S} = \frac{\frac{1}{S_2} - \frac{1}{S_1}}{100} \cdot n_1 + \frac{1}{S_1}. \tag{57a}$$

Nun versteht man unter v, v_1, v_2 die spezifischen Volumina, welche zu S, S_1 und S_2 umgekehrt proportional sind, also aus (57a) folgt noch:

$$v = \frac{v_2 - v_1}{100} \cdot n_1 + v_1. \tag{58}$$

J. W. Retgers hat diese Formel erschöpfend durch vielfache Versuche bestätigt.

Folgende Versuche mögen hier als Beispiel dienen.

Isomorphe Reihe von $K_2Al_2(SO_4)_4 \cdot 24\,H_2O$ Kaliumalaun,
$Tl_2Al_2(SO_4)_4 \cdot 24\,H_2O$ Thalliumalaun.

Zusammensetzung in Gewichts-Proz. Kaliumalaun	Spezifisches Volumen			Spezifisches Gewicht		
	berechnet	gefunden	Differenz	berechnet	gefunden	Differenz
0	—	0,4314	—	—	2,318	—
9,62	0,4448	0,4452	+ 0,0004	2,248	2,246	— 0,002
19,32	0,4583	0,4566	— 0,0017	2,182	2,190	+ 0,008
31,15	0,4748	0,4739	— 0,0009	2,106	2,110	+ 0,004
30,98	0,4751	0,4742	— 0,0009	2,105	2,109	+ 0,004
33,70	0,4785	0,4831	+ 0,0046	2,090	2,070	— 0,020
47,13	0,4970	0,4963	— 0,0007	2,012	2,015	+ 0,003
53,86	0,5063	0,5038	— 0,0025	1,975	1,985	+ 0,010
56,16	0,5097	0,5086	— 0,0011	1,962	1,966	+ 0,004
68,43	0,5269	0,5269	0	1,898	1,898	0
72,42	0,5325	0,5328	+ 0,0003	1,878	1,877	— 0,001
75,18	0,5365	0,5365	0	1,864	1,864	0
84,54	0,5494	0,5491	— 0,0003	2,820	1,821	+ 0,001
100,00	—	0,5708	—	—	1,752	—

Eine ähnliche Beziehung läßt sich auch für das spezifische Wärmevermögen herleiten. c, c_1, c_2 sollen die spezifischen Wärmevermögen der Mischung, resp. deren einzelner Bestandteile sein.

Es wird eine gewisse Wärmemenge K der Mischung zugeteilt, bis sie eine bestimmte Temperatur t erhält. Das kann offenbar auch auf die Art geschehen, daß eine Wärmemenge K_1 einem Bestandteile und eine Wärmemenge K_2 dem andern Bestandteile zugeführt wird. Und wir haben offenbar die zwei Gleichungen analog wie vorher:

$$p = p_1 + p_2 \tag{59}$$

und

(59) $$K = K_1 + K_2 .$$

Die zweite Gleichung drückt die Eigentümlichkeit einer Mischung aus.

Da nun, abgesehen von der Erhöhung der Temperatur

$$K = pc, \quad K_1 = p_1 c_1 , \quad K_2 = p_2 c_2$$

ist, so erhält man

(60) $$c = \frac{p_1 c_1 + p_2 c_2}{p},$$

oder, wenn wir noch $p = 100$ setzen:

(60a) $$c = \frac{c_1 - c_2}{100} p_1 + c_2 .$$

Für jede andere skalare Größe können wir dieselbe Methode einschlagen und zu demselben Resultat gelangen.

Wenn eine isomorphe Mischung recht viele Glieder aufweist, so wird eine große Anzahl von Beobachtungen schließlich die Beziehung zum Vorschein bringen, welche zwischen skalaren Größen der Mischungen und den Bestandteilen bestehen; ein Vergleich zwischen den Beobachtungen und den aus Gleichung (57) oder (60) erhaltenen Werten wird schließlich das Endresultat nachweisen, ob man es mit Mischungen oder mit chemischen Verbindungen zu tun hat. Man kann daher den Schluß ziehen, daß die skalaren Größen vollständig genügen, um mit Sicherheit, immerhin innerhalb gwisser Grenzen, die isomorphen Mischungen von den chemischen Verbindungen zu unterscheiden. Dabei kommt natürlich der Umstand nicht in Betracht, daß die Mischung der einzelnen Bestandteile nach einem bestimmten Gesetze vor sich gehen muß; denn die zwei Gleichungen (56) und (59) sind an keine Bedingung gebunden.

§ 145. Vektoriale Größen der Kristallverdünnungen.

Die vektorialen Größen sind gegenüber den skalaren Größen an Richtungen oder besser gesagt an Vektoren gebunden; daher ist zu erwarten, daß die vektorialen Größen einer homogenen Mischung, als Resultanten der vektorialen Größen der Bestandteile, von dem Gesetz abhängig sein müssen, nach welchem die Verdünnung vor sich geht, während die skalaren Größen lediglich von dem Verhältnis der Verdünnungen abhängig sind.

Für die Bestimmung der vektorialen Größen einer Mischung muß also die Orientierung der die Mischung eingehenden Bestandteile gegeben sein. Es ist Aufgabe der physikalischen Kristallographie, die Mittel anzugeben, um in jedem einzelnen Fall die vektorialen Größen einer Mischung zu bestimmen. Wir wollen hier nur einige Fälle in Betracht ziehen.

Die Hauptminima der Kohäsion für zwei Bestandteile, welche in irgend welchem Verhältnisse eine Mischung hervorrufen, mögen sein

c_1', c_2', c_3' für den einen
c_1'', c_2'', c_3'' » » zweiten.

Es handelt sich darum, die Hauptminima der Kohäsion für die Mischung zu bestimmen, welche wir mit c_1, c_2, c_3 bezeichnen wollen. Indem wir ε', ε'' die linearen spezifischen Verdünnungen nach den Richtungen c_1', c_2', c_3', resp. c_1'', c_2'', c_3'' nennen, können wir die Größen von c_1', c_2', c_3', c_1'', c_2'', c_3'' berechnen, welche sie erreichen, nachdem die Verdünnung zustande kam. Sie werden natürlich auf folgendes reduziert:

$$\varepsilon' c_1', \quad \varepsilon' c_2', \quad \varepsilon' c_3'$$
$$\varepsilon'' c_1'', \quad \varepsilon'' c_2'', \quad \varepsilon'' c_3''.$$

Die Größe c_1 wird die Resultante von $\varepsilon' c_1'$ und $\varepsilon'' c_1''$ sein; und da der Winkel zwischen beiden sehr klein ist, so kann man schreiben

$$c_1 = \varepsilon' c_1' + \varepsilon'' c_1''. \tag{61}$$

Nun ist sehr nahe

$$\varepsilon' = \sqrt[3]{\frac{v_1}{v}} \quad \text{und} \quad \varepsilon'' = \sqrt[3]{\frac{v_2}{v}}, \tag{62}$$

wo v_1 und v_2 die Volumenverhältnisse beider Bestandteile bedeuten und $v = v_1 + v_2$. Wir erhalten also:

$$\left\{\begin{aligned} c_1 &= \sqrt[3]{\frac{v_1}{v}} \cdot c_1' + \sqrt[3]{\frac{v_2}{v}} \cdot c_1'' \\ c_2 &= \sqrt[3]{\frac{v_1}{v}} \cdot c_2' + \sqrt[3]{\frac{v_2}{v}} \cdot c_2'' \\ c_3 &= \sqrt[3]{\frac{v_1}{v}} \cdot c_3' + \sqrt[3]{\frac{v_2}{v}} \cdot c_3''. \end{aligned}\right. \tag{63}$$

Aus diesen Beziehungen ist zu ersehen, daß die Verhältnisse

$$c_1 : c_2 : c_3$$

nicht weit verschieden sein werden von den resp. Verhältnissen

$$c_1' : c_2' : c_3' \quad \text{oder} \quad c_1'' : c_2'' : c_3'',$$

was soviel heißt, als daß die Grundgestalt der Mischung zwischen denjenigen der Bestandteile liegen wird.

Bei den meisten vektorialen Größen kommt hauptsächlich die Größe der Geschwindigkeit, mit welcher eine gewisse Erscheinung vor sich geht, in Betracht.

Setzt sich die Bewegung mit der Geschwindigkeit v fort, wobei die Masse μ in der Zeiteinheit in Anspruch genommen wird, so ist die gesamte der in der Zeiteinheit sich angesammelte Arbeitsmenge proportional zu μv^2. Diese Arbeitsgröße längs einer Richtung in der Kristallmischung kann erhalten werden, wenn die Bewegung getrennt in die beiden die Mischung bildenden Bestandteile eingeleitet wird. Sind in derselben v_1 und v_2 die Geschwindigkeiten der Bewegung nach derselben Richtung gerechnet und μ_1 und μ_2 die bewegenden Massen, so werden die partiellen Arbeitsgrößen proportional zu $\mu_1 v_1^2$ resp. $\mu_2 v_2^2$ sein. Die Summe beider setzt genau die Arbeit μv^2 zusammen.

Es besteht also für eine isomorphe Mischung

$$\mu v^2 = \mu_1 v_1{}^2 + \mu_2 v_2{}^2. \tag{64}$$

Wir wollen diese Regel auf zwei Erscheinungen anwenden, nämlich auf diejenigen des Schalles und die des Lichtes.

Bedeutet v_1 und v_2 die Geschwindigkeit des Schalles in den beiden Bestandteilen und v die in der Mischung, so werden μ, μ_1, μ_2 die Massen bedeuten, bezw. der Mischung und der Bestandteile, welche die Mischung homogen zusammensetzen. Man kann sie proportional den Gewichten setzen; sind letztere p, p_1, p_2, so wird $p = p_1 + p_2$ und die obige Regel für den Schall:

$$p v^2 = p_1 v_1{}^2 + p_2 v_2{}^2 \tag{65}$$

wird sein; also:

$$v^2 = \frac{p_1 v_1^2 + p_2 v_2^2}{p_1 + p_2}. \tag{65a}$$

Handelt es sich um die Erscheinung des Lichtes, so wird die vorhergehende Beziehung nur annähernd gelten. Für das Licht ist die Geschwindigkeit umgekehrt proportional der Lichtbrechung. Wird diese r, r_1, r_2 für die Mischung und bezw. für die Bestandteile genannt, so wird man haben

$$\frac{\mu}{r^2} = \frac{\mu_1}{r_1{}^2} + \frac{\mu_2}{r_2{}^2}.$$

Hier läßt sich aber μ, μ_1 und μ_2 nicht proportional den Gewichten p, p_1, p_2 (§ 144) setzen, da μ, μ_1, μ_2 für das Licht die Massen des Äthers bedeuten. Die Formel

$$\frac{p}{r^2} = \frac{p_1}{r_1{}^2} + \frac{p_2}{r_2{}^2} \tag{66}$$

kann daher für das Licht nicht streng richtig sein. Eine ähnliche Regel läßt sich für die homogenen Deformationen ableiten.

§ 146. Beziehung zwischen chemischer Zusammensetzung und Grundgestalt. Tschermaksche Regel.

Folgende Regeln lassen sich aufstellen:

1. Die chemischen Elemente folgen nicht einer bestimmten Grundgestalt. Sie können drei- und viergliedrig, viergliedrig, dreigliedrig und sechsgliedrig sein. Auch einfache Verbindungen, welche die Formeln BA_4, BA_3 oder BA_6 nicht aufweisen, folgen nicht einer bestimmten Grundgestalt, und sie sind auch oft polymorph, z. B.

   AgJ, sechsgliedrig und drei- und viergliedrig.
   ZnS, drei- und viergliedrig, sechsgliedrig, dreigliedrig.
   Cu_2S, sechsgliedrig, drei- und viergliedrig.
   HgS, sechsgliedrig, dreigliedrig, drei- und viergliedrig.
   FeS_2, drei- und viergliedrig.
   TeO_2, viergliedrig, sechsgliedrig.
   SiO_2, dreigliedrig (Quarz), sechsgliedrig (Tridymit), drei- und viergliedrig, viergliedrig.

SnO_2, viergliedrig (Cassiterit), sechsgliedrig.
MnO_2, viergliedrig (Polianit) und (Pyrolusit) usw.

2. Diejenigen chemischen Verbindungen, welche in der Formel BA_3 untergebracht werden können, gehören meistens der dreigliedrigen Grundgestalt an, seltener kristallisieren sie auch in der drei- und viergliedrigen Grundgestalt. z. B.:

Al_2O_3, dreigliedrig (Korund).
Fe_2O_3, dreigliedrig (Hämatit), drei- und viergliedrig (Martit).
$NaClO_3$, dreigliedrig, drei- und viergliedrig.
$NaBrO_3$, dreigliedrig, drei- und viergliedrig.
$LiNO_3$, dreigliedrig, drei- und viergliedrig.
$3\,AlH_2O_2 \cdot KS_2O_3$, dreigliedrig (Alunit).
$3\,AgS \cdot Sb$, $3\,AgS \cdot As$ } dreigliedrig (Rotgiltigerz).
$FeCl_3$, dreigliedrig.
$3\,CsCl \cdot As_2Cl_3$, dreigliedrig.
$SO_4 \cdot (3\,C_2H_5 \cdot Sn)_2$, dreigliedrig.
$3\,C_6H_5 \cdot COH$, dreigliedrig.
$3\,C_6H_5 \cdot CBr$, dreigliedrig.
$3\,CNO \cdot (C_2H_5)_2H$, dreigliedrig.

Äußerst selten kristallisieren die BA_3-Verbindungen nach der sechsgliedrigen Grundgestalt. z. B.:

$CaCO_3$, dreigliedrig (Calcit), sechsgliedrig (Aragonit).
$MgCO_3$, dreigliedrig (Magnesit), sechsgliedrig.
$LiNO_3$, sechsgliedrig.
KNO_3, dreigliedrig, sechsgliedrig (Salpeter).

3. Diejenigen chemischen Verbindungen, welche in die Formel BA_4 untergebracht werden können, kristallisieren meistens nach der viergliedrigen Grundgestalt; selten stellt sich auch die drei- und viergliedrige ein, z. B.:

Sn_2O_4, viergliedrig (Zinnerz).
Ti_2O_4, viergliedrig (Rutil).
$SiZrO_4$, viergliedrig (Zirkon).
$4\,WO_3 \cdot Na_2O \cdot 10\,H_2O$, viergliedrig.
$4\,WO_3 \cdot Rb_2O \cdot 8\,H_2O$, viergliedrig.
$4\,S_2O_3(NH_4)_2 \cdot CuNH_4Cl_2$, viergliedrig.
$4\,NH_4 \cdot SO_4Ag_2$, viergliedrig.
Fe_3O_4, drei- und viergliedrig.
CBr_4, drei- und viergliedrig.
$4\,C_3H_5O_2 \cdot Ca^2 \cdot 2\,C_3H_5O_2 \cdot Sr$, viergliedrig.
$4\,C_3H_5O_2 \cdot Ca_2 \cdot 2\,C_3H_5O_2 \cdot Pb$, viergliedrig.
$4\,CH_3 \cdot HJ$, viergliedrig.
$4\,C_2H_5 \cdot NJ$, viergliedrig.

$4\,C_2H_5 \cdot NJ_3$, viergliedrig.
$4\,C_6H_5 \cdot Si$, viergliedrig.
$4\,C_6H_4 \cdot COO \cdot 2\,CHCl_3$, viergliedrig.

4. Manche der viergliedrigen kristallisierten Verbindungen ergeben die Vierzahl nur dann, wenn man sie nicht als Molekularverbindungen, sondern als einfache Verbindungen auffaßt, wie z. B.

$Cl_4 \cdot AuNH_4$.
$Cl_4 \cdot Hg \cdot 2NH_4$.
$Cl_4 \cdot Cu \cdot 2\,NH_4$.

5. Diejenigen chemischen Verbindungen, welche in der Formel BA_6 untergebracht werden können, kristallisieren hauptsächlich nach der sechsgliedrigen Grundgestalt, z. B.:

$12\,H_2O \cdot PtClMg$.
$12\,H_2O \cdot VO_4NO_3$.
$12\,H_2O \cdot 3\,SO_4Na_2SO_4Li_2$.
$6\,H_2O \cdot PtCl_6Ni$.
$6\,H_2O \cdot SnF_6Mg$.

Die Anomalien von diesen Tschermakschen Regeln beruhen meistens darauf, daß von vielen Verbindungen das richtige Molekulargewicht nicht bestimmt ist. Auch kann man noch nicht vollständig die Grundgestalten aller chemischen Verbindungen übersehen, und daher nicht kontrollieren, inwiefern diese Tschermaksche Regel zutreffend ist.

Gilt die Tschermaksche Regel für die einfachen Kristalle, so muß sie auch für die isomorphen Mischungen zutreffen, da diese keine andere Grundgestalt hervorzubringen vermögen, als diejenige ist, welche den Bestandteilen der Mischung zukommt.

Die Regel, daß die Verbindungen

$$BA_4\,, \quad BA_3\,, \quad BA_6$$

hauptsächlich den viergliedrigen, dreigliedrigen und sechsgliedrigen Grundgestalten entsprechen sollen, erregt die Vermutung, daß diese Grundgestalten nicht von dem Bestandteile B, sondern von dem Bestandteile A abhängig gemacht werden könnten; es sollen also Al_2O_3, Fe_2O_3, $CaCO_3$ usw. dreigliedrig sein nicht wegen Al_2, Fe_2, CCa, sondern wegen O_3; Sn_2O_4, Ti_2O_4, $SiZrO_4$ usw. viergliedrig nicht wegen Sn_2, Ti_2, $SiZr$, ... sondern wegen O_4; $Ca_2C_2O_6$, $Sr_2C_2O_6$ usw. sechsgliedrig nicht wegen Ca_2C_2, SrC_2 usw., sondern wegen O_6 usw. Wir kommen somit zu einer chemisch-physikalischen Beziehung von größtem Interesse, die aber noch durch Erfahrungen und Untersuchungen festgestellt werden muß.

Der Sauerstoff spielt bei allen diesen chemischen Verbindungen dieselbe Rolle wie der polymorphe Schwefel. Eine analoge Bedeutung scheint auch dem Wasser bei den wasserhaltigen Salzen zuzukommen.

§ 147. Isopolymorphe Körper.

Ist eine isomorphe Reihe gegeben, z. B.

$$A, \ B, \ C, \ D, \ \ldots Z$$

und ist der Isomorphismusgrad zwischen den einzelnen Gliedern nach derselben Ordnung, nach welcher die Glieder genannt sind, festgestellt; ist ferner das Glied A mit einem Glied A' dimorph, so ist eine zweite isomorphe Reihe vorhanden:

$$A', \ B', \ C', \ D', \ \ldots Z',$$

in der die entsprechenden Glieder mit den gleichbenannten Gliedern der ersten isomorphen Reihe dimorph sind. Man nennt nun die Glieder der ersten Reihe isopolymorph mit den Gliedern der zweiten Reihe.

Das Vorhandensein von zwei so kompleten isopolymorphen Reihen ist die Ergänzung des Haüyschen Gesetzes. Denn sind A, B, C, D, ... Z chemisch und physikalisch nahe verwandt, und existiert eine zweite Modifikation A' von A, so wird diese einer nahestehenden Substanz entsprechen, welche B' sein wird; und diese wird ebenfalls einer Substanz nahestehen, welche die zweite Modifikation von C sein wird usw.

Allerdings hat selten die Erfahrung zwei isopolymorphe Reihen gezeigt, wie sie in idealer Weise oben zusammengestellt sind. Manchmal liegt ein Glied der zweiten Reihe nur in einer isomorphen Mischung vor und kann daher seine Existenz bloß vermutet werden.

Jede Modifikation ist durch ihren Umwandlungspunkt festgestellt. Derselbe bezieht sich auf Temperatur und Druck, wodurch die betreffende Modifikation ihre Existenz erreicht.

So sind die zwei isopolymorphen von W. Muthmann vervollständigten Reihen des Schwefels und Selens ebenfalls nicht vollständig bekannt.

Ein schönes Beispiel von isopolymorphen Reihen geben die Nitrate der Alkalien, bei denen zwar einige Glieder unbekannt sind, aber doch mehrere in den isomorphen Mischungen unzweifelhaft angenommen werden müssen.

In der folgenden Tabelle sind nach B. Goßner die vier Modifikationen der isomorphen Nitrate zusammengestellt, mit ihren entsprechenden Umwandlungspunkten angegeben durch die Temperatur und 1 Atmosph. Druck.

	α-Modifikation sechsgliedrig	β-Modifikation sechsgliedrig	γ-Modifikation sechsgliedrig	δ-Modifikation drei- u. viergliedrig
$NH_4 \cdot NO_3$	bis 32,4°	bis 82,8° und in isomorphen Mischungen mit KNO_3	bis 125,6°	über 125,6°

	α-Modifikation sechsgliedrig	β-Modifikation sechsgliedrig	γ-Modifikation sechsgliedrig	δ-Modifikation drei- u. viergliedrig
$K \cdot NO_3$	in isomorphen Mischungen mit $NH_4 \cdot NO_3$	bis 126°	über 126°	nicht beobachtet
$Cs \cdot NO_3$	—	—	bis 161°	über 161°
$Tl \cdot NO_3$	—	bis 80°	bis 151°	über 151°
$Rb \cdot NO_3$	—	—	bis 161,4°	über 219°

Liegen solche isopolymorphe Reihen vor, so ist die Begrenzung des Isomorphismus zwischen NH_4, K, Cs, Tl, Rb unzweideutig gegeben.

Andere schöne Beispiele liefern die Vitriole, von denen folgende angeführt sein mögen:

	viergliedrig α-Modifikation	viergliedrig β-Modifikation
$MgSO_4 \cdot 7\,H_2O$	Epsomit	vorhanden
$ZnSO_4 \cdot 7\,H_2O$	Goslarit	»
$NiSO_4 \cdot 7\,H_2O$	Morenosit	»
$CoSO_4 \cdot 7\,H_2O$	vorhanden	Bieberit
$FeSO_4 \cdot 7\,H_2O$	Tauriscit	Melanterit
$MnSO_4 \cdot 7\,H_2O$	vorhanden	Mallardit

§ 148. Kristallwasser.

Es gibt verschiedenartige Kristalle, welche durch Erhitzen oder durch andere Wirkung, wie z. B. Druckverminderung oder Aussaugung, Wasser abgeben.

Das Bittersalz $MgSO_4 + 7\,H_2O$ verliert $6\,H_2O$, wenn es der trockenen Luft ausgesetzt wird. Der Gips $CaSO^4 + 2\,HO^2$ verliert durch Erwärmung auf 100 bis 200° C. sein Wasser; durch Befeuchten entsteht wiederum Gips.

Das aus den Kristallen entweichende Wasser hat in den Kristallen verschiedenes Verhalten.

Erhitzt man das Salz $BaCl^2 \cdot (H^2O)^2$, so steigt auch seine Temperatur, und zwar im Anfang ziemlich schnell, später aber langsam. Erreicht die Temperatur des Salzes 105° bei 1 Atmosphäre, so bleibt sie stehen, wiewohl dem Salz Wärme zugeführt wird. Letztere wird zum Verdampfen eines Moleküls H_2O verwendet. Ist das erste Molekül H_2O entwichen, so steigt die Temperatur unter Zuführung von Wärme. Erst bei 162° C. bleibt sie wieder stehen, was wiederum die zugeführte Wärme für die Umwandlung des Wassers in Wasserdampf bedeutet. Es wiederholt sich also bei 162° und 1 Atmosphäre

Druck dieselbe Erscheinung wie bei 105°. Erst wenn beide Moleküle von H_2O verdampft sind, fängt die Temperatur an wieder zuzunehmen unter Zufuhr von Wärme.

Das im Salz $BaCl^2 \cdot (H^2O)^2$ enthaltene Wasser wird zum Verdampfen gebraucht nur in der Nähe von 105° und 160° bei 1 Atmosphäre Druck. Steigt der Druck, so steigen auch die beiden Grenzen des Wassersiedens. Eine ganz ähnliche Erscheinung zeigt sich bei dem Salz $CuSO^4(H_2O)^5$.

Bei ungefähr 100° bleibt die Temperatur des letzteren Salzes stehen und dabei entweicht 1 H_2O. Bei 105° entweicht das zweite Molekül H_2O. Zwei übrige Moleküle verschwinden bei 117°, und endlich entweicht das letzte Molekül bei 250°.

Hiernach erkennt man beim $BaCl^2(H_2O)^2$ zwei Siedepunkte des im Salz enthaltenen Wassers; bei 105° C. siedet das eine, bei 162° C. siedet das zweite Molekül. Bei $CaSO^4(H_2O)^5$ findet man 4 Siedepunkte des im Salz enthaltenen Wassers; bei 100° siedet ein Molekül H_2O, das zweite Molekül siedet von 150° ab, bei 117° sieden zwei Moleküle Wasser, und das letzte Molekül hat seinen Siedepunkt bei 258°. Entgegengesetzt zu diesen Wasser abgebenden Salzen verhalten sich andere Salze, welche ebenfalls Wasser abgeben.

Als Beispiel wollen wir den Heulandit (Zeolith) ins Auge fassen.

Das aus den verschiedenen Analysen gefundene Wasser schwankt zwischen 14 und 17,5%. Das entspricht ungefähr 5 bis 6 Molekülen H_2O, sodaß die Formel des Heulandits geschrieben werden darf:

$$CaAl^2Si^6O^{16} + 5\,H_2O \text{ oder } CaAl^2Si^6O^{16} + 6\,H_2O\,.$$

Erhitzt man nach und nach den Heulandit, so steigt nach und nach seine Temperatur regelmäßig und dabei entweicht das Wasser regelmäßig, wie die Versuche von F. Rinne (1899) beweisen:

bei	80— 85° C.	entweicht	2,77%	H_2O
»	100—110	»	3,93	»
»	125	»	4,80	»
»	150	»	6,15	»
»	175	»	6,83	»
»	200	»	7,88	»
»	250	»	9,08	»
»	300	»	12,18	»
»	360	»	13,77	»
»	400	»	14,67	»
»	475	»	15,27	»
»	555	»	15,46	»

und bei höherer Temperatur kann das ganze Wasser vertrieben werden. Der Heulandit verliert im Vakuum 4,84% Wasser, in trockener Luft über Schwefelsäure 4,17%. Auf gleiche Weise verhalten sich Stilbit $(Na^2Ca)Al^2Si^6O^{16} + 6\,H_2O$, sowie manche Zeolithe.

Man hat also Kristalle, welche beliebige Mengen Wasser, und Kristalle welche nur bestimmte Moleküle Wasser enthalten können. Also darf man behaupten, daß das im Kristall enthaltene Wasser sich mit dem Kristall mischt, wenn die erste Erscheinung auftritt, und zur Konstitution des Salzes gehört, wenn nur bestimmte Moleküle Wasser darin sein können.

Wir haben also eine ähnliche Erscheinung zwischen Wasser und Kristall, wie zwischen Kristall und Kristall. Das im Kristall gemischte oder gelöste Wasser bringt eine Verdünnung hervor und darf daher Verdünnungswasser heißen; das integrierende Wasser des Kristalls heißt dagegen Konstitutionswasser und bringt Substanzen hervor, welche ähnlich den Doppelsalzen sind. Es gibt Kristalle, welche beliebige Mengen aufnehmen können, wie die Zeolithe, und Kristalle, welche durch das Wasser recht wenig verdünnt werden können. Zu den letzteren gehören die Salze

$$BaCl^2(H_2O)^2, \quad CuSO^4(HO)^5 \text{ usw.}$$

Das Verdünnungswasser bringt keine beträchtliche Veränderung im Kristall hervor; das Konstitutionswasser dagegen erzeugt ganz neue Produkte, die sich durch Farbe, durch physikalische Beschaffenheit der Flächen usw. kundgeben.

Es scheint, daß nur solche Kristalle Verdünnungswasser aufzunehmen vermögen, welche schon Wasser als Konstitutionswasser enthalten. So vermögen die genannten Salze $BaCl^2(H_2O)^2$, $CuSO^4(H_2O)^5$ usw. zwar recht wenig Verdünnungswasser aufzunehmen. Deshalb findet man bei den Analysen nie eine solche Menge Wasser, daß sie vollen Molekülen entspräche. Man kann deshalb vermuten, daß auch das Wasser der Zeolithe in Verdünnungswasser und Konstitutionswasser sich zerlegen lassen muß. Die Tatsache daß Zeolithe nur einen Teil ihres Wassers im Vakuum abgeben, würde diese Vermutung unterstützen. Sichere Regeln darüber fehlen noch.

§ 149. Geschichtliches.

Der Satz, daß jeder chemische Stoff eine eigne Kristallform habe, findet sich schon im Anfang des 18. Jahrhunderts vor. Aber dieser Satz erhält die richtige und deutliche Fassung erst durch R. J. Haüy im Beginn des 19. Jahrhunderts. Haüy faßte seine Untersuchungen so auf: Jeder chemische Stoff erhält stets dieselbe Kristallform, und verschiedenen Stoffen kommen verschiedene Formen zu. Dieser Satz von Haüy wurde als Axiom betrachtet. M. H. Klaproth (1798) war bekannt, daß derselbe chemische Stoff als Kalzit und Aragonit verschieden kristallisiere; auch L. N. Vauquelin hatte im Rutil und Anatas verschiedene Grundgestalten gefunden, bei gleicher Zusammensetzung. Haüy stellte in diesem Fall die Vermutung auf, daß einer von beiden Stoffen etwas enthalten müsse, was ihm die andere Kristallform erteile; doch das stimmte nicht mit Vauquelins und A. Foucroys Analysen. Alle diese verschiedenen Untersuchungen, besonders von L. J. Thénard und J. B. Biot (1807),

haben den Gedanken auftauchen lassen, ob nicht vielleicht einem Stoff verschiedene Kristallformen zukommen könnten. Viele Analysen von Fr. Stromeyer, Cr. Fr. Bucholz, W. Meißner, L. Gay-Lussac, J. J. Bernhardi, F. Beudant haben den Satz von Haüy bald zu erhärten, bald zu erschüttern vermocht. Die neue Phase in der Geschichte der chemisch-physikalischen Beziehungen beginnt erst mit E. Mitscherlich (1821). Er wies nach, daß die arsensauren Salze übereinstimmende Formen haben mit den phosphorsauren Salzen; analoge Gestalten unter sich weisen ebenfalls die Sulfate von Blei, Baryum und Strontium auf. E. Mitscherlich konstatierte ferner, daß auch die Karbonate von Kalzium, Zink, Eisen, Mangan analoge dreigliedrige Formen besitzen. Seine weitern Untersuchungen beschäftigten sich mit Vitriolen von Kupfer, Mangan, Kobalt, Eisen, Zink, Nickel und Magnesium. Aus allem dem schloß er, »daß, wenn zwei verschiedene Verbindungen sich mit gleichen Atomen einer dritten verbinden, die beiden Körper, welche aus dieser Verbindung entstehen, in allen ihren Verbindungen mit andern Substanzen Körper hervorbringen, die nach denselben Verhältnissen zusammengesetzt sind, und daß, wenn die mit ihnen verbundene Substanz dieselbe ist, die zwei aus dieser Verbindung entstandenen Körper dieselbe Form haben«.

Mitscherlichs Entdeckung wurde fast widerspruchslos anerkannt. Gleichzeitig gelang es Mitscherlich nachzuweisen, daß $NaH_2PO_4 + H_2O$ in zwei Grundgestalten erscheinen kann; eine solche Dimorphie wurde auch an Kalkspat und Aragonit, an Rutil und Anatas usw. endgültig von ihm nachgewiesen. Durch den Nachweis dieses Forschers, daß auch der Schwefel Dimorphie zeige, wurde der ganze Haüysche Satz umgeworfen.

Allerdings glaubten Haüy und seine Anhänger, daß weder dem von Mitscherlich entdeckten Polymorphismus noch dem Isomorphismus der Kristalle großes Gewicht beizulegen sei.

Nach Mitscherlich mehrten sich die Untersuchungen. Hiervon sind ganz besonders diejenigen von M. L. Frankenheim zu erwähnen (1836—1854); er konstatierte bei vielen Körpern durch Änderung der Temperatur hervorgebrachte neue Modifikationen. Diese vorzüglichen Beobachtungen, welchen auch die von W. Haidinger (1826), Mitscherlich (1827), G. Rose (1839) und anderen vorangegangen waren, sind später von O. Lehmann (1877) ausführlicher wieder aufgenommen worden. Lehmann unterschied zwischen enantiotropen (polymeren, reversiblen, umkehrbaren) und monotropen (metameren, irreversiblen, nicht umkehrbaren) polymorphen Körpern.

Durch die wichtigen Arbeiten und Untersuchungen Lehmanns ist man wieder zu dem allgemeinen Satz Haüys zurückgekehrt, daß nämlich jeder chemisch bestimmten Substanz nur eine physikalische Form zukomme, während nach Mitscherlichs entgegengesetzter Lehre derselben mehrere physikalische Zustände entsprechen können.

Zahlreiche Beobachter haben nach Mitscherlich Erfahrungen gesammelt, um die Reihen der polymorphen Substanzen zu vermehren, von welchen hauptsächlich die Namen von J. J. Berzelius (1841), L. Pasteur (1948), M. L. Frankenheim

(1836), G. Rose (1839), Fr. Wöhler, A. Scacchi, Q. Sella, C. Rammelsberg, A. Breithaupt, E. Mallard, C. de Marignac, G. Tschermak und in neuester Zeit Friedel, Muthmann, Fletcher, C. Klein, Arzruni, Retgers, Mügge, Rinne u. a. erwähnt sein mögen. Die polymorphen Körper wurden nach ihren physikalischen und geometrischen Merkmalen untersucht und hauptsächlich von Tschermak (1862), M. Websky (1868), Schrauf (1868), Kreutz (1881), A. Scacchi, Pasteur, C. Hintze, C. Klein, C. Schuster usw.

Schon Mitscherlich, Haidinger, G. Rose, Wöhler u. a. untersuchten die Ursachen der heteromorphen Zustände, welche für sie in der verschiedenen Temperatur bestanden. In dieser Richtung machten auch C. Klein, J. S. Penfield, H. Rosenbusch u. a. Beobachtungen. Andere haben die verschiedenen Modifikationen aus den verschiedenen Lösungen oder durch andere Mittel erhalten, so G. Rose, W. Muthmann usw.

Die Entwicklung des Isomorphismus ging mit der Entwicklung des Polymorphismus (Heteromorphismus) Hand in Hand. Wöhler (1825—1833), A. Lévy (1826), später noch G. G. Mosander (1830), G. Rose (1827), C. M. Kersten (1831), J. Johnston (1829—1832) usw. sammelten viele Erfahrungen über isomorphe Substanzen.

C. F. Naumann (1838) schlägt den Namen Homoömorphismus anstatt Isomorphismus vor, da es sich gewöhnlich nicht um identische, sondern um ähnliche Winkel handle. A. Breithaupt (1835) und F. v. Kobell (1840) waren derselben Ansicht.

Die Schwierigkeiten mehrten sich, als isomorphe Körper gefunden wurden, die nicht der Mitscherlichschen Definition folgten. Nach dieser Richtung hin arbeiteten Lévy, H. J. Brooke, Kobell, Breithaupt, J. Philipps (1830), G. Rose, Berzelius u. v. a. Th. Scheerer (1846) suchte zu begründen, daß isomorphe Körper nicht nur dann zustande kommen, wenn gleichwertige Atome (oder Radikale) sich Atom für Atom vertreten, sondern auch dann, wenn an Stelle von *m* Atomen *n* Atome treten. G. Delafosse (1851) dehnte den Isomorphismus auch auf ähnliche Kristalle aus (Plesiomorphismus), wie z. B. die sogenannten pseudo-hexagonalen (sechsgliedrig) und pseudotetragonalen (viergliedrig), ähnlich wie Naumann.

Ein ungemein großes Untersuchungsmaterial wurde gesammelt, um isomorphe, isopolymorphe Reihen und isomorphe Mischungen nach dem chemischen und physikalischen Verhalten zusammenzustellen. In dieser Richtung sind besonders H. Kopp, H. de Senarmont, Kupffer, F. H. Schröder, Tschermak, Schrauf, G. Rose, H. Dufet, Pettersson, W. Spring, Ch. Soret, H. Topsöe, A. Michel Lévy, V. v. Lang, Grailich, F. L. Perrot, A. Damour, Boisbaudran, E. Jannettaz, F. Pfaff, A. Kenngott, H. Baumhauer, C. Schuster, Fr. Becke, und in neuester Zeit R. Brauns, W. Muthmann, J. B. Retgers, Brögger, Hintze, B. Goßner u. v. a. zu nennen.

Eine neue Phase in der Frage des Isomorphismus beginnt mit P. v. Groth (1870). Während Mitscherlich und seine Nachfolger die Frage zu erledigen versuchten, die Gleichheit der verschiedenen homogenen anisotropen Zustände

nach der chemischen und physikalischen Richtung zu erreichen, hat Groth gezeigt, wie die physikalischen mit den chemischen Veränderungen in Zusammenhang zu bringen sind, indem durch Substitution, Vertauschung, Hinzutretung von neuen Atomen, Gruppen von Atomen oder Radikalen die Konstitution der Substanzen geändert wird. Mit Groth beginnt eine genaue und systematische Untersuchung der ähnlich beschaffenen Substanzen. Es wird dann nicht so sehr von dem Isomorphismus, als vielmehr von einer morphotropen Kraft gesprochen, welche durch chemische Vertauschung oder Hinzutretung hervorgerufen wird. Mit dieser morphotropen Kraft stehen die morphotropen Veränderungen im Zusammenhang, welche sich in der Grundgestalt, in der homogenen Deformation und in allen physikalischen Merkmalen äußern. An dieser durch Groth gewiesenen neuen Richtung der Forschung haben viele Gelehrte teilgenommen, von denen hauptsächlich seine Schüler und die obengenannten zu erwähnen sind.

Alle diese Untersuchungen streben dahin, den Zusammenhang zu erforschen, welcher zwischen einer chemischen Verbindung und dem chemischen und physikalischen Verhalten besteht. Allerdings ist man noch ziemlich weit davon entfernt, ein allgemeines Gesetz mitten in den vielen speziellen Regeln zu erblicken.

Die physikalische Chemie der Kristalle ist ein neues Gebiet der Wissenschaft, worin ungemein viel gearbeitet worden ist, und recht wenige endgültige Resultate zu verzeichnen sind. Sie sucht die Gesetze der Lösungen auf die Kristalle überzuführen; die Moleküle der Kristalle und der isomorphen Mischungen mit denjenigen der Lösungen in Zusammenhang zu bringen; die Umwandlung der verschiedenen Modifikationen und die Molekulargewichte zu bestimmen; das Kristallwasser genau festzustellen usw. Daran sind viele Forscher beteiligt, so J. H. van't Hoff, W. Muthmann, G. Tammann, F. Rinne, A. Fock, A. E. Tutton, J. W. Retgers, H. Vater, A. Eppler, W. F. Hillebrand, A. Lavenir, H. W. Bakhuis Roozeboom, A. Hamberg, V. Rothmund, D. J. Hissink, G. Bruni, G. Bodländer, G. Fels, G. Friedel, B. Goßner u. a.

In der letzten Zeit (1903) hat Tschermak versucht die Form der Moleküle einer Verbindung mit der Grundgestalt in Beziehung zu bringen. Eine solche Beziehung wird leichter zu gewinnen sein, da sie von allgemeiner Natur ist, als eine genaue Beziehung zwischen den chemischen und physikalischen Merkmalen, wie die Lehre des Isomorphismus resp. der Morphotropie sie seit langen aufzufinden bestrebt ist. Für die Literatur möge man das Buch von A. Arzruni (Die Beziehungen zwischen Kristallform und chemischer Zusammensetzung, Braunschweig 1893), R. Brauns (Chemische Mineralchemie, Leipzig 1896) und B. Goßner (Untersuchung polymorpher Körper, Ztschr. f. Kristall. 38, 3, 1903) konsultieren, welche auch lange in diesem Gebiet gearbeitet haben.

Kapitel X.

Die geometrische Struktur der Kristalle.

a) Das Raumgitter.

§ 150. Einleitung.

Es gibt drei mit der Struktur der Kristalle zusammenhängende Fragen. Die erste betrifft lediglich den homogenen Zustand des Kristalls und besteht darin zu untersuchen, welche Punkte des homogenen Mittels physikalisch identisch sind, und wie die identischen Punkte verteilt sein müssen, damit die Homogenität überhaupt möglich sei.

Um jeden Punkt herum können die vektorialen Größen nach vielen und verschiedenen Arten verteilt sein. Nicht alle derselben sind mit dem Prinzip der Homogenität verträglich; es ist vielmehr erforderlich, daß bestimmte Harmoniebedingungen zur Geltung kommen, wenn man die Veränderungen betrachtet, welche die vektorialen Größen erleiden, sowohl um einen Punkt herum, als auch von einem Punkt zum andern. Die zweite Frage befaßt sich somit mit den Harmoniebedingungen des homogenen Mittels.

Die dritte Frage beschäftigt sich mit den Veränderungen, welche die vektorialen Größen um einen Punkt herum erleiden.

Um beispielsweise die Kristallstruktur des aus kohlensaurem Kalzium bestehenden Kalkspates kennen zu lernen, haben wir von diesem Kristall folgende Aufgaben zu lösen:

1) Auf welche relativen Entfernungen kommen die Moleküle zu stehen und wie liegen sie im Raume angeordnet;
2) wie verhalten sich die Moleküle gegeneinander;
3) wie ist das kohlensaure Kalzium um einen Punkt herum verteilt, resp. wie ist sein Molekül zusammengesetzt.

Wenn diese drei Fragen beantwortet sein werden, werden wir auch behaupten können, daß die Struktur des Kalkspates bekannt sein wird.

Die erste Aufgabe wird in der geometrischen Struktur der Kristalle behandelt, worauf wir in diesem Kapitel eingehen werden,

Die zweite Aufgabe wird, wenigstens teilweise, gelöst bei der Behandlung der Harmonie des Raumgitters.

Die dritte Aufgabe bildet den schwierigsten Teil der Kristallographie. Sie ist noch nicht zu einem endgültigen Resultat gelangt. Die Versuche über den Isomorphismus der Kristalle bezwecken Klarheit in diesen Teil der Strukturkenntnisse zu bringen; und wenn auch noch nicht eine absolute Lösung vorliegt, so sind die Versuche doch so weit gekommen, vergleichende Größen nebeneinander zu stellen.

§ 151. Gleichwertige, homologe und analoge Punkte.

Wenn wir uns eine geometrische Vorstellung machen wollen von dem, was eine Kristallstruktur sei, d. h. wie ein homogener, anisotroper Zustand zu denken ist, so müssen wir den im Raume befindlichen Punkten gewisse materielle Bedeutung beilegen, also gewisse physikalische Größen wie Masse, Anziehungs- oder Abstoßungskräfte usw.

Liegen in zwei Punkten gleiche physikalische Größen, so heißen sie gleichwertig. Es ist begreiflich, daß in einem homogenen Mittel die gleichwertigen Punkte gleichmäßig geordnet sein werden.

Unter den gleichwertigen Punkten lassen sich verschiedene unterscheiden. Zwei gleichwertige Punkte können entweder vollständig nach allen Richtungen und Sinnen gleich sein, sie werden dann homologe Punkte genannt; oder aber können zwei Punkte zwar gleich sein, ihre dann gemessenen physikalischen Größen auch gleich, jedoch nach verschiedenen Richtungen und Sinnen. Zwei Punkte können z. B. physikalisch gleich sein, aber sich verhalten wie rechts und links usw. Letztere nennt man dann analoge Punkte.

Aus dieser Definition geht hervor, daß um von irgend einem homologen Punkt zu einem zweiten homologen überzugehen eine Translationsbewegung hinreicht. Um dagegen von einem Punkt zu einem analogen überzugehen, reicht eine Translation nicht hin; es erfordert noch eine zweite Operation.

Welche Rolle die homologen und analogen Punkte in der Kristallstruktur spielen, werden wir im einzelnen kennen lernen. Wir werden vorerst von den homologen Punkten sprechen; und zwar werden wir die Vorstellung gewinnen, wie die verschiedenen Richtungen und Ebenen geometrisch aufgefaßt werden müssen, und wie auch der homogene Raum eine selbständige geometrische Einheit erlangen kann.

§ 152. Punktreihen.

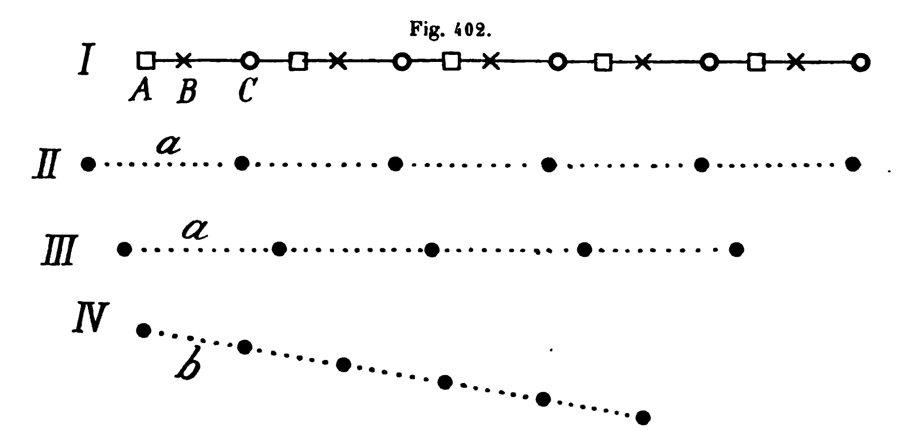
Daß wir von Punkten ausgehen müssen, um uns eine Vorstellung des homogenen, anisotropen Zustandes zu machen, sehen wir gleich ein, wenn wir Richtungen ins Auge fassen.

Sollen zwei Richtungen, welche nicht parallel sind, auch nicht gleich sein, was in einem anisotropen, homogenen Zustand im allgemeinen der Fall sein muß, so müssen wir diese Richtungen als zwei Punktreihen auffassen, worin der Abstand zwischen den homologen Punkten in einer Reihe verschieden ist von dem entsprechenden Abstand in der andern Punktreihe. Die zwei Richtungen *III* und *IV* der Fig. 402 sind insofern verschieden, als der kleinste Abstand a zwischen zwei nächstliegenden homologen Punkten in der Richtung *III* verschieden ist von dem kleinsten Abstand b in der Richtung *IV*.

Der kleinste Abstand zwischen zwei homologen Punkten a in den Reihen *I*, *II*, *III* oder b in der Reihe *IV* der Fig. 402 heißt primitive oder spezifische Strecke.

Ist eine Richtung homogen, so sind alle darin eine Reihe bildenden, homologen Punkte auf der gleichen primitiven Strecke gelegen. Also besteht eine homogene Richtung, oder geometrisch deutlicher ausgedrückt: ein homogener Vektor besteht aus Reihen von homologen Punkten. Durch jeden Vektor geht eine Reihe von homologen Punkten. Auf dem Vektor I, Fig. 402, sind verschiedene Punkte, wie A, B, C, ... mit verschiedenen Zeichen angegeben. Durch den Punkt A geht eine Reihe von Punkten, welche mit A homolog sind und deren primitive Strecke a ist. Durch den Punkt B geht ebenfalls eine Reihe von Punkten, welche mit B aber nicht mit A homolog sind und deren primitive Strecke ebenfalls a ist. Desgleichen geht durch den Punkt C eine Reihe von Punkten, die mit C aber nicht mit A oder mit B homolog sind und deren primitive Strecke ebenfalls a ist, usw.

Fig. 402.



Wir nennen zwei Vektoren homolog, wenn beide aus untereinander homologen Punkten bestehen. Also sind die Vektoren II, III, IV der Fig. 402 homolog, weil die darin verzeichneten Punkte homolog sind. Zwei Vektoren werden physikalisch gleichwertig genannt, wenn sie zwar nicht aus gleichen homologen Punkten bestehen, aber ihre primitive Strecke dieselbe ist. So z. B. ist der Vektor I zwar mit den Vektoren II und III gleichwertig, weil ihre primitive Strecke a ist, aber während II, III und IV untereinander homolog sind, erscheinen sie nicht homolog mit dem Vektor I.

Man kann sich vorstellen, daß in jedem Punkt eine gewisse Dichtigkeit der Materie vorhanden sei. Die Dichtigkeit einer Richtung wird offenbar von zwei Momenten abhängen, nämlich von der Masse, welche in jedem homologen Punkt gelegen ist, und von der primitiven Strecke.

Eine homologe Reihe wird dichter als eine andere homologe Reihe sein, wenn ihre primitive Strecke kleiner sein wird als bei dieser.

Wenn wir also mit ε die Dichtigkeit und mit a die primitive Strecke einer Punktreihe resp. einer Richtung bezeichnen, so können wir die Beziehung schreiben:

$$\varepsilon = \frac{1}{a}, \tag{67}$$

d. h. die Dichtigkeit verhält sich umgekehrt wie die primitive Strecke. Anderseits hat man

$$a\varepsilon = 1 \quad \text{und} \quad a = \frac{1}{\varepsilon}, \tag{68}$$

d. h. wenn man die primitive Strecke a mit der Dichtigkeit ε multipliziert, erhält man die Masse 1, welche auf die primitive Strecke verteilt ist; und wenn man die Masse 1 durch die Dichtigkeit dividiert, erhält man die primitive Strecke a. Also bedeutet a auch diejenige Länge, welche von der Masse 1 besetzt ist; sie hat daher die Bedeutung einer spezifischen Länge im Bezug auf die Masse 1, und heißt dementsprechend »spezifische Strecke«. Unter spezifischer Strecke wird ferner der reziproke Wert der Dichtigkeit verstanden, er stimmt in unserm Fall mit der primitiven Strecke der Punktreihe überein.

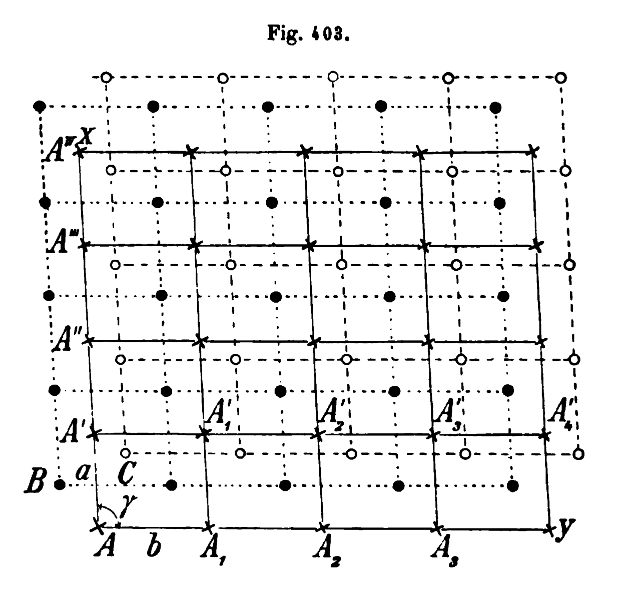
Zwei homologe Vektoren sind geometrisch gleichwertig, wenn ihre Dichtigkeit oder spezifische Strecke dieselbe ist.

§ 153. Ebenen-Punktnetze.

Wie ein Vektor durch eine Reihe von homologen Punkten geometrisch individualisiert werden kann, so kann auch eine Ebene durch Punktreihen individualisiert werden.

Fassen wir irgend welchen Punkt der Ebene ins Auge, z. B. den Punkt A, Fig. 403, der mit einem Kreuz angegeben ist. Durch diesen Punkt werden zwei homologe Vektoren gezogen x und y, welche daher Reihen von mit A homologen Punkten enthalten werden. Ihre primitiven Strecken mögen a und b heißen. Also liegen auf der Richtung x die homologen Punkte $A, A', A'', \ldots$ auf der kleinsten Entfernung a, während auf der Richtung y die homologen Punkte $A, A_1, A_2, A_3, \ldots$ auf der kleinsten Entfernung b liegen werden.

Fig. 403.



Ziehen wir nun von $A', A'', A''', \ldots$ der ersten Punktreihe die Parallelen zu der zweiten Punktreihe Ay, und durch $A_1, A_2, A_3, \ldots$ der zweiten Punktreihe die Parallelen zu Ax, so werden wir ein Netz von homologen Richtungen erhalten, in deren Schnittpunkten die mit A homologen Punkte liegen werden. Durch jeden Punkt der Ebene wird ein Netz von homologen Punkten

gehen — ein »Punktnetz«. So geht ein solches Netz ebenso von Punkt B aus wie von Punkt C usw. Alle solche Punktnetze, welche in der Ebene liegen, werden untereinander identisch sein, d. h. sie werden durch beide primitiven Strecken a und b und durch den Winkel γ, den sie einschließen, bestimmt sein. Der Grund liegt offenbar darin, daß in einem homogenen Mittel alle parallelen Richtungen untereinander gleichwertig sind.

Denke man sich ein Punktnetz verzeichnet. Man kann immer 4 Punkte des Punktnetzes so wählen, daß sie die Ecken eines Parallelogramms seien; man kann also unendlich viele Parallelogramme auf diese Weise zeichnen. Das kleinste derselben, dessen Seiten die kleinsten a und b sind, heißt das »primitive Parallelogramm«, und sein Inhalt ist

$$i = ab \sin \gamma, \tag{69}$$

wobei γ den Winkel bedeutet, welchen a und b einschließen, Fig. 403. Es ist einleuchtend, daß alle durch 4 homologe Punkte gebildeten Parallelogramme, in deren Mitte und Seiten kein homologer Punkt enthalten ist, denselben Inhalt $ab \sin \gamma$ haben.

Die Punktreihen, worin a und b gemessen werden, heißen die »primitiven Punktreihen« des Ebenen-Punktnetzes.

Zwei Ebenen sind homolog, wenn in beiden homologe Punkte liegen. Zwei Ebenen sind gleichwertig, wenn in beiden Punktnetze gezogen werden können, deren primitive Punktreihen die primitiven Strecken a und b haben und denselben Winkel γ einschließen. Also haben zwei gleichwertige Ebenen auch gleiche primitive Parallelogramme.

Wenn wir mit F irgend welchen Flächeninhalt der gegebenen Ebene bezeichnen, worin n Anzahl primitive Parallelogramme enthalten sind, so entspricht die Konstante

$$\frac{n}{F}$$

der Anzahl primitiver Parallelogramme, welche in der Flächeneinheit enthalten sind. Man kann also unter Dichtigkeit δ des Ebenen-Punktnetzes dieses Verhältnis verstehen, daher schreiben

$$\delta = \frac{n}{F} = \frac{\nu}{1}, \tag{70}$$

wenn ν eben die Anzahl der primitiven Parallelogramme pro Flächeninhalt bedeutet. Anderseits wenn wir den Inhalt i des primitiven Parallelogrammes mit der Anzahl n der Parallelogramme, welche in der Fläche F enthalten sind, multiplizieren, erhalten wir wieder den gesamten Flächeninhalt F, also

$$F = n \cdot i. \tag{70a}$$

Daraus folgt

$$\delta = \frac{1}{i} \cdot \tag{71}$$

Man ist also berechtigt, unter Dichtigkeit eines Punktnetzes den reziproken Wert des Inhalts des primitiven Parallelogramms zu verstehen. Und da dieser Inhalt der reziproke Wert der Dichtigkeit ist:

$$i = \frac{1}{\delta}, \tag{72}$$

so bedeutet er auch den »spezifischen Flächeninhalt« des Punktnetzes, d. h. diejenige Fläche, welche durch die Masseneinheit besetzt ist. In unserm Fall stimmt der spezifische Flächeninhalt mit dem Inhalt des primitiven Parallelogramms überein. Also

$$i = ab \sin \gamma = \frac{1}{\delta}. \tag{73}$$

Wir werden in der Folge diesen spezifischen Inhalt numerisch berechnen und konventionell auf die Normale des Ebenen-Punktnetzes auftragen.

Ein Ebenen-Punktnetz wird daher durch die Lage seiner Normale und durch den auf die Normale aufgetragenen spezifischen Flächeninhalt festgestellt.

§ 154. Verteilung der Dichtigkeit im Punktnetz.

Bei der Besprechung der homologen Punktreihen haben wir unter Dichtigkeit den reziproken Wert der primitiven Strecke aufgefaßt und diese spezifische Strecke genannt, weil sie die Länge angibt, worin sich die Einheit der Masse ausbreitet; und so lange man mit isolierten Punktreihen zu tun hat, ist das Verfahren gerechtfertigt.

Wir können in dem Ebenen-Punktnetz unendlich viele homologe Punktreihen durch einen homologen Punkt ziehen, welche alle voneinander verschieden sind, weil ihre primitiven Strecken verschieden sind. Wollte man die Dichtigkeit dieser Punktreihen gleich dem reziproken Wert der primitiven Strecke, ohne Unterschied, Fig. 404, gleich setzen, so würde man sicher unrichtige Resultate erhalten.

Die Dichtigkeit der Punktreihe auf der Richtung x mag wohl $\frac{1}{a}$ und ihre spezifische Strecke gleich der primitiven Strecke a sein; sowie diejenige auf der Richtung y, $\frac{1}{b}$, und ihre spezifische Strecke ebenfalls gleich der primitiven Strecke b sein mag.

Wenn wir aber Richtungen betrachten, deren primitive Strecke sehr groß ist, so erscheint das erwähnte Verfahren nicht mehr anwendbar.

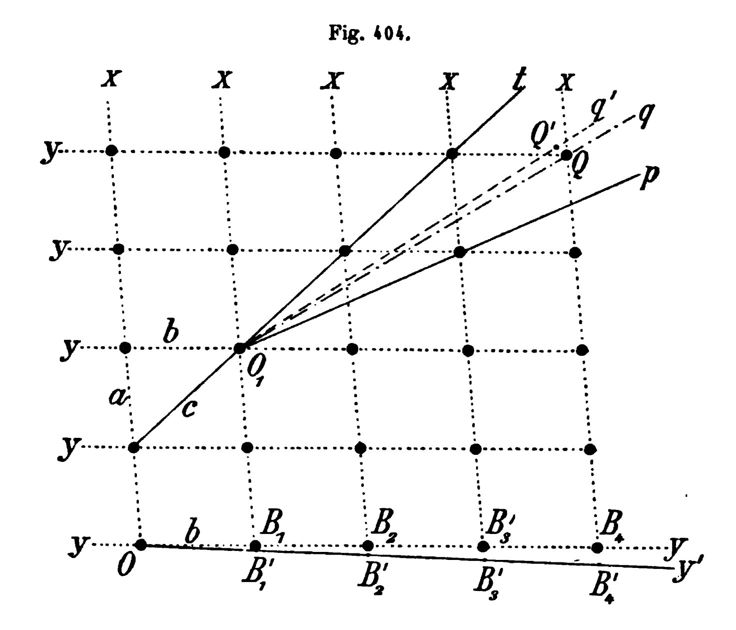
Es sei z. B. die Richtung Oy' ins Auge gefaßt, welche eine sehr kleine Neigung mit Oy, Fig. 404, bildet. Da nun diese Richtung Oy', welche durch den homologen Punkt O gezogen worden ist, in großer Entfernung einen zweiten homologen Punkt treffen wird, so müßte man meinen, daß diese Richtung eine sehr kleine Dichtigkeit habe, während die Dichtigkeit der Richtung Oy verhältnismäßig groß ist, und zwar $\frac{1}{b}$, wie angenommen. Die Richtung Oy' wird Punkte enthalten wie B_1', B_2', B_3', B_4', ..., welche zwar mit O nicht homolog sind, der Annahme gemäß, aber doch physikalischen Größen

entsprechen, welche von denen nicht bedeutend verschieden sein können, die in den nächstliegenden homologen Punkten B_1, B_2, B_3, ... vorhanden sind.

Es ist also möglich und auch sehr wahrscheinlich, daß die Richtungen, welche einen sehr kleinen Winkel mit Oy einschließen, ebenso dicht seien wie die Richtung Oy selbst, oder sehr wenig verschieden davon.

Daraus folgt, daß die Dichtigkeit $\frac{1}{b}$ der Richtung Oy nicht nur die größte, sondern auch ein Maximum, und ihre spezifische Strecke ein Minimum ist. Das Gleiche muß man von der Richtung x und wahrscheinlich auch von der Richtung t behaupten. Und da die Richtung p auch einen ziemlich großen Winkel mit x, y, t einschließt, so wird höchstwahrscheinlich ihre spezifische Strecke ebenfalls Minimum sein. Die übrigen Richtungen müssen sich wegen ihrer Dichtigkeit und ihrer spezifischen Strecke an die genannten anschließen.

Fig. 404.



Es muß natürlich auch Richtungen geben, wo die Dichtigkeit Minimum, resp. die spezifische Strecke Maximum ist. Es sei z. B. eine solche die Richtung q, deren primitive Strecke e ist. Sie liegt zwischen den zwei Richtungen p, t, wo die Dichtigkeit Maximum ist. Es erscheint möglich, daß in die Richtungen, z. B. q', welche sehr wenig geneigt sind mit der Richtung q, Punkte wie Q' fallen, welche zwar mit denjenigen von q nicht homolog, aber physikalisch sehr ähnlich sind und nahezu auf der primitiven Strecke e liegen, wie die homologen Punkte der Richtung q. Infolgedessen wird die Dichtigkeit aller der Richtungen, welche mit q wenig geneigt sind, immer gleich $\frac{1}{e}$ sein. Und da e groß ist, so wird diese Dichtigkeit einem Minimum, d. h. die spezifische Strecke einem Maximum entsprechen.

Wenn man daher eine isolierte Punktreihe betrachtet, so kann man von derselben sagen, daß ihre Dichtigkeit dem reziproken Wert der primitiven Strecke gleich sei und daß die primitive Strecke mit der spezifischen Strecke übereinstimmt.

Hat man aber mehrere ein Punktnetz zusammensetzende Punktreihen in einer Ebene, so darf man zwar von verschiedenen derselben annehmen, daß ihre Dichtigkeit der primitiven Strecke umgekehrt proportional sei, aber auch sagen, daß sie Maximum oder Minimum sei, infolge der in der Ebene verteilten Masse.

Bezeichnet man die Richtungen xx und yy, wo die Dichtigkeit Maximum ist, mit den Symbolen [100] und [010], so wird die Richtung t, welche mit [110] zu bezeichnen sein wird, ebenfalls eine maximale Dichtigkeit haben, nämlich $\frac{1}{c}$, wobei c aus a und b zusammengesetzt ist. Auch die mit [120] zu bezeichnende Richtung p wird eine maximale Dichtigkeit haben, die gleich $\frac{1}{d}$ ist, wobei d aus a und $2b$ zusammengesetzt ist, usw.

Werden mit h und k irgend welche relative Primzahlen (durch keine andere Zahl gemeinsam teilbar) bezeichnet, so kann die primitive Strecke irgend welcher Richtung als Resultante der 2 Komponenten ha und kb betrachtet werden. Das geht aus der Konstruktion des Ebenen-Punktnetzes selbst hervor. Da die Richtung mit der Resultante zusammenfällt, so kann sie mit dem Symbol $[hk]$ angedeutet werden.

Zwischen den in einer Ebene liegenden Richtungen läßt sich eine wichtige Unterscheidung aufstellen.

Es sind nämlich Richtungen vorhanden, wo die primitive Strecke zugleich die spezifische Strecke, d. h. der reziproke Wert der Dichtigkeit ist. Die Indizes dieser Richtungen h und k reichen hin, um die Dichtigkeit derselben vollständig zu bestimmen. Die Dichtigkeit ist ein Maximum oder ein Minimum und die Indices h und k sind verhältnismäßig klein und können durch Erfahrung festgesetzt werden.

Alle andern in der Ebene liegenden Richtungen haben weder maximale noch minimale Dichtigkeit. Ihre spezifische Strecke ist nicht ihrer primitiven Strecke gleich und kann daher auch nicht durch die entsprechenden Indizes h und k bestimmt werden. Ihre Dichtigkeit schließt sich eng an die maximale oder minimale Dichtigkeit derjenigen Richtungen an, zu welchen die gegebenen Richtungen am nächsten liegen. Solche Richtungen unterscheiden sich von den ersteren dadurch, daß sie die Indizes h und k groß haben. Groß und klein sind natürlich relative Begriffe und können nur durch Erfahrung unterschieden werden.

§ 155. Mögliche Ebenen-Punktnetze.

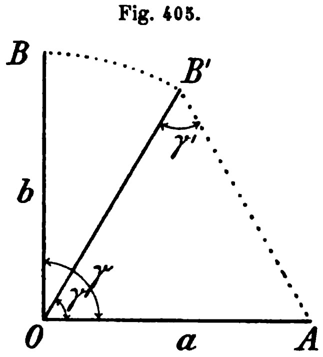
Man wird zu allen möglichen Punktnetzen gelangen, sobald man den 3 Elementen, Fig. 403, S. 320

$$a, b, \gamma$$

alle möglichen Werte geben wird.

Es ist also einleuchtend, daß unendlich viele Punktnetze möglich sind, die sich alle voneinander unterscheiden; es lassen sich aber Analogien zwischen denselben finden, sodaß man sie passend in 3 charakteristische Punktnetze gruppieren kann.

Fig. 405.



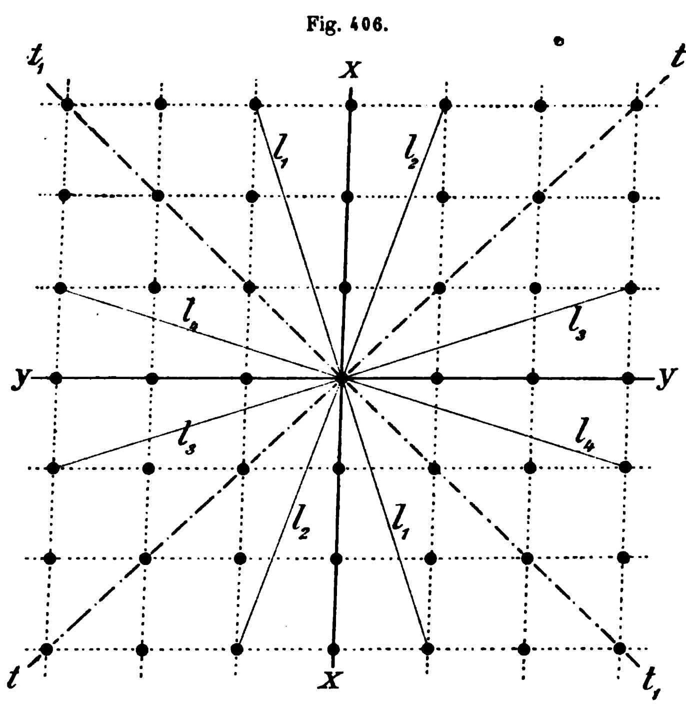
Konstruiere man sich ein Punktnetz und betrachte irgend welchen Punkt desselben, z. B. den Punkt O, Fig. 405. Suchen wir um diesen Punkt herum diejenigen homologen Punkte, welche die Eigenschaft haben, dem homologen Punkt O am nächsten zu liegen. Es mögen die homologen Punkte A und B sein, welche die primitiven Strecken a und b des Punktnetzes angeben; zwischen ihnen eingeschlossen ist der Winkel γ.

1. Betrachten wir vorerst diejenigen Punktnetze, bei welchen a und b nicht viel verschieden voneinander sind. Ist also a und b annähernd gleich,

$$a \equiv b;$$

geben wir ferner dem Winkel γ alle möglichen Werte. Ist $\gamma = 90^\circ$ und ziehen wir den Kreisbogen durch B mit Zentrum in O, so sehen wir gleich ein, daß der Punkt B nur zwischen B und B' liegen darf,

Fig. 406.



d. h. der Winkel γ darf nur zwischen 90° und 60° bleiben, wenn die Strecken a und b nahezu gleich sein sollen. Würde z. B. $\gamma < 60^\circ$ sein,

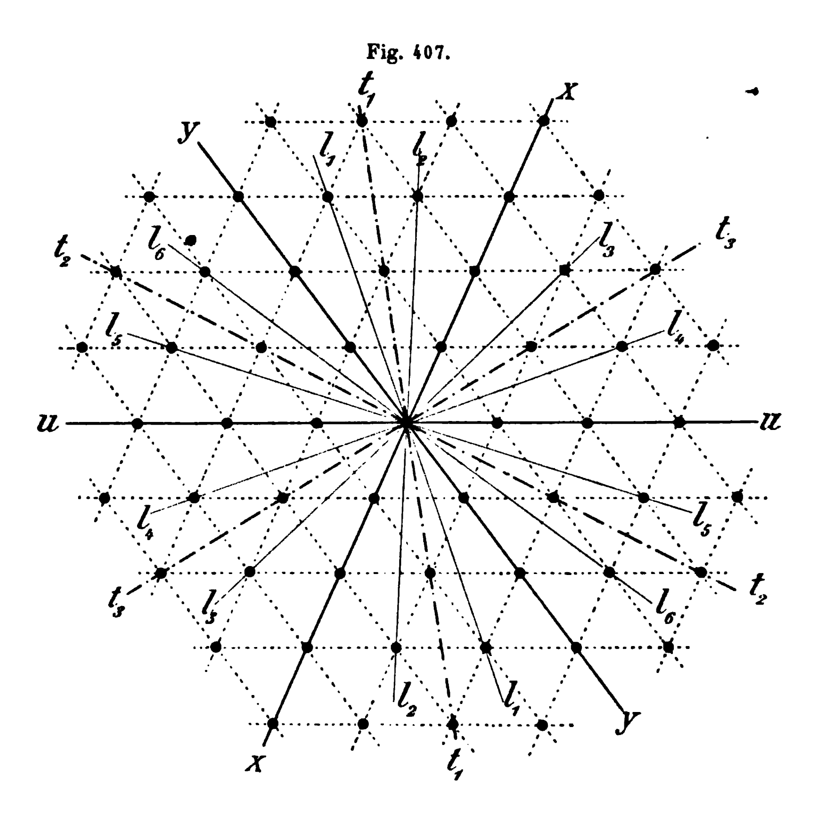
so käme ein homologer Punkt B' in Betracht, der dem homologen Punkt A viel näher gelegen sein würde, als dem homologen Punkt O; in diesem letzten Fall hätte das Punktnetz nicht die angenommenen primitiven Strecken a und b, sondern a und AB'; also darf der Winkel γ nur zwischen 90° und 60° liegen.

Es springen also sofort 2 typische Punktnetze ins Auge, nämlich:

$$\text{für } a \equiv b \text{ und } \gamma \equiv 90^\circ$$
$$\text{»} \quad a \equiv b \quad \text{»} \quad \gamma \equiv 60.$$

Das erste Netz ist in Fig. 406, das zweite in Fig. 407 dargestellt. Man sieht auf den ersten Blick, daß sie voneinander grundverschieden sind; zwar geht das eine in das andere über, indem der Winkel γ von 90° bis 60° geändert wird, sodaß Punktnetze denkbar sind, welche sowohl zu dem ersten als zu dem zweiten gerechnet werden dürfen, obwohl beide sich stark voneinander unterscheiden.

Fig. 407.

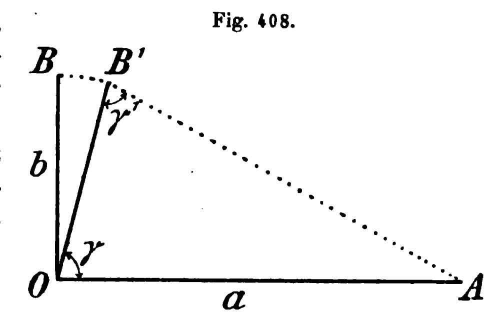


2. Nehmen wir zweitens an, daß a sehr verschieden von b sei, also z. B. $a < b$, wie in Fig. 408 angegeben ist. Wenn das der Fall ist, so kann der Winkel γ nur in der Nähe von 90° liegen.

Machen wir z. B. $a = 2b$ und $\gamma = 75\frac{1}{2}^\circ$, so käme der homologe Punkt B' ebenso nahe dem homologen Punkt A, wie dem homologen

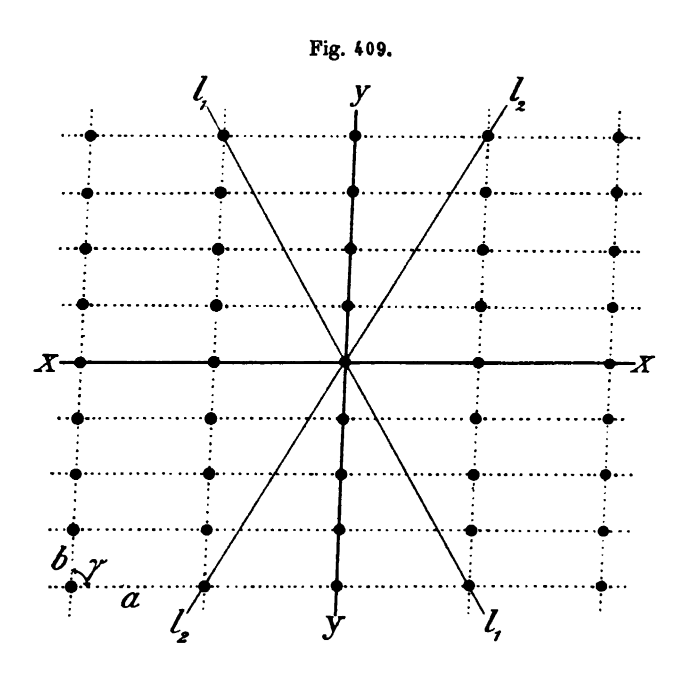
Punkt O. Also für $\alpha < 75\frac{1}{2}^\circ$ würde das Punktnetz durch die primitiven Strecken b und AB' gegeben sein, weil sie die kleinsten sind, und nicht durch a und b; in diesem Fall würde der Winkel γ', nicht der Winkel γ, in Betracht zu ziehen sein, der $> 75\frac{1}{2}^\circ$ ist.

Fig. 408.



Wird also ein Punktnetz angenommen, dessen primitive Strecken a und b bedeutend voneinander verschieden sind, so tritt nur das charakteristische Punktnetz hervor, bei welchem der Winkel γ nicht weit von 90° ist. Das betreffende Netz ist in Fig. 409 dargestellt.

Fig. 409.



Wir schließen daraus, daß obwohl die Ebenen-Punktnetze ineinander übergehen können, doch 3 Gruppen derselben ins Auge springen, die sich durch besondere Merkmale unterscheiden. Die 3 möglichen Grund-Punktnetze werden durch folgende Elemente bestimmt:

1. $a \equiv b$, $\gamma \equiv 90^\circ$, Fig. 406.
2. $a \equiv b$, $\gamma \equiv 60$, » 407.
3. $a \lesseqgtr b$, » 409.

Wir wollen sie näher untersuchen und benennen.

1. Diharmonisches Punktnetz. Für $a \equiv b$ und $\gamma \equiv 90^\circ$, Fig. 406, treten 2 Richtungen, x und y, stark hervor, deren Dichtigkeit die größte und nahezu dieselbe ist. Zwei andere Richtungen tt und $t_1 t_1$ haben auch untereinander nahezu die gleiche Dichtigkeit und liegen harmonisch in bezug auf die 2 ersten xx und yy. In Fig. 406, S. 325, sind diese 4 Richtungen von einem Punkt aus stark ausgezogen.

Wenn wir irgend welche andere Richtung ziehen, die eine gewisse Dichtigkeit hat, so lassen sich mit ihr 4 Richtungen ziehen, $l_1 l_2 l_3 l_4$, deren Dichtigkeit nahezu dieselbe ist, und welche die besondere Lage haben, daß sie sowohl von den Hauptrichtungen xx und yy, also auch von den Richtungen tt und $t_1 t_1$ harmonisch getrennt werden. Also sind z. B. $l_1 l_2$ harmonisch getrennt von x und y, sowie l_2 und l_3 harmonisch getrennt sind von t und t_1.

Es ist also passend, ein solches Punktnetz dibarmonisch zu nennen, entsprechend einer diharmonischen Kristallfläche. Darin sind 2×2 harmonische Richtungen hervorzuheben, nämlich xx, yy, tt, $t_1 t_1$, in bezug auf welche alle Richtungen von nahezu derselben Dichtigkeit zweifach harmonisch gelegen sind.

2. Triharmonisches Punktnetz. Für $a \equiv b$, $\gamma = 60^\circ$, Fig. 407, treten 3 Richtungen xx, yy, uu hervor, für welche die Dichtigkeit nahezu dieselbe ist. Außerdem treten auch die 3 Richtungen $t_1 t_1$, $t_2 t_2$, $t_3 t_3$ stark hervor. Letztere bilden mit irgend einer der ersteren ein harmonisches Doppelverhältnis. Ein gleiches Verhältnis bilden die ersteren mit einer der letzteren. Also sind die 6 Richtungen untereinander harmonisch gelegen. Außerdem lassen sich, wenn eine beliebige Richtung wie l_1 gezogen wird, mit ihr 6 Richtungen ziehen, $l_1 l_2 l_3 l_4 l_5 l_6$, deren Dichtigkeit dieselbe ist und welche die besondere Lage haben, daß zwei derselben durch zwei der vorigen Richtungen harmonisch getrennt werden. Also sind l_1 und l_2 harmonisch getrennt durch t_1 und u, sowie l_2 und l_3 harmonisch getrennt werden von t_2 und x usw. Es ist also passend, das vorliegende Punktnetz triharmonisch, einer triharmonischen Kristallfläche entsprechend, zu heißen. Hexaharmonisch kann man es benennen, wenn das Punktnetz eine besondere Lage im Raume annimmt, wie wir später sehen werden. Darin machen sich besonders geltend 2×3 harmonische Richtungen x, y, u, t_1, t_2, t_3, in bezug auf welche alle Richtungen von nahezu derselben Dichtigkeit dreifach harmonisch gelegen sind.

3. Monoharmonisches Punktnetz. Für $a \gtreqless b$, Fig. 409, treten 2 Richtungen xx, yy besonders hervor, deren Dichtigkeiten die kleinsten sind im Verhältnis zu allen andern möglichen homologen Richtungen. Wenn irgend welche Richtung, z. B. l_1 gezogen wird, so lassen sich mit ihr nur 2 Richtungen, l_1 und l_2, ziehen, welche nahezu die gleiche Dichtigkeit und eine solche Lage besitzen, daß sie von xx und yy harmonisch getrennt werden. Auch dieses Netz wird passend monoharmonisch, einer monoharmonischen Kristallfläche entsprechend, benannt werden können. Hier treten die 2 harmonischen Richtungen xx und yy hervor, welche alle Richtungen von nahezu derselben Dichtigkeit einfach harmonisch trennen.

§ 156. Dichtigkeit der Grund-Punktnetze.

Die beschriebenen Ebenen-Punktnetze haben verschiedene Dichtigkeiten resp. verschiedenen spezifischen Flächeninhalt, sodaß sie, unter sonst gleichen Verhältnissen, dadurch unterschieden werden können.

Im diharmonischen Punktnetz ist nahezu $a = b$ und $\gamma = 90^\circ$, also sein spezifischer Flächeninhalt

(74) $$i_1 = a^2.$$

Im triharmonischen Punktnetz haben wir annähernd $a = b$ und $\gamma = 60^\circ$, demnach sein spezifischer Flächeninhalt

(75) $$i_2 = 0{,}87\,a^2.$$

Endlich zeigt das monoharmonische Punktnetz $a \gtreqless b$ und nahezu $\gamma = 90^\circ$, also

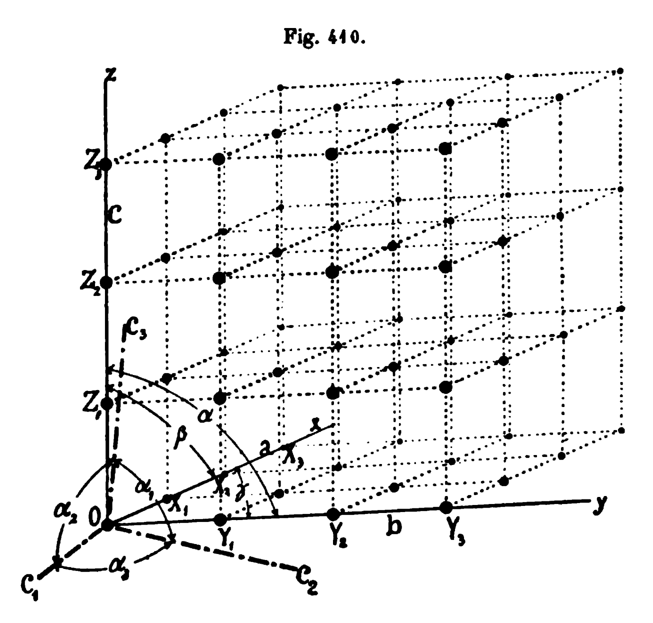
(76) $$i_3 = ab.$$

Für $a = 2b$ wird $i_3 = 0{,}50\,a^2$,
» $a = 3b$ » $i_3 = 0{,}33\,a^2$,
» $a = 4b$ » $i_3 = 0{,}25\,a^2$ usw.

§ 157. Raum-Punktgitter.

Ein Punktgitter, auch Raumgitter genannt, wird uns das geometrische Gebilde eines homogenen anisotropen Raumes geben. Ein Punktgitter wird natürlich aus homologen Punkten, Punktreihen und Punktnetzen bestehen.

Fig. 410.



Wir nehmen, vgl. Fig. 410, irgend welchen Punkt O, und ziehen durch denselben 3 homologe Punktreihen Ox, Oy, Oz, welche Punkte enthalten werden, die mit O homolog sind. Die primitiven Strekken dieser 3 Punktreihen mögen a, b, c sein. Wir betrachten zuerst eine der Punktreihen, z. B. Ox und ziehen durch ihre homologen Punkte $X_1, X_2, X_3, \ldots$ homologe Punktnetze, welche mit den 2 andern homologen Reihen Oy und Oz parallel laufen. Desgleichen ziehen wir durch alle homologen Punkte Y_1, Y_2, Y_3, ... der

Punktreihe Oy homologe Punktnetze, welche mit den homologen Punktreihen Ox und Oz parallel laufen. Endlich verfahren wir auf dieselbe Weise mit den homologen Punkten der dritten Punktreihe. Dadurch entstehen 3 Scharen von homologen Punktnetzen, deren Schnittpunkte homologe Punkte sein müssen und ein Bild des Raum- oder Punktgitters geben. Durch irgend welchen andern Punkt des Raumes, wie O, geht ein analoges System von 3 Scharen von homologen Punktnetzen, die ein Punktgitter ausmachen. Man kann stets 8 Punkte eines Punktgitters so wählen, daß sie die Ecken eines Parallelopipedons seien; so kann man also unendlich viele Parallelopipeda auf diese Art konstruieren, welche in einem Raumgitter enthalten sind. Dasjenige derselben, dessen Seiten und Inhalt am kleinsten sind, heißt das primitive Parallelopipedon, seine Seiten die primitiven Punktreihen und seine Flächen die primitiven Punktnetze des Punktgitters. Die primitiven Strecken des Raumgitters werden mit a, b, c und die einschließenden Winkel (auch Hauptwinkel genannt) mit α, β, γ bezeichnet; also ist α der Winkel zwischen b und c, β zwischen c und a und γ der Winkel zwischen a und b. Außerdem sollen α_1, α_2, α_3 die Winkel sein, welche beziehungsweise die primitiven Punktnetze xy mit xz, yz mit xy und xz mit yz einschließen.

In der Fig. 410 bedeuten noch Oc_1, Oc_2 und Oc_3 die Normalen der genannten primitiven Punktnetze.

Um den Inhalt des primitiven Parallelopipedons zu bestimmen, haben wir den Inhalt des primitiven Parallelogramms eines primitiven Punktnetzes mit der Höhe des Parallelopipedons zu multiplizieren.

Der Flächeninhalt des primitiven Parallelogramms auf dem Punktnetz xz ist, wie früher angegeben:

$$c_2 = ac \sin\beta .$$

Die Höhe h_y des primitiven Parallelopipedons in bezug auf die Ebene xz wird offenbar

$$h_y = b \sin\varkappa$$

sein, wenn $\varkappa$ den Winkel bedeutet, welchen die Richtung y mit der Ebene xz einschließt.

Wir sehen aus der Fig. 411, wo das sphärische Dreieck mit den Winkeln α, β, γ konstruiert ist, daß, wenn man von y die Normale $\varkappa$ auf xz fällt,

$$\sin\varkappa = \sin\gamma \cdot \sin\alpha_1 = \sin\alpha \cdot \sin\alpha_3$$

ist. Also wird der Inhalt des primitiven Parallelopipedons abc folgender:

$$I = abc \cdot \sin\Phi \tag{77}$$

sein, indem abgekürzt

$$\sin\Phi = \sin\alpha \sin\beta \sin\alpha_3 = \sin\beta \sin\alpha \sin\alpha_1 = \sin\gamma \sin\alpha \sin\alpha_2 \tag{78}$$

gesetzt worden ist.

§ 158. Ausdrücke des Volumen des primitiven Parallelopipedons.

Wenn man mit V irgend welchen Rauminhalt bezeichnet, wo n Anzahl primitive Parallelopipeda enthalten sind, so entspricht die Konstante

$$\frac{n}{V}$$

der Anzahl primitiver Parallelopipeda, welche in der Volumeneinheit enthalten sind. Man kann daher unter Dichtigkeit $\varDelta$ des Raumgitters dieses Verhältnis verstehen, also schreiben:

$$\varDelta = \frac{n}{V} = \frac{\nu}{1}, \tag{79}$$

wo ν eben die Anzahl der primitiven Parallelopipeda pro Volumeneinheit bedeutet. Anderseits wenn man den Volumeninhalt I des primitiven Parallelopipedons mit der Anzahl n der primitiven Parallelopipeda, welche in dem Volumen V enthalten sind, multipliziert, erhält man wieder den gesamten Volumeninhalt V, also

$$V = nI, \tag{80}$$

woraus folgt

$$\varDelta = \frac{1}{I}. \tag{80a}$$

Man ist also berechtigt, unter Dichtigkeit eines Punktgitters den reziproken Wert des Inhalts des primitiven Parallelopipedons zu verstehen.

Und da dieser Inhalt der reziproke Wert der Dichtigkeit ist, also

$$I = \frac{1}{\varDelta}, \tag{80b}$$

so bedeutet er auch das spezifische Volumen des Punktgitters, d. h. dasjenige Volumen, welches durch die Masseneinheit besetzt ist.

Wir können dem Inhalt I auch eine andere Form geben: Mit (Gl. 69, S. 321)

$$\begin{cases} c_1 = bc \sin\alpha \\ c_2 = ca \sin\beta \\ c_3 = ab \sin\gamma \end{cases} \tag{81}$$

haben wir die Ausdrücke für den spezifischen Inhalt der Punktnetze beziehungsweise yz, zx und xy angegeben. Multiplizieren wir diese 3 Ausdrücke miteinander, so folgt:

$$c_1 c_2 c_3 = (abc)^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma \tag{82}$$

oder

$$\frac{c_1 c_2 c_3 \cdot \sin\alpha \sin\beta \sin^2\alpha_3}{\sin\gamma} = (abc)^2 \sin^2\alpha \cdot \sin^2\beta \cdot \sin^2\alpha_3 = I^2.$$

Nun aber folgt aus dem sphärischen Dreieck der Fig. 111:

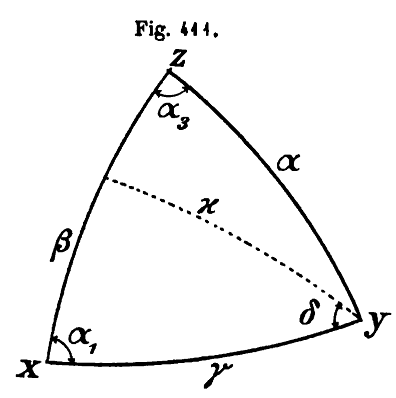
$$\frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_3},$$

also auch:

$$I^2 = c_1 c_2 c_3 \sin\Psi, \tag{83}$$

wenn für die Verkürzung:

Fig. 411.



$$(84)\quad \begin{cases} \sin\Psi = \sin\alpha \sin\alpha_2 \sin\alpha_3 \\ \quad\;\; = \sin\beta \sin\alpha_3 \sin\alpha_1 \\ \quad\;\; = \sin\gamma \sin\alpha_1 \sin\alpha_2 \end{cases}$$

gesetzt wird.

Wenn die Verhältnisse

$$(85)\qquad c_1 : c_2 : c_3 = m_1 : m_2 : m_3$$

bekannt sind, und durch irgend welchen Weg das spezifische Volumen I des Punktgitters erforscht wird, können auch die spezifischen Inhalte c_1, c_2, c_3 der primitiven Ebenen-Punktnetze bestimmt werden.

Aus den Beziehungen

$$c_1 : c_2 : c_3 = m_1 : m_2 : m_3 \quad \text{und} \quad I^2 = c_1 c_2 c_3 \sin\Psi$$

folgt sofort:

$$(86)\qquad \begin{cases} c_1 = \sqrt[3]{\dfrac{I^2}{\sin\Psi} \cdot \dfrac{m_1^2}{m_2 m_3}} \\ c_2 = \sqrt[3]{\dfrac{I^2}{\sin\Psi} \cdot \dfrac{m_2^2}{m_3 m_1}} \\ c_3 = \sqrt[3]{\dfrac{I^2}{\sin\Psi} \cdot \dfrac{m_3^2}{m_1 m_2}}. \end{cases}$$

Wenn wir die Größen c_1, c_2, c_3 numerisch auf die Normalen auftragen, welche auf den respektiven Punktnetzen yz, zx und xy senkrecht stehen, vergl. Fig. 410, so bedeutet der Ausdruck $c_1 c_2 c_3 \sin\Psi$ den Inhalt des Parallelopipedons, welches mit den Strecken $c_1 c_2 c_3$ konstruiert ist. Und dieser Inhalt muß eben das Quadrat des Inhalts desjenigen Parallelopipedons bedeuten, welches mit den Strecken a, b, c konstruiert wird, denn jede Größe c_1, c_2, c_3 bedeutet schon einen Flächeninhalt.

§ 159. Verteilung der Dichtigkeit im Raumgitter.

Die 3 primitiven Ebenen-Punktnetze, welche das Raumgitter bestimmen, sind der Lage und dem Wert nach gegeben; man soll untersuchen, welche Beziehung besteht zwischen diesen 3 Punktnetzen und irgend einem Punktnetz, das im Raumgitter gezogen werden kann. Der Inhalt des primitiven Parallelogramms von dem Punktnetz yz sei c_1, derjenige des Punktnetzes zx sei c_2, und derjenige des Punktnetzes xy sei c_3. Diese 3 Werte werden auf die bezüglichen Normalen aufgetragen, die den Punktnetzen yz, zx und xy angehören, Fig. 410. Auf c_1 tragen wir ein Vielfaches von c_1 auf, nämlich $h_1 c_1$, auf c_2 ein Vielfaches von c_2, nämlich $h_2 c_2$, und auf c_3 ein Vielfaches von c_3, nämlich $h_3 c_3$, wie in Fig. 412 angegeben ist. Daraufhin wird die Resultante c_h aus den Komponenten $h_1 c_1$, $h_2 c_2$, $h_3 c_3$ konstruiert. Dieselbe wird offenbar den

Inhalt des primitiven Parallelogramms von demjenigen Punktnetz angeben, welches auf c_h senkrecht steht; das geht aus der Konstruktion des Raumgitters hervor. Durch die 3 Zahlen h_1, h_2, h_3, welche relative Primzahlen sein müssen, wird der Lage und dem Werte nach ein Punktnetz des Raumgitters bestimmt. Diese 3, »Indizes« genannte Zahlen werden zu einem Symbol des Punktnetzes vereinigt $(h_1 h_2 h_3)$. Die Symbole der Punktnetze yz, zx und xy sind beziehungsweise (100), (010) und (001).

Aus Gleichung (81) geht die Beziehung

$$(81\,\mathrm{a}) \qquad c_1 : c_2 : c_3 = \frac{\sin\alpha}{a} : \frac{\sin\beta}{b} : \frac{\sin\gamma}{c}$$

hervor, und aus der letzteren erhalten wir:

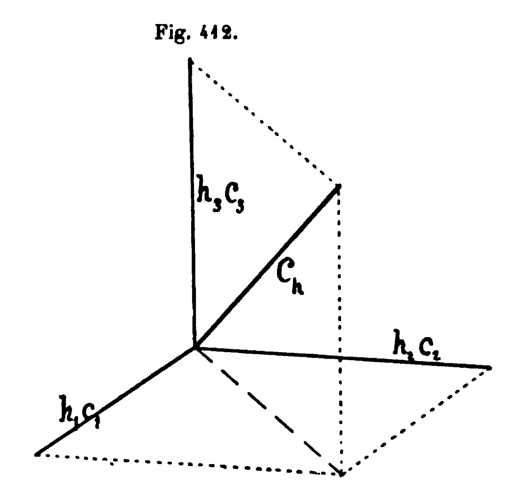
$$(81\,\mathrm{b}) \qquad h_1 c_1 : h_2 c_2 : h_3 c_3 = \frac{\sin\alpha}{\frac{a}{h_1}} : \frac{\sin\beta}{\frac{b}{h_2}} : \frac{\sin\gamma}{\frac{c}{h_3}}\,.$$

Diese Beziehung drückt aus, daß das Ebenen-Punktnetz (h_1, h_2, h_3) auf den drei primitiven Richtungen x, y, z (Fig. 410) Strecken abschneidet, welche sich verhalten wie

$$\frac{a}{h_1} : \frac{b}{h_2} : \frac{c}{h_3}\,.$$

In einem Raumgitter lassen sich sehr viele Ebenen-Punktnetze konstruieren, zwischen welchen eine wichtige Unterscheidung gemacht werden kann. Bei einigen Punktnetzen nämlich ist der Inhalt des primitiven Parallelogramms zugleich der spezifische Flächeninhalt, d. h. der reziproke Wert der Dichtigkeit; bei andern besteht diese Beziehung durchaus nicht.

Fig. 412.



Wir wollen annehmen, daß bei den drei primitiven Punktnetzen yz, zx und xy das primitive Parallelogramm zugleich dem spezifischen Flächeninhalt entspreche. Also sei c_1 der spezifische Inhalt der Ebene yz, c_2 der Ebene zx und c_3 der Ebene xy (Fig. 410). Wenn irgend welche Ebene im Raumgitter gezogen wird, welche einen sehr kleinen Winkel mit dem Ebenen-Punktnetz xy einschließt, so wird sein primitives Parallelogramm einen sehr großen Inhalt besitzen, und zwar um so größer, je mehr sich das gegebene Punktnetz der Ebene xy anschließt. Die Dichtigkeit des einen Punktnetzes kann aber nicht sehr verschieden sein von derjenigen des andern Punktnetzes. Das können wir uns auf folgende Weise darlegen: Wir wollen die angenommene Ebene durch den Punkt O (Fig. 410) gehen lassen; sie wird Punkte enthalten,

welche mit O homolog sind, die sehr weit von O abstehen und zwar um so mehr, je kleiner der Winkel zwischen der betrachteten Ebene und der Ebene xy ist. Wenn aber die homologen Punkte so weit voneinander stehen, werden Punkte vorhanden sein, welche zwar mit O nicht homolog sind, aber solchen physikalischen Größen entsprechen, die nicht sehr verschieden sein werden von denjenigen, welche in den homologen Punkten des Punktnetzes xy gelten, und zwar werden sie um so weniger verschieden von den letzten sein, je kleiner der Winkel ist zwischen der betrachteten Ebene und der Ebene xy.

Diese Betrachtung erklärt die Tatsache, daß die Punktnetze in einem Raumgitter Dichtigkeiten besitzen, welche um so weniger voneinander verschieden sind, je kleinere Winkel sie miteinander einschließen. Man kann sich also nicht denken, daß, wenn das Punktnetz xy von seiner Lage um nur einige Minuten abweicht, plötzlich eine beträchtliche Änderung in der Dichtigkeit einträte, wegen der in der Nähe des Punktnetzes vorhandenen Masse. Solche Punktnetze können also nicht der Art betrachtet werden, daß ihr spezifischer Inhalt dem Inhalte des primitiven Parallelogramms gleich wäre. Sind also c_1, c_2, c_3 die kleinsten Werte des spezifischen Inhalts im Raumgitter, so stellen sie auch Minima dar. Andere Minima werden im Raumgitter auch vorhanden sein; und zwar müssen sie solchen Punktnetzen entsprechen, welche recht große Winkel mit den primitiven Punktnetzen yz, zx und xy einschließen. Die Punktnetze mit den Symbolen (110), (101), (011), (111), (121), (122) usw. können also Minima entsprechen. Im allgemeinen werden solche Punktnetze minimalen spezifischen Inhalt besitzen, deren Indizes h_1, h_2, h_3 sehr klein sind. Das läßt sich natürlich nur durch Erfahrung bestimmen. Zwischen den Minimalwerten liegen dann Maximalwerte, die naturgemäß solchen Punktnetzen angehören, welche ebenfalls keine Indizes haben.

Es gibt also im Raumgitter Punktnetze, welche maximalen oder minimalen spezifischen Inhalt besitzen und gleich dem bezüglichen primitiven Parallelogramm sind, und Punktnetze, deren spezifischer Inhalt dem minimalen oder maximalen sich um so mehr anschließt, je mehr dieselben den Punktnetzen mit Minimum oder Maximum der Dichtigkeit nahe kommen.

Ähnliche Verhältnisse haben wir auch bei den Kristallen gefunden. Auch hier gibt es Flächen, welche dominieren und solche, welche stets zurücktreten und höchst unwahrscheinlich erscheinen.

Es liegt nahe, die dominierenden Flächen einer Kristallgrundgestalt mit denjenigen Ebenen-Punktnetzen, deren spezifischer Inhalt der kleinste ist, in Übereinstimmung zu bringen.

Diese Hypothese hat eine gewisse Berechtigung. Die meist dominierenden Flächen einer Grundgestalt sind dadurch eigentümlich, daß senkrecht zu denselben das Wachstum des Kristalls ein Minimum sein muß; also längs der dominierenden Flächen das Wachstum Minimum und somit dichter als längs jenen Flächen, worauf senkrecht das Wachstum Minimum ist.

Mit Hilfe dieser Hypothese kann das Raum-Punktgitter, welches einer bestimmten Grundgestalt angehört, konstruiert werden. Eine Grundgestalt wird sich von einer andern Grundgestalt auch dadurch unterscheiden, daß beide verschiedene Raumgitter haben werden.

§ 160. Beziehung zwischen Molekularvolumen, Äquivalentvolumen und spezifischem Inhalt im Raumgitter.

Wenn wir den Volumeninhalt I des primitiven Parallelopipedons mit dem spezifischen Gewicht S multiplizieren, erhalten wir das Gesamtgewicht des genannten Parallelopipedons, also IS. Beziehen wir das Molekulargewicht auf dasjenige des Wassers und bezeichnen wir es mit M'; ferner sei μ die Anzahl der chemischen Moleküle, welche im primitiven Parallelopepidon enthalten sind, dann ist offenbar das Gesamtgewicht des genannten primitiven Parallelepipedons auch $\mu M'$. Wir können beide Ausdrücke gleich setzen:

$$IS = \mu M',$$

woraus folgt

$$I = \mu \frac{M'}{S} = \mu M_v,$$

d. h. der spezifische Volumeninhalt des Raumgitters ist gleich dem Molekularvolumen multipliziert mit der Moleküleanzahl, welche im primitiven Parallelopipedon enthalten sind.

Das Molekulargewicht M einer Substanz wird aber gewöhnlich nicht auf das Molekulargewicht des Wassers, sondern auf dasjenige des Wasserstoffatoms bezogen. Nun ist das Molekulargewicht des Wassers gleich 18, wenn das Gewicht des Wasserstoffatoms 1 ist. Also

$$M = 18M'.$$

Schreiben wir M anstatt M', so bedeutet $\frac{M}{S} = \Gamma$ eine Zahl, welche mit dem Molekularvolumen zu vergleichen ist und passend Äquivalentvolumen genannt werden kann, wie wir bereits getan haben. Wir können also den spezifischen Inhalt I des Raumgitters mit dem Äquivalentvolumen vergleichen, da für alle Substanzen das Molekulargewicht in bezug auf das Atomgewicht des Wasserstoffs genommen wird, somit

$$I = \mu\ \Gamma.$$

Um über die Anzahl μ Moleküle, welche in einem Kristallteilchen enthalten sind, Aufschluß zu gewinnen, stellen wir folgende Betrachtung auf: Ist μ verschieden von 1, also z. B. $\mu = 2$, so werden wir durch Teilung auf immer kleinere Stücke kommen, bis schließlich das Teilchen zurückbleibt, welches aus zwei Molekülen besteht. Ein solches Teilchen hat das spezifische Gewicht S wie der Kristall. 2 Teilchen, oder 4 Moleküle, haben ebenfalls das spezifische Gewicht S; also ist die Entfernung von 2 Molekülen untereinander die gleiche, wie zwischen den 4 Molekülen untereinander. Es kann infolgedessen kein Unterschied bestehen, sei es daß wir das Kristallteilchen aus 4, aus 3 oder aus 2 Molekülen betrachten.

Das will heißen, daß das kleinste Kristallteilchen das chemische Molekül selbst oder daß

$$\mu = 1 \tag{87}$$

ist.

Wir kommen somit zu der einfachen und wichtigen Beziehung

$$I = \Gamma. \tag{88}$$

Daraus können wir den spezifischen Inhalt der primitiven Punktnetze des Raumgitters, d. h. die dominierenden Flächen des Kristalls berechnen. Setzen wir Γ an Stelle von I in den Gleichungen (86), so bekommen wir:

$$\left\{\begin{aligned} c_1 &= \sqrt[3]{\frac{\Gamma^2}{\sin\Psi}\cdot\frac{m_1^2}{m_3 m_2}} \\ c_2 &= \sqrt[3]{\frac{\Gamma^2}{\sin\Psi}\cdot\frac{m_2^2}{m_1 m_3}} \\ c_3 &= \sqrt[3]{\frac{\Gamma^2}{\sin\Psi}\cdot\frac{m_3^2}{m_2 m_1}}. \end{aligned}\right. \tag{89}$$

Wir können durch ein ähnliches Verfahren auch die primitiven Strecken a, b, c aus der Beziehung

$$a : b : c = n_1 : n_2 : n_3$$

berechnen. Sei k eine Konstante, welche die Gleichungen vermittelt:

$$\begin{aligned} a &= k n_1 \\ b &= k n_2 \\ c &= k n_3. \end{aligned}$$

Nun geht durch Multiplizieren miteinander

$$abc = k^3 n_1 n_2 n_3$$

hervor und da

$$abc \sin\Phi = I$$

ist, (Gleichung (82)), wo

$$\sin\Phi = \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\alpha_3 \tag{90}$$

bedeutet, so wird

$$k = \sqrt[3]{\frac{I}{\sin\Phi}\cdot\frac{1}{n_1 n_2 n_3}}, \tag{91}$$

wobei $I = \Gamma$ ist; folglich

$$\left\{\begin{aligned} a &= \sqrt[3]{\frac{\Gamma}{\sin\Phi}\cdot\frac{n_1^2}{n_2 n_3}} = n_1\sqrt[3]{\frac{\Gamma}{\sin\Phi}\cdot\frac{1}{n_1 n_2 n_3}} \\ b &= \sqrt[3]{\frac{\Gamma}{\sin\Phi}\cdot\frac{n_2^2}{n_3 n_1}} = n_2\sqrt[3]{\frac{\Gamma}{\sin\Phi}\cdot\frac{1}{n_1 n_2 n_3}} \\ c &= \sqrt[3]{\frac{\Gamma}{\sin\Phi}\cdot\frac{n_3^2}{n_1 n_2}} = n_3\sqrt[3]{\frac{\Gamma}{\sin\Phi}\cdot\frac{1}{n_1 n_2 n_3}}. \end{aligned}\right. \tag{92}$$

Man nennt die so berechneten a, b, c nach W. Muthmann die topischen Achsen.

Steinsalz $NaCl$ und Sylvin KCl kristallisieren kubisch isoharmonisch. Ihre Konstanten sind folgende

$$a : b : c = 1 : 1 : 1 \qquad \alpha = \beta = \gamma = 90^\circ \text{ oder}$$
$$c_1 : c_2 : c_3 = 1 : 1 : 1 \qquad \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 90^\circ.$$

Infolgedessen wird

$$a = b = c = \sqrt[3]{\Gamma}$$
$$c_1 = c_2 = c_3 = \sqrt[3]{\Gamma^2}.$$

Für Steinsalz ist $M_1 = 58$, $s_1 = 2{,}15$, $\Gamma_1 = 27$,
» Sylvin » $M_2 = 74$, $s_2 = 2{,}00$, $\Gamma_2 = 37$.

Daraus

für Steinsalz: $a = b = c = \sqrt[3]{\Gamma} = 3$; $c_1 = c_2 = c_3 = 9{,}0$
» Sylvin: $a = b = c = 3{,}34$; $c_1 = c_2 = c_3 = 11{,}15$.

Die Moleküle des Sylvins stehen also mehr auseinander als die Moleküle des Steinsalzes und sie sind auch schwerer als die letztern.

§ 161. Grund-Raumgitter.

Ein Raumgitter ist vollständig bestimmt, wenn die 6 Größen a, b, c und α, β, γ, welche sich auf die 3 primitiven Strecken des Raumes beziehen, gegeben sind. Auch wird ein Raumgitter vollkommen bestimmt, wenn die 6 Größen c_1, c_2, c_3 und α_1, α_2, α_3 gegeben werden. Die spezifischen Flächeninhalte c_1, c_2, c_3 gehen aus den primitiven Strecken a, b, c und aus den sie einschließenden Winkeln α, β, γ hervor. Siehe Gl. (81 a.) Zum Bau des Raumgitters können wir also sowohl von a, b, c als auch von c_1, c_2, c_3 ausgehen. Wir wollen aber vorziehen, nicht von den primitiven Strecken, sondern von den primitiven Punktnetzen Gebrauch zu machen.

Wir können uns eine große Zahl von verschiedenen Punktnetzen, die ineinander übergehen, denken; infolgedessen sind wir imstande, uns auch eine große Zahl von verschiedenen Raumgittern vorzustellen. Da aber alle möglichen Ebenen-Punktnetze in drei typische Punktnetze untergebracht werden können, die durch ganz besondere Merkmale zu unterscheiden sind, so werden sich auch die Raumgitter in besondere Grund-Raumgitter unterbringen lassen, die ebenfalls durch besondere Merkmale hervortreten. Wir werden zu den Grund-Raumgittern gelangen, wenn wir die drei möglichen monoharmonischen, diharmonischen und tri- resp. hexaharmonischen Ebenen-Punktnetze nach allen möglichen Arten zusammensetzen.

1. Die drei primitiven Ebenen-Punktnetze sind diharmonisch. Ein so gebautes Raumgitter wird aus primitiven Parallelopipeda bestehen, welche kubusartig sind. Die drei primitiven Strecken werden sein

$$a \equiv b \equiv c$$

und die Winkel

$$\alpha \equiv \beta \equiv \gamma \equiv 90^\circ.$$

Die drei primitiven Flächeninhalte des Raumgitters werden sein:

$$c_1 \equiv c_2 \equiv c_3$$

und die einschließenden Winkel

$$\alpha_1 \equiv \alpha_2 \equiv \alpha_3 \equiv 90^\circ.$$

Wir nennen ein solches Raumgitter kubisches oder hexaedrisches Gitter.

Im Grenzfalle ist

$$a = b = c$$

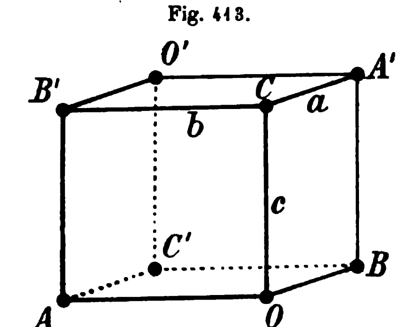
und $$\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ.$$

Der spezifische Inhalt der drei primitiven Punktnetze wird

$$c_1 = c_2 = c_3 = a^2.$$

Fig. 413 zeigt das primitive Parallelopipedon des kubischen Gitters. Die homologen Punkte $A'B'O$, sowie ABO' bilden zwei triharmonische Punktnetze mit einem Flächeninhalt von offenbar

Fig. 413.



$$2a^2 \sin 60^\circ = 1{,}74\, a^2 = a^2\sqrt{3}.$$

Gleiche triharmonische Punktnetze sind auch BCO' und $B'C'O$.

Die diagonalen Punktnetze $AB'A'B$, $COC'O'$, $AO'A'O$, $BCB'C'$, $AC'A'C$ und $BOB'O'$ nähern sich dem monoharmonischen Netze und ihr spezifischer Flächeninhalt ist $a^2\sqrt{2} = 1{,}41\, a^2$.

2. Die 3 primitiven Punktnetze sind triharmonisch. Die primitiven Strecken werden sein

$$a \equiv b \equiv c$$

und die 3 Winkel

$$\alpha \equiv \beta \equiv \gamma \equiv 60^\circ.$$

Als Grenzfall wäre

$$a = b = c$$

und $$\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ.$$

Der spezifische Inhalt der 3 primitiven Punktnetze ist dann

$$c_1 = c_2 = c_3 = a^2 \sin 60^\circ = 0{,}87 a^2$$

und die sie einschließenden Winkel

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 70^\circ\, 32'.$$

Außer diesen 3 triharmonischen Punktnetzen tritt ein viertes solches Punktnetz auf, welches ebenfalls mit den vorigen $70^\circ\, 32'$ einschließt. Das primitive Parallelopipedon ist in Fig. 414 dargestellt. Die 4 triharmonischen Punktnetze heißen ABC', $AB'C'$, $A'BC'$ und $A'B'C'$; sie teilen den Raum in aus dem Oktaeder sich ergebende Parallelopipeda. Das Oktaeder ist regulär für $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$.

Dies Raumgitter wird **oktaedrisches Gitter** genannt.

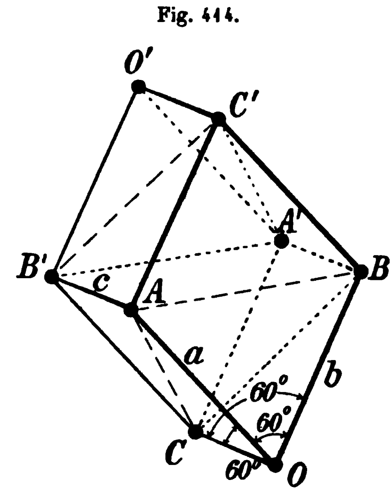
Die diagonalen Punktnetze dieses Gitters, sie heißen $AA'BB'$, $AA'CC'$ und $BB'CC'$, stehen nahezu aufeinander senkrecht wie im kubischen Gitter, sind diharmonisch und ihr spezifischer Inhalt ist

$$a^2,$$

d. h. größer als der spezifische Inhalt c_1, c_2, c_3 der diharmonischen Punktnetze.

Auch die Punktnetze wie $AA'OO'$, $OO'CC'$ usw. haben einen größeren spezifischen Inhalt, nämlich $1{,}41\,a^2$, als die diharmonischen und triharmonischen Punktnetze.

Fig. 414.



3. Von den 3 primitiven Punktnetzen sollen **zwei triharmonisch und eins diharmonisch sein.**

Dieser Fall schließt sich dem zweiten Fall an, da die 2 triharmonischen Punktnetze eben $OCAB'$ und $COA'B$ sind, während das diharmonische Netz $AA'BB'$ ist.

4. Es sollen von den 3 primitiven Punktnetzen **zwei diharmonisch und eins triharmonisch sein**, also ACO, BCO und OAB, wie Fig. 415 angibt.

Die Konstanten für dieses Raumgitter werden sein:

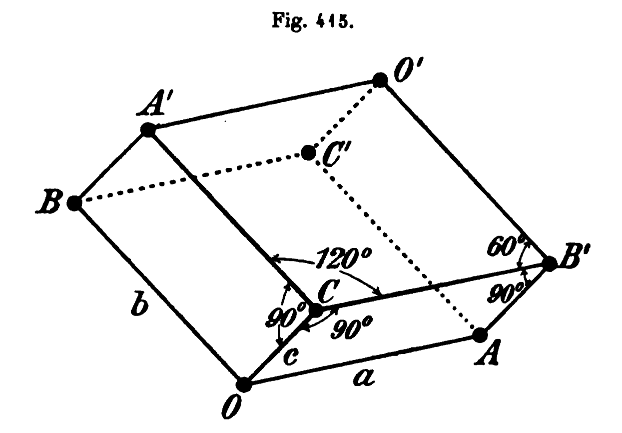
$$c_1 \equiv c_2 \equiv c_3,$$
$$\alpha_1 \equiv \alpha_2 \equiv 90^\circ,$$
$$\alpha_3 \equiv 60^\circ\ (120^\circ)$$

oder

$$a \equiv b \equiv c,\quad \alpha_1 \equiv \beta \equiv 90^\circ,\quad \gamma = 60^\circ.$$

Man beachte, daß in dem vorliegenden Raumgitter noch ein diharmonisches Punktnetz vorhanden ist, nämlich $OO'CC'$, welches gleich den 2 gegebenen diharmonischen Punktnetzen ist.

Fig. 415.



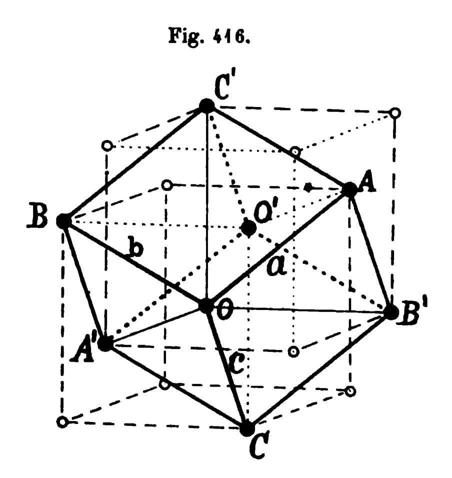
Mit Hilfe der 3 diharmonischen und des triharmonischen Punktnetzes läßt sich das Raumgitter in sechsseitige, fast reguläre Prismen teilen. Man nennt deshalb dieses Raumgitter **sechsgliedriges Raumgitter.**

5. Wenn wir uns auf die diharmonischen und triharmonischen Punktnetze beschränken um die Raumgitter aufzubauen, so sind letztere erledigt. Und

doch ist ein Zwischenfall möglich, der durch besondere Merkmale hervortritt. Es kann nämlich vorkommen, daß die 3 primitiven Punktnetze diharmonisch erscheinen, wie im kubischen Raumgitter, aber mit Neigung zum triharmonischen Netz, derart, daß noch 3 weitere Punktnetze im Raumgitter möglich und den gegebenen genau gleich sind.

Die 3 gegebenen Punktnetze mögen OBC, OAC und OAB der Fig. 416 sein.

Fig. 416.



Um das Raumgitter besser zu verstehen, sei der Grenzfall ins Auge gefaßt, resp. daß $a = b = c$ und $\alpha = \beta = \gamma = 109^\circ\,26'$ sei.

Außer den 8 homologen Punkten, welche die Ecken des primitiven Parallelopipedons bilden, sind in der Fig. 419 noch andere homologe Punkte des Raumgitters eingetragen. Aus dieser Darstellung geht hervor, daß das vorliegende, dodekaedrisches Gitter genannte Raumgitter durch Eintreten eines homologen Punktes im Zentrum des primitiven kubischen Parallelopipedons aus dem kubischen Gitter sich entwickelt.

Die primitiven Strecken a, b, c sind die Diagonalen des Kubus. Infolgedessen sind die 3 diagonalen Punktnetze $OO'CC'$, $OO'BB'$ und $OO'AA'$ untereinander und mit den primitiven Punktnetzen gleich.

Der spezifische Inhalt dieser 6 Punktnetze ist

$$c_1 = c_2 = c_3 = a^2 \sin 109^\circ\,26' = 0{,}943\,a^2$$

und die einschließenden Winkel:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 60^\circ \text{ (resp. } 120^\circ).$$

Der spezifische Inhalt der Punktnetze, welche dem Kubus angehören, ist $1{,}33\,a^2$; und derjenige der triharmonischen Punktnetze wie ABC ist $1{,}74\,a^2$.

Die Raumgitter in 1, 2 und 5 haben ein einfaches Parallelopipedon gemeinschaftlich, nämlich das kubische Parallelopipedon, aus welchem das primitive Parallelopipedon abgeleitet wird. Bei den hexaedrischen Raumgittern ist der Kubus das primitive Parallelopipedon; bei den oktaedrischen bilden zwei aus dem Kubus entstehende nahezu reguläre Tetraeder das primitive Parallelopipedon, und endlich erzeugen bei den dodekaedrischen Raumgittern die diagonalen Punktnetze des Kubus das primitive Parallelopipedon.

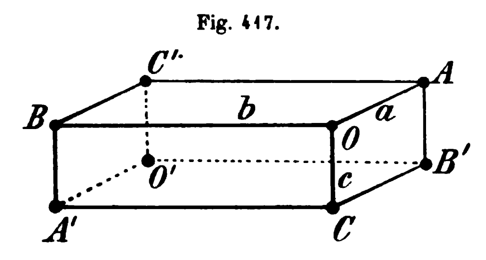
Zeichnet man also ein Raumgitter, dessen Parallelopipedon der Kubus ist, so stellt dieses das hexaedrische Raumgitter dar. Werden von den 8 homologen Punkten des kubischen Parallelopipedons nur 4 behalten, welche die Ecken eines nahezu regulären Tetraeders darstellen, und werden die übrigen

4 Punkte unterdrückt, so bleibt das oktaedrische Raumgitter übrig. Kommt endlich im Zentrum des kubischen Parallelopepidons ein homologer Punkt hinzu, so entwickelt sich das dodekaedrische Raumgitter. Also 2 ineinander greifende parallele identische hexaedrische Raumgitter bilden das dodekaedrische Raumgitter. Wir wollen diese 3 Raumgitter zusammenhalten und drei- und viergliedrig nennen.

6. Nachdem die Raumgitter erledigt sind, welche mit den diharmonischen und triharmonischen Punktnetzen als primitive Punktnetze sich bauen lassen, ziehen wir die monoharmonischen Punktnetze in Betracht.

Beobachten wir vorerst, welche Änderung die kubischen Gitter erfahren, wenn die Ebenen-Punktnetze monoharmonisch werden. Von den 3 primitiven Punktnetzen werden zwei monoharmonisch und eins bleibt diharmonisch; keine andere Wahl ist zulässig. Bei dieser Operation entstehen 2 verschiedene Raumgitter. Betrachten wir zuerst das eine; im Fall 7 werden wir dann das zweite Raumgitter beschreiben.

Fig. 417.



Das eine Raumgitter (in Fig. 417 dargestellt) ist derart, daß die 2 monoharmonischen Punktnetze einen kleineren spezifischen Flächeninhalt besitzen, als das diharmonische Punktnetz, also:

$$c_1 \equiv c_2 \text{ und } c_2 < c_3,$$

entsprechend

$$a \equiv b, \left.\begin{matrix} b \\ a \end{matrix}\right\} > c.$$

Die bezüglichen Winkel sind wie im kubischen Gitter:

$$\alpha_1 \equiv \alpha_2 \equiv \alpha_3 \equiv 90^\circ.$$

7. Das zweite hier zu behandelnde Raumgitter geht aus dem kubischen dadurch hervor, daß die 2 monoharmonischen Punktnetze größeren spezifischen Flächeninhalt besitzen als das diharmonische Punktnetz; also:

$$c_1 \equiv c_2, \; c_2 > c_3,$$

entsprechend

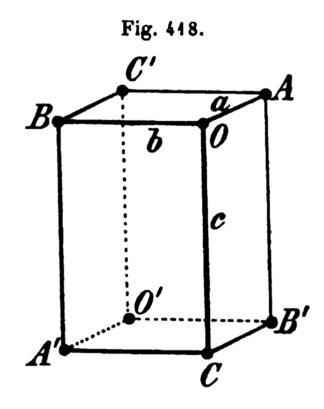
$$a \equiv b, \left.\begin{matrix} b \\ a \end{matrix}\right\} < c,$$

wie die Fig. 418 zeigt.

Die Winkel sind ebenfalls wie im kubischen Gitter

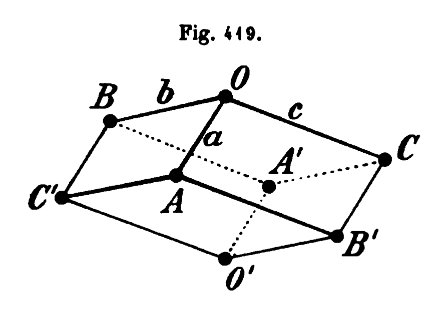
$$\alpha_1 \equiv \alpha_2 \equiv \alpha_3 \equiv 90^\circ.$$

Fig. 418.



Die 2 Raumgitter im Fall 6 und 7 haben etwas gemeinschaftlich, nämlich ein diharmonisches primitives Ebenen-Punktnetz und zwei monoharmonische primitive Punktnetze, welche bald kleineren, bald größeren Flächeninhalt besitzen als das diharmonische. Wir nennen diese 2 Raumgitter viergliedrig und unterscheiden sie als ein flaches, wenn $c_2 < c_3$, und als ein steiles, wenn $c_2 > c_3$ ist.

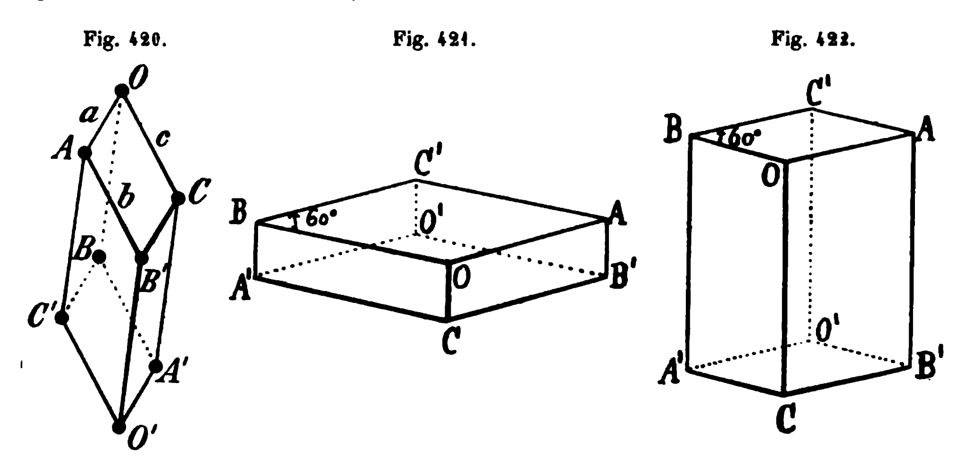
Fig. 419.



8. Denke man sich das dodekaedrische Raumgitter und stelle man sich vor, daß die Winkel α_1, α_2, α_3 ($\equiv 60^\circ$) kleiner werden als 60°. Das primitive Parallelopipedon wird flach, siehe Fig. 419, die 3 Punktnetze $O'BOB'$, $OAO'A'$ und $OCO'C'$ bleiben zwar gleich, werden aber monoharmonisch und ihr spezifischer Flächeninhalt wird bedeutend kleiner als derjenige der triharmonischen Punktnetze.

9. Stelle man sich dagegen vor, daß in dem dodekaedrischen Raumgitter die Winkel α_1, α_2, α_3 größer werden als 60°; das primitive Parallelopipedon wird sehr steil oder nach O und O' sehr spitzig aussehen, wie Fig. 420 zeigt. Die 3 Punktnetze $OAO'A'$, $OBO'B'$, $OCO'C'$ bleiben gleich, werden aber monoharmonisch, wie in Fall 8, und ihr spezifischer Flächeninhalt wird bedeutend größer als derjenige, der ebenfalls zum monoharmonischen übergehenden Punktnetze OAC, OBC und OAB.

Fig. 420. Fig. 421. Fig. 422.



Die 2 Raumgitter 8 und 9, welche aus dem dodekaedrischen abgeleitet worden sind, indem man das primitive Parallelopipedon etwas stumpfer oder spitzer werden läßt, haben einiges gemeinschaftlich, nämlich das Dreigliedrige der dodekaedrischen Raumgitter. Wir fassen sie daher in einer Gruppe zusammen und unterscheiden ein dreigliedriges flaches Raumgitter (8) Fig. 419 und ein dreigliedriges steiles Raumgitter (9) Fig. 420.

10. In Fall 4 haben wir ein sechsgliedriges Raumgitter konstruiert. Wir sind dazu gekommen durch die Verbindung eines triharmonischen Punktnetzes mit 2 diharmonischen Punktnetzen. Nun bleibt der Charakter des sechsgliedrigen Raumgitters auch dann, wenn die 2 Punktnetze monoharmonisch werden. Der Raum wird ebenfalls in dreiseitige Prismen eingeteilt, sei es daß 2 monoharmonische oder 2 diharmonische Punktnetze mit einem triharmonischen Punktnetz verbunden sind.

Wir benennen sie alle sechsgliedrige Raumgitter und unterscheiden ein flaches, wenn $c_1 \equiv c_2 < c_3$, siehe Fig. 421, und ein steiles, wenn $c_1 \equiv c_2 > c_3$, Fig. 422, ist. Das in Fig. 415 abgebildete sechsgliedrige Raumgitter stellt also ein Mittelglied zwischen den beiden dar.

§ 162. Zusammenstellung der möglichen homogenen Grundraumgitter.

I. Drei- und viergliedrige Raumgitter:
  1. hexaedrisch,
  2. oktaedrisch,
  3. dodekaedrisch.

II. Viergliedriges Raumgitter:
  a) flaches,
  b) steiles.

III. Dreigliedriges Raumgitter:
  a) flaches,
  b) steiles.

IV. Sechsgliedriges Raumgitter:
  a) flaches,
  b) mittelmäßiges,
  c) steiles.

Die hexaedrischen und oktaedrischen Raumgitter liegen offenbar zwischen den flachen und den steilen viergliedrigen Raumgittern; die dodekaedrischen Raumgitter dagegen zwischen den flachen und den steilen dreigliedrigen Raumgittern, so daß man die Raumgitter in drei Gruppen einteilen kann. Genau dies haben wir auch bei den Grundgestalten der Kristalle nachgewiesen.

§ 163. Vergleichung der Grund-Raumgitter mit den Grundgestalten der Kristalle.

Um alle möglichen Raumgitter zu gruppieren haben wir eine Einteilung der die Ebenen-Punktnetze bildenden Raumgitter aufgestellt, indem wir auf folgende Weise vorgingen:

Wie bemerkt wurde, können die Ebenen-Punktnetze von drei verschiedenen Arten sein, nämlich monoharmonisch, diharmonisch und triharmonisch, genau wie die Kristallflächen resp. die sie darstellenden Zonenbüschel.

Drei primitive Ebenen-Punktnetze setzen also das Raumgitter zusammen, und wenn wir nach allen möglichen Arten die drei primitiven Punktnetze kombinieren, erhalten wir die im vorigen Paragraphen zusammengestellten Grund-Raumgitter. Diese Einteilung der Grund-Raumgitter ist identisch mit der Einteilung der Grundgestalten der Kristalle.

Vergleichen wir die primitiven Ebenennetze des Raumgitters mit den Hauptflächen der Grundgestalt, so sehen wir darin etwas Gemeinschaftliches. Die primitiven Ebenen-Punktnetze weisen am meisten homologe Punkte auf, mehr als alle andern Punktnetze, die im Raumgitter gezogen werden können; folglich ist ihr spezifisches Parallelogramm das kleinste. Bei den Hauptflächen wirkt die kleinste Kohäsion; sie sind in der Grundgestalt am meisten entwickelt und stellen gewöhnlich auch die Spaltungsflächen dar, wenn die entsprechenden Kohäsionswerte scharfe Minima aufweisen, § 9, S. 11. Wie die Kohäsion bei den Hauptflächen Minimum ist, so entspricht der spezifische Inhalt der primitiven Punktnetze auch dem Minimum.

Stellen wir also die Hypothese auf, daß die primitiven Punktnetze eines Raumgitters mit den Hauptflächen einer Grundgestalt zu vergleichen sind; setzen wir ferner den spezifischen Inhalt eines primitiven Punktnetzes der auf die Hauptflächen wirkenden Kohäsion gleich und ebenso gleich die Lagen der Punktnetze und Hauptflächen, so erhalten wir Raumgitter, welche die Grundgestalten, d. h. welche das geometrische Bild des homogenen Zustandes darstellen werden. Nach dieser Hypothese werden alle Konsequenzen, welche sich auf die Grundgestalten beziehen, nämlich Einheitsflächen und Grundgesetz der Kristalle, durch das Raumgitter dargestellt.

Wir sind ferner imstande nachzuweisen, daß die Raumgitter ebenso wie die Grundgestalten gewisse Symmetrielemente besitzen können. Mögliche Symmetrien gibt es aber nur 7 und sie stimmen genau mit den 7 Syngonien der Grundgestalten überein.

Wenn daher Grundgestalten untereinander verglichen werden sollen, können zweierlei Wege eingeschlagen werden:

1. Entweder werden die Äquivalentvolumen berechnet und die Grundgestalten, welche naheliegende Äquivalentvolumen besitzen, nebeneinander gehalten, oder
2. werden die topischen Größen c_1, c_2, c_3 resp. a, b, c berechnet wie in § 160 und die Grundgestalten mit Hilfe ihrer Raumgitter nebeneinander gestellt.

Diese letztere Methode hatte W. Muthmann vorgeschlagen.

Mit dem Raumgitter allein kennen wir, wie schon früher bemerkt wurde, eigentlich die Struktur des Kristalls noch nicht, da eben dadurch noch immer unbekannt ist, wie die Masse in dem primitiven Parallelopipedon verteilt ist; mit der Grundgestalt allein ist zwar der Kristall auch physikalisch unbekannt.

Grundgestalt und Raumgitter sind zwei sich fast deckende Begriffe; jene stellt sich als das mittlere Gebilde der Beobachtungen, dieses als das geometrische Gebilde des Kristallwesens dar.

§ 164. Geschichtliches.

Bei R. J. Haüy (Essai d'une théorie sur la structure des cristaux, Paris 1781—1784) hatte der kleinste Teil eines Kristalles, d. h. das Kristallmolekül, die durch die Hauptflächen der Grundgestalt erzeugte Form. Die so gedachten Kristallmoleküle bauen zusammen ohne Zwischenräume den Kristall. Die gleichnamigen Punkte der Kristallmoleküle setzen zwar auch das Raumgitter zusammen, aber durch die Vorstellung Haüys hatte man wirklich eine physikalische Struktur des Kristalls gewonnen, also etwas mehr, als ein einfaches Raumgitter liefert. Die physikalischen Erscheinungen der Kristalle konnten mit dieser Vorstellung der Kristallstruktur nicht in Einklang gebracht werden.

A. Bravais (Journ. de l'Ecole polyt. Vol. 19. 33, 1850) nimmt an, daß die kristallisierte Materie aus kongruenten Molekülen besteht, deren Mittelpunkte resp. Massenpunkte ein Raumgitter bilden. Die Moleküle stehen auf gewissen Entfernungen, so daß dadurch die Ebenen-Punktnetze verschieden besetzt erscheinen. Bravais hatte 7 mögliche Molekelgitter resp. Raumgitter bekommen, die den 7 Syngonien der Krystalle entsprechen. Um die 32 Symmetrien zu erhalten dachte sich Bravais, daß die Moleküle diese 32 Symmetrien besitzen. Man könnte sich auf diese Weise auch die möglichen Harmonien der Raumgitter vorstellen.

Mit Bravais beginnt insofern die Theorie der Raumgitter, als er der erste war, der die möglichen Raumgitter mit den möglichen Syngonien resp. Grundgestalten identifizierte. Aber eigentlich steckt in der Strukturtheorie Haüys schon das Prinzip des Raumgitters als geometrisches Bild des homogenen Raumes, und vor Haüy war es sogar Delafosse, der auf die Verteilung der Kristallteilchen nach einem Raumgitter aufmerksam machte.

E. Mallard (Annales des Mines, 1876, **10,** 60 ff.) hatte sich der Bravaisschen Raumgittertheorie angeschlossen. Bei Mallard tritt aber zum ersten Mal das Prinzip der Harmonie in den Vordergrund, so daß eigentlich die Einteilung der Raumgitter von der hier angewendeten nicht weit verschieden ist. Man findet nämlich bei Mallard die pseudokubischen Raumgitter, welche unsern drei- und viergliedrigen, dreigliedrigen und viergliedrigen Raumgittern entsprechen, und die pseudohexagonalen, welche mit unsern sechsgliedrigen identisch sind.

Die verschiedene Theorie der Kristallstruktur fängt mit L. Sohncke (1879), Chr. Wiener (1868) oder eigentlich mit C. Jordan (1869) an. Die Hauptsache bei der Sohnckeschen Theorie der Kristalle ist die, daß die Symmetrie nicht in den Kristallmolekülen, sondern in jedem Molekelhaufen steckt, so daß daraus sich indirekt das Prinzip des Raumgitters herausstellt.

Die weitere Entwicklung der Kristallstrukturtheorie durch Wulff, Fedorow, F. Klein, Schoenflies, Barlow usw., wird im nächsten Kapitel näher besprochen.

b) Die Harmonien im Raumgitter.

§ 165. Allgemeines.

Das Raumgitter für sich stellt noch nicht die Struktur des Kristalls dar. Es zeigt nur an, wie sich dieselbe im Raume regelmäßig fortpflanzt, da sie homogen sein muß.

In jeder homogenen Masse läßt sich ein Raumgitter konstruieren. Ist z. B. ein Gestein homogen gebaut wie ein Granit, ein Gneis, ein Syenit, ein Schiefer usw., so läßt sich darin ein Raumgitter ziehen, welches angibt, auf welche Entfernungen die einzelnen Bestandteile sich gleichmäßig wiederholen. Wie aber die verschiedenen Bestandteile zusammen verknüpft sind, aus was sie bestehen usw., das gibt das Raumgitter nicht wieder.

Das Gleiche müssen wir von einem Kristall denken. Um über eine Struktur Aufschluß zu erhalten, muß bekannt sein, wie sich die physikalische Größe im primitiven Parallelopipedon des Raumgitters ändert und wie sich diese Änderung um einen Punkt darstellt. Nachdem also ein Raumgitter berechnet und konstruiert worden ist, teilt sich die Erforschung der Kristallstruktur in folgende zwei Aufgaben:

1. Die physikalische und chemische Beschaffenheit des primitiven Parallelopipedons,
2. die physikalische Beschaffenheit um einen Punkt zu untersuchen.

Die Erforschung muß dahin zielen, den Zusammenhang zu bestimmen zwischen chemischer Konstitution und den krystallographischen Konstanten. Nur von der zweiten der angedeuteten Aufgaben wird hier die Rede sein.

Sowie die homogene Beschaffenheit des Raumes aus der Anordnung der homologen Punkte hervorgeht, so wird auch die innere Beschaffenheit eines primitiven Parallelopipedons aus der Anordnung der analogen Punkte hervorgehen.

§ 166. Analoge Punkte und Harmonie der Punktreihen.

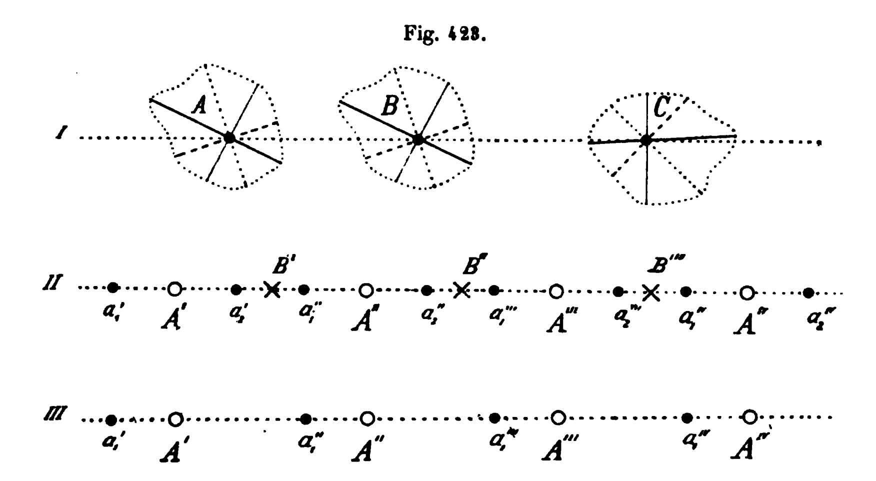
Zwei Punkte sind analog, wenn sie physikalisch gleich sind, aber sich derart gegenseitig verhalten, daß der eine nicht in den andern übergehen kann durch eine bloße Translation, weil ihre physikalischen Größen verschieden gerichtet sind. Die in Fig. 423 mit A', A'', A''', A^{IV}, . . . bezeichneten Punkte der Reihe II oder der Reihe III sind unter sich homolog. Die zwei Punkte unter sich a_1' und a_2', oder a_1'' und a_2'', oder a_1''' und a_2''' usw. der Reihe II sind dagegen analog, weil sie sich gegenseitig verhalten wie links und rechts.

Um sich zwei analoge oder homologe Punkte vorzustellen, zeichnet man die vektorialen Größen nach allen Richtungen, wie sie z. B. experimentell bestimmt worden sind. Eine solche graphische Darstellung der physikalischen Konstanten, welche um einen Punkt bestehen, ist in Fig. 423 Reihe I gegeben.

Die krumme punktierte Linie stellt dort den Ort der Vektoren, welche durch denselben Punkt gezogen sind, dar. Die zwei Punkte A und B sind offenbar homolog, weil die entsprechenden gleichen Vektoren untereinander parallel sind. Die zwei Punkte A und B sind in jeder Beziehung dem Punkt C gleich. Sie verhalten sich aber in bezug auf den letzteren analog, weil eben die gleichen Vektoren unter sich nicht parallel sind.

In einer Punktreihe sind nur zwei Fälle denkbar. Entweder sind je zwei analoge Punkte gleich weit entfernt von einem bestimmten homologen Punkt der Punktreihen, wie in der Reihe II, Fig. 423, oder sie sind ungleich entfernt, wie in der Reihe III, wo der Einfachheit wegen nicht zwei Punkte, sondern nur einer derselben verzeichnet ist, oder kein Punkt hat seinen analog. Im ersten Fall ist die Punktreihe einwertig, weil sie rechts und links gleichen Wert hat; im zweiten ist sie zweiwertig.

Fig. 423.



Eine einwertige Reihe ist harmonisch beschaffen in bezug auf Harmonie- oder Symmetriezentra. In der Tat liegen a_1' und a_2' gleich weit von A', wie a_1'' und a_2'' gleichweit von A'' usw. Auch die unter sich homologen Punkte B', B'', B''', ... sind Harmoniezentra der Punktreihe II, Fig. 423.

Man kann aus dem physikalischen Verhalten einer Punktreihe erfahren, ob sie einwertig oder zweiwertig sei. Betrachten wir z. B. die folgenden zwei Punktreihen, in deren homologen Punkten kohlensaure Kalkmoleküle sitzen:

I. $CaCO_3 \cdot CO_3Ca$ — $CaCO_3 \cdot CO_3Ca$ — $CaCO_3 \cdot CO_3Ca$ ....
II. $CaCO_3$ — $CaCO_3$ — $CaCO_3$ ....

Die erste derselben verhält sich elektrisch positiv rechts und links, ist also einwertig; die zweite verhält sich dagegen links positiv und rechts negativ, ist somit zweiwertig.

Unter diesen Bedingungen wird das Molekül der ersten Reihe aus einer geraden Zahl von $CaCO_3$, das der zweiten Reihe aber aus einer ungeraden Zahl bestehen müssen.

Mit Hilfe der Punktreihen werden wir nun die Harmonie der Ebenen-Punktnetze bauen können. Dann wird die Harmonie der Punktnetze dazu dienen, die Harmonie des Raumgitters zu erforschen.

Wir werden in der Folge die Ebenen-Punktnetze durch eine kleine Anzahl homologer Punkte auf Papier mit großen hohlen Kreisen darstellen und mit großen Buchstaben bezeichnen. Die analogen Punkte werden durch kleinere Kreise angegeben, bald hohl, wenn sie unterhalb der Ebene liegen, bald voll ausgezogen, wenn sie oberhalb derselben liegen, und mit kleinen Buchstaben bezeichnet.

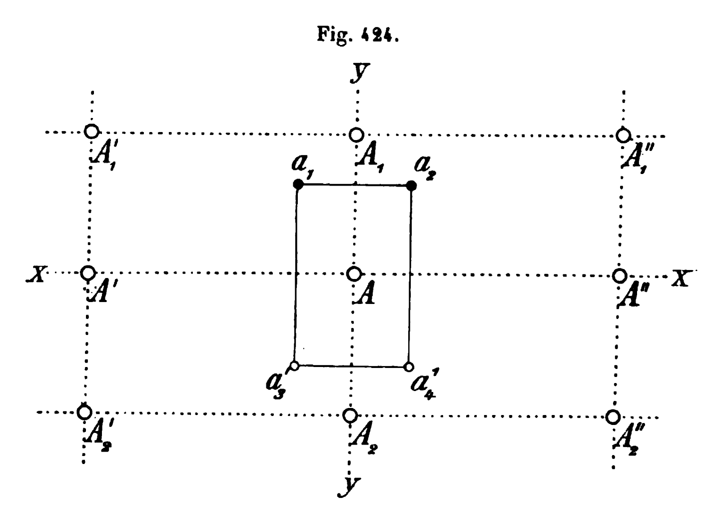
Wir beschränken unsere Untersuchung nur auf die Punktnetze des primitiven Parallelopipedons oder nur auf einen homologen Punkt derselben.

§ 167. Harmonien in den monoharmonischen Punktnetzen.

Das allgemeine Merkmal dieser Punktnetze ist, daß die sie bestimmenden Harmonierichtungen ungleich sind. Wir werden sie mit xx und yy bezeichnen. Beide können einwertig oder zweiwertig sein. Wir wollen alle möglichen Fälle ins Auge fassen.

1. Beide primitiven Punktreihen sind einwertig. Ist a_1, Fig. 424, ein beliebiger Punkt, wo bestimmte physikalische Größen herrschen, so sind a_1, a_2, a_3, a_4 unter sich analoge Punkte. Die Punkte a_1, a_2 liegen auf einer Parallelen zu xx und sind gleich weit von yy entfernt. Das Gleiche sei von den Punkten a_2 und a_4 gesagt. Ferner liegen die zwei Punkte a_1 und a_3 auf einer Parallelen zu yy und sind gleich weit von xx entfernt. Vier so harmonisch gelegene analoge Punkte verleihen den zwei Richtungen xx und yy die Einwertigkeit.

Fig. 424.



Um eine tiefere Übersicht des Punktnetzes zu haben, denke man sich, daß auch solche analoge Punkte betrachtet werden, welche außerhalb des Punktnetzes gelegen sind. Zu diesem Zwecke stellt man sich eine

Gerade vor, welche durch A geht und außerhalb des Punktnetzes liegt; sie mag mit zz bezeichnet werden und kann z. B. die dritte primitive Punktreihe im Raumgitter darstellen, wenn xx und yy die zwei übrigen sind. Wir stellen auf diese Weise 3 Richtungen und 3 Ebenen fest, nämlich die Richtungen xx, yy, zz, von denen nur xx und yy in Fig. 424 angegeben sind, und die Ebenen xy, yz und zx.

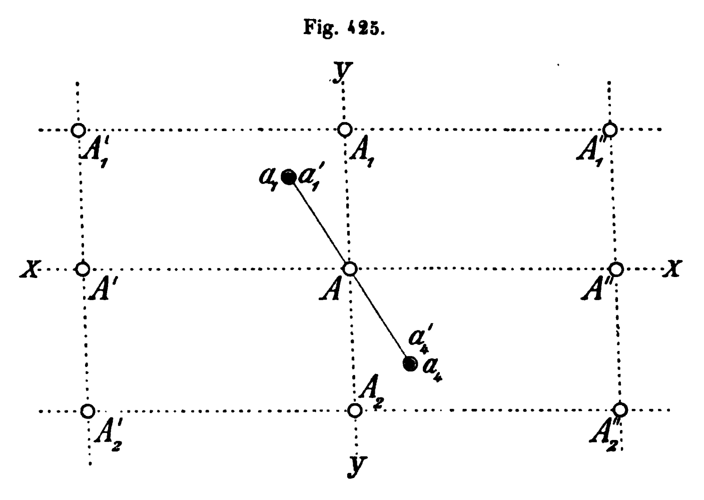
Es seien die 4 in Fig. 424 voll ausgezogenen Punkte mit a_1, a_2, a_3, a_4 bezeichnet, wenn sie oberhalb der Ebene des Punktnetzes gelegen sind, sie mögen mit a_1', a_2', a_3', a_4' bezeichnet werden, wenn sie unterhalb derselben liegen. Die zwei analogen Punkte a_1 und a_1' sind gleich weit von der Ebene gelegen und liegen auf der dritten Richtung zz; gleichfalls a_2 und a_2', sowie unter sich a_3 und a_3', ferner ebenfalls a_4 und a_4'. Nun werden folgende Fälle vorkommen:

a) 8 analoge Punkte a_1, a_2, a_3, a_4, a_1', a_2', a_3', a_4 sind vorhanden. Je 8 analoge Punkte liegen harmonisch in bezug auf die 3 Ebenen xy, yz, zx und auf die 3 Richtungen xx, yy, zz, welche somit Harmonieebenen und Harmonierichtungen sind. Außerdem ist A das Harmoniezentrum. Die 8 analogen Punkte des Punktnetzes liegen somit harmonisch in bezug auf 7 Harmonieelemente.

Dies ist die Holoharmonie bei den monoharmonischen Punktnetzen. Das Punktnetz ist einwertig, da es auf beiden Seiten gleichen Wert besitzt. Eine solche volle Harmonie ist in Fig. 424 dargestellt.

b) Sind nur 4 analoge Punkte, nämlich a_1, a_2, a_3, a_4 wie in Fig. 424 oberhalb der Ebene xy, so bleiben nur 3 Harmonieelemente übrig, nämlich die Richtung zz und die zwei Ebenen xz und yz. Da die Anzahl der analogen Punkte auf die Hälfte der vorhergehenden reduziert ist, so heißt die Harmonie in diesem Fall Hemiharmonie. Das Punktnetz ist zweiwertig, d. h. verschieden auf beiden Seiten desselben.

Fig. 425.



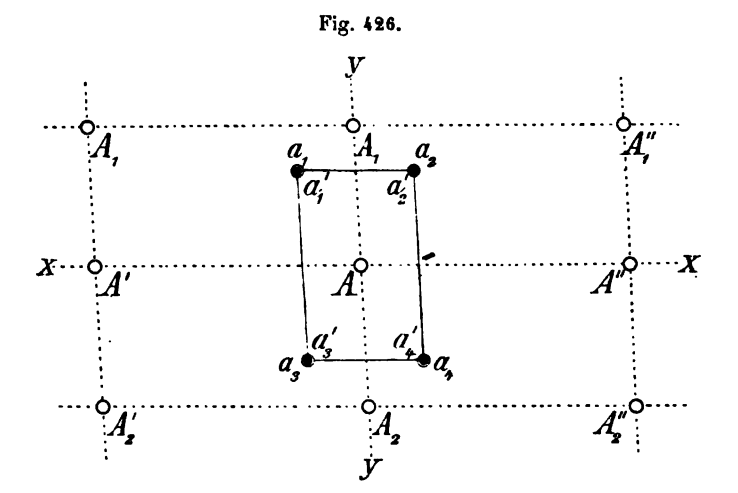
c) Die 4 analogen Punkte a_1; a_4 und a_1', a_4' sind vorhanden. Die Fig. 425

zeigt die oberhalb und unterhalb der Ebene xy gelegenen Punkte a_1, a_4, a_1', a_4'. In diesem Fall stellt xy die Harmonieebene, A das Harmoniezentrum dar. Da auch hier nur 4 analoge Punkte vorkommen, so heißt diese Harmonie ebenfalls Hemiharmonie.

d) Sind dagegen von den 8 analogen Punkten nur a_1 und a_4 vorhanden, so ist die Ebene xy zweiwertig. Das einzige Harmonieelement bleibt dann die Harmonierichtung zz. Wir haben in diesem Fall eine Tetartoharmonie, da der vierte Teil der analogen Punkte vorliegt.

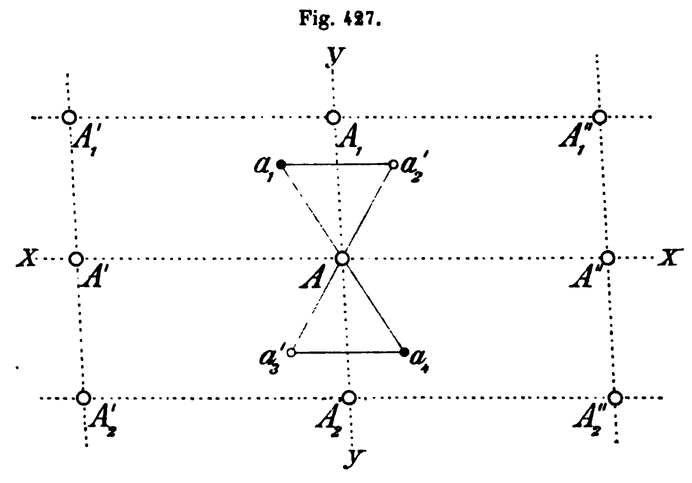
e) Nur die 4 analogen Punkte a_1, a_2, a_3' und a_4' sind vorhanden, Fig. 426, damit bleibt als Harmonierichtung nur xx und als Harmonieebene nur

Fig. 426.



yz; überdies liegt nur das Harmoniezentrum A vor. Auch in diesem Fall handelt es sich um eine Hemiharmonie des Punktnetzes.

Fig. 427.

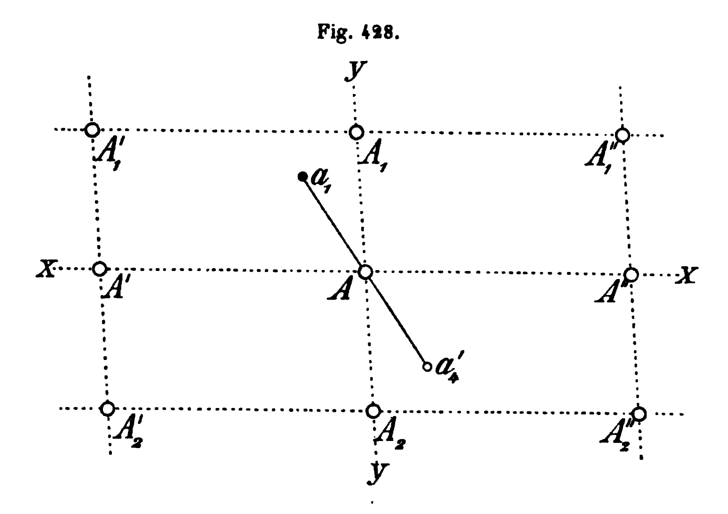


f) Die Anordnung der Fig. 427 veranschaulicht, daß von den 8 Punkten nur die Punkte a_1, a_2', a_3', a_4 vorliegen. In diesem Fall bleiben als

Harmonieelemente nur die Harmonierichtungen zz, xx, yy. Außer dieser Hemiharmonie bleibt nur noch

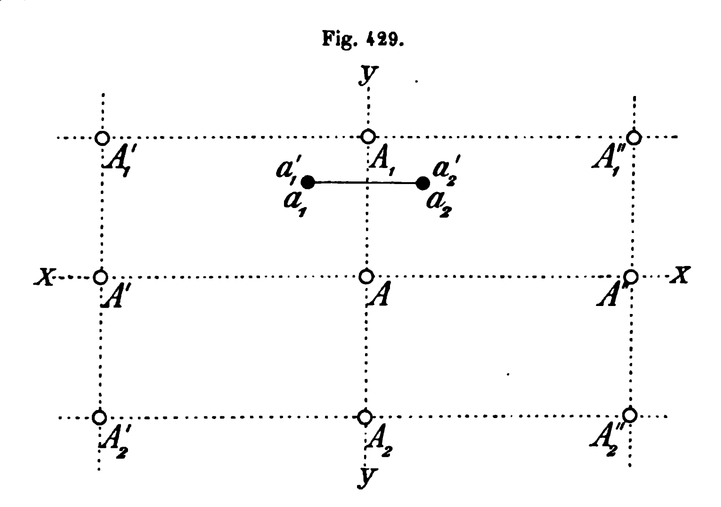
g) die Tetartoharmonie übrig, welche in Fig. 428 dargestellt ist. Die analogen Punkte a_1, a_4', welche sich auf das Harmoniezentrum beziehen, sind vorhanden.

Fig. 428.



2. Die eine der primitiven Punktreihen xx oder yy sei einwertig, die andere zweiwertig. Dem kann auf dreierlei Weise genügt werden:

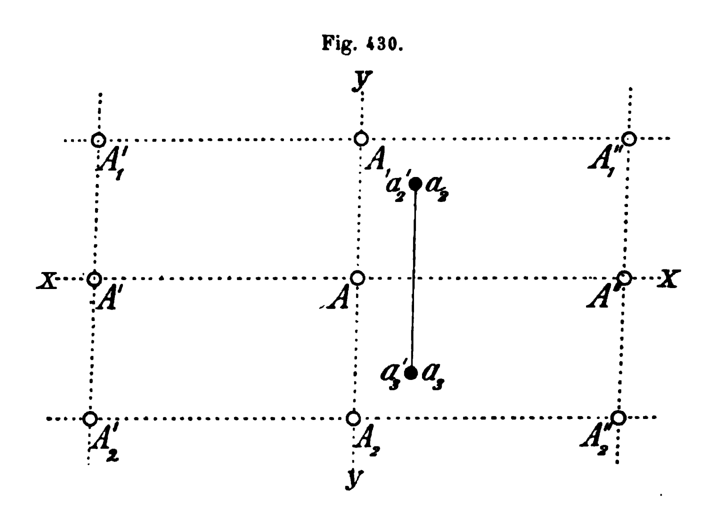
Fig. 429.



a) Es sind 4 analoge Punkte a_1, a_1', a_2, a_2' Fig. 429 oder a_2, a_2', a_3, a_3' Fig. 430 vorhanden. In diesem Falle liegen die Harmonieebenen xy und xz in der Fig. 429 und die Harmonierichtung xx vor. Da es sich hier um je 4 analoge Punkte handelt, so heißt diese eine Hemiharmonie.

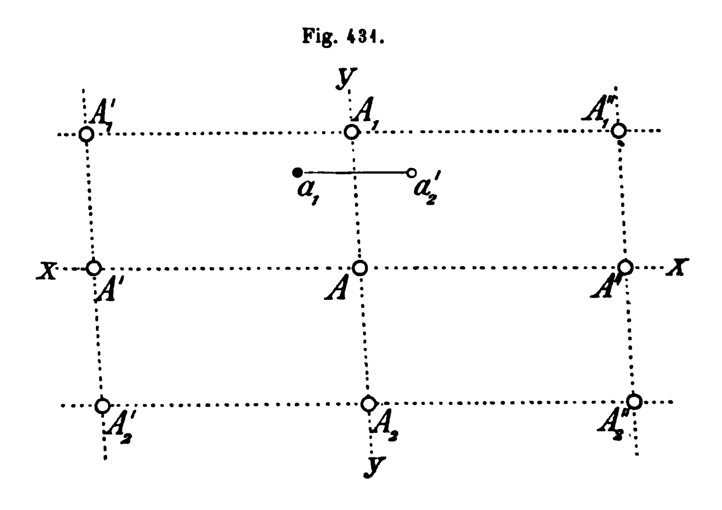
b) Es sind nur 2 analoge Punkte vorhanden, nämlich a_1, a_2 wie in Fig. 429 oder a_2, a_3 wie in Fig. 430; also liegt nur ein Harmonieelement vor, entweder die Harmonieebene yz wie in Fig. 429 oder

Fig. 430.



die Harmonieebene xz wie in Fig. 430. Man muß sich denken, daß in Fig. 429 und 430 die unterhalb gelegenen Punkte nicht gezeichnet seien. Außer dieser Tetartoharmonie ist noch

Fig. 431.

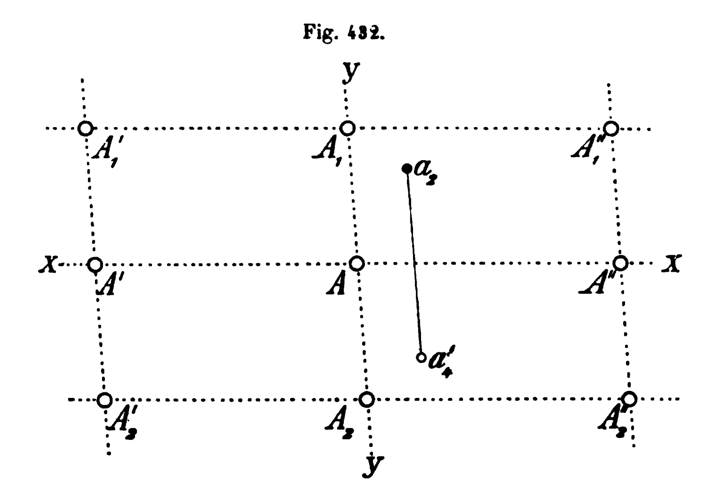


c) eine Tetartoharmonie möglich, welche dadurch entsteht, daß die zwei analogen Punkte wie in Fig. 431 a_1, a_2' oder in Fig. 432 a_2, a_4' gelegen sind. Damit zusammen kommt nur die Harmonierichtung yy resp. xx vor.

3. Beide primitiven Punktreihen sind zweiwertig.

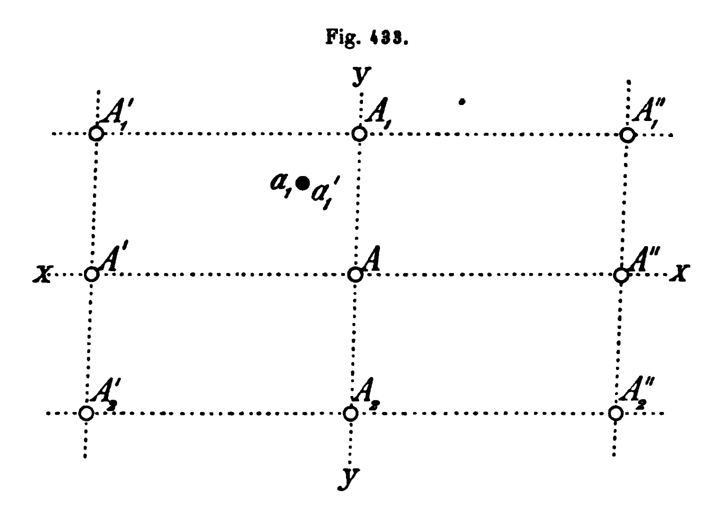
a) Entweder liegen je zwei analoge Punkte wie a_1, a_1' in der Fig. 433 vor, welche in bezug auf die Harmonieebene xy harmonisch gelegen sind, und es handelt sich dann um eine Tetartoharmonie, oder

Fig. 432.



b) jeder Punkt hat keinen analogen Punkt unter sich, wie in Fig. 433, wenn dort der unterhalb gelegene Punkt a_1' nicht dargestellt wäre. Hier kommt kein Harmonieelement vor, und da ein Punkt mit keinem analog ist und den achten Teil der in der Holoharmonie liegenden analogen Punkte darstellt, so heißt diese eine Ogdoharmonie.

Fig. 433.



In einem monoharmonischen Ebenen-Punktnetz kann man sich also vorstellen, daß jeder Punkt entweder mit sich selbst analog sei, oder 2, 4 oder 8 analogen Punkten entspricht. Mehr als 8 Punkte würden keine neuen

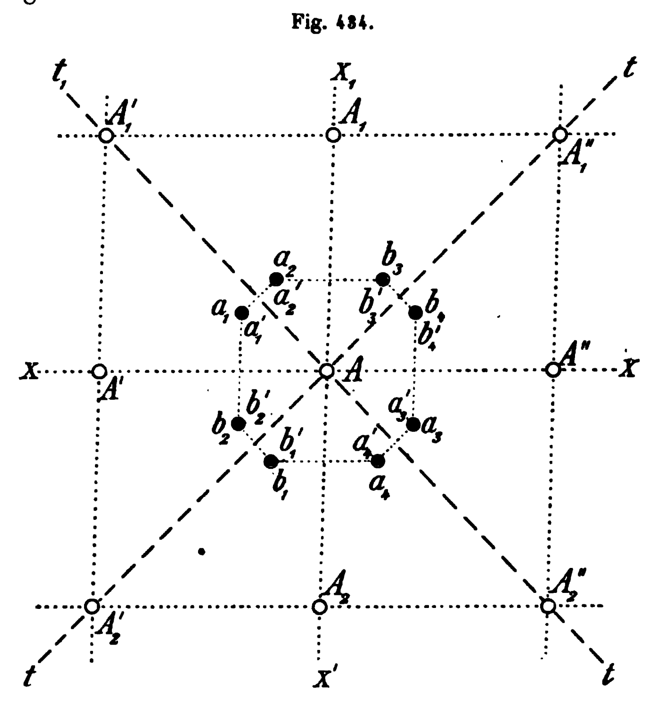
Harmonieeigenschaften nach sich ziehen, da die Holoharmonie die vollendete Harmonie des vorliegenden Punktnetzes ist.

§ 168. Harmonien in den diharmonischen Punktnetzen.

Das allgemeine Merkmal dieser Punktnetze ist, daß zwei primitive Punktreihen nahezu gleich sind und einen Winkel miteinander einschließen, der nicht weit von 90° entfernt ist.

Bei diesen harmonischen Punktnetzen kommen 4 Richtungen in Betracht, welche mit xx, $x_1 x_1$, tt, $t_1 t_1$, siehe Fig. 406, S. 325, und Fig. 434 bezeichnet werden mögen. Die ersten zwei Richtungen xx, $x_1 x_1$, welche physikalisch gleich sind, stellen die primitiven Punktreihen dar und werden durch tt, $t_1 t_1$ harmonisch geteilt.

Fig. 434.



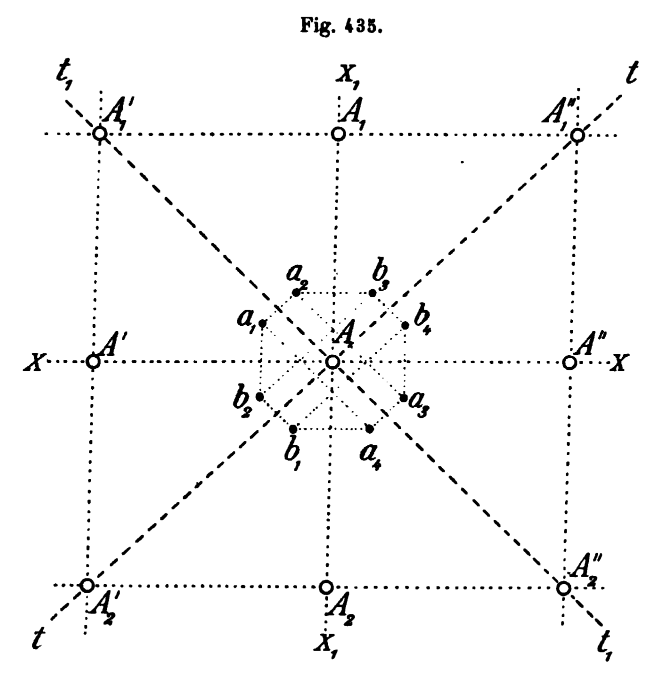
Wir haben zu untersuchen, welche Harmonien entstehen, wenn die primitiven Punktreihen einwertig oder zweiwertig werden. Entweder müssen sie beide einwertig oder beide zweiwertig sein, da sie als physikalisch gleichwertig zu betrachten sind.

1. Die zwei primitiven Punktreihen sind einwertig. Ist a_1, Fig. 434, ein beliebiger Punkt, wo bestimmte physikalische Größen herrschen, so werden a_1, a_2, a_3, a_4 analoge Punkte sein wie im monoharmonischen Punktnetz, welche harmonisch liegen in bezug auf tt und $t_1 t_1$. Da aber die Richtung xx von der Richtung $x_1 x_1$ nicht weit verschieden sein darf, so werden sich noch weitere analoge Punkte b_1, b_2, b_3, b_4 finden, welche gegenseitig ebenso gelegen sein werden, wie die vorhergehenden; ist a_1

gegeben, so werden sie durch die in Fig. 434 dargestellte Konstruktion gefunden. Man denkt sich ferner, daß durch A eine Richtung zz gezogen wird, welche in der Ebene xx_1 nicht gelegen ist.

Die 8 in Fig. 434 verzeichneten Punkte a_1, a_2, a_3, a_4 stellen 8 analoge Punkte oberhalb der Ebene xx_1 dar. Die entsprechenden 8 analogen Punkte, welche mit den andern in der Richtung zz gelegen sind, und gleichweit entfernt von der Ebene xx_1 wie die Punkte a_1, a_2, a_2, a_4 liegen, werden mit a_1', a_2', a_3', a_4' bezeichnet. Analog werden auch die Punkte b_1', b_2', b_3', b_4' angenommen. Sind alle 16 Punkte vorhanden, so spielt die Ebene xx_1 die Rolle einer Harmonieebene in bezug auf die Richtung zz_1 und die Harmonieeigenschaft des diharmonischen Punktnetzes erreicht

Fig. 435.



die Vollendung, welche überhaupt in einem solchen Punktnetz möglich ist. Werden aber die 16 analogen Punkte auf weniger reduziert, so entstehen die verschiedenen Harmonien, welche hier möglich sind, nämlich:

a) Alle 16 analogen Punkte sind vorhanden, wie in Fig. 434 angegeben ist. Die Harmonieelemente sind natürlicherweise: $4 + 1$ Harmonieebenen, nämlich xz, x_1z, tz, t_1z, $4 + 1$ Harmonierichtungen, nämlich xx_1, x_1x_1, tt, t_1t_1 und zz und das Harmoniezentrum. Die harmonische Anordnung des Netzes heißt Holoharmonie. Das Punktnetz ist einwertig.

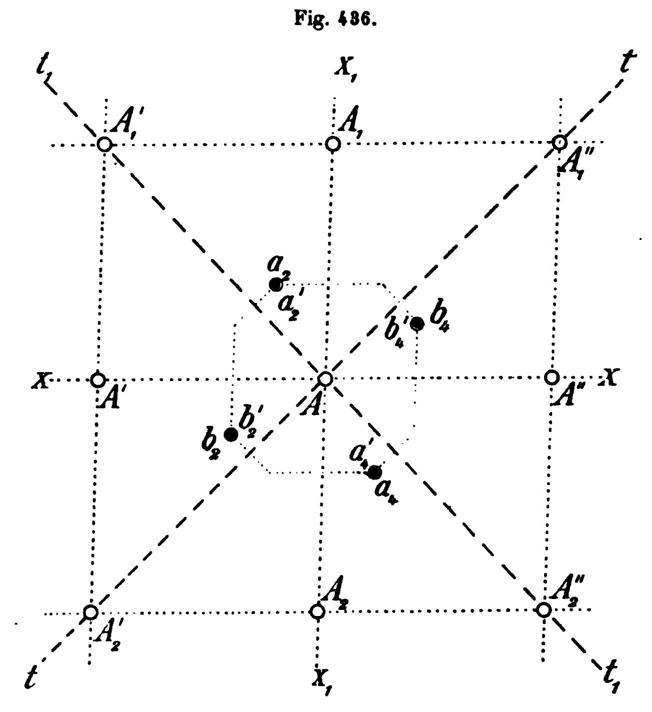
b) Die 8 in Fig. 435 angegebenen Punkte a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4 bedeuten 8 analoge Punkte, welche nur auf einer Seite des Punktnetzes gelegen sind. Die Harmonieelemente reduzieren sich auf folgende:

4 Harmonieebenen xz, x_1z, tz, t_1z und 1 Harmonierichtung zz. Man hat in diesem Fall eine Hemiharmonie.

c) Die 8 in Fig. 436 angegebenen Punkte a_2a_2', a_4a_4', b_2b_2, b_4b_4' sind vorhanden. Das Punktnetz ist einwertig und somit Harmonieebene. Das noch übrige Harmonieelement reduziert sich auf die Harmonierichtung zz. Auch diese Anordnung entspricht einer Hemiharmonie.

d) Die Anordnung in der Fig. 437 unterscheidet sich von der in Fig. 436 dargestellten nur dadurch, daß in der Fig. 437 die 4 angegebenen analogen Punkte a_2, a_4, b_2, b_4 nur oberhalb des Ebenen-Punktnetzes liegen. Daher ist das Punktnetz zweiwertig, und die Harmonieelemente reduzieren sich auf die einzige Richtung zz, welche diharmonisch

Fig. 436.



ist. Diese Anordnung entspricht einer hemimorphen Tetartoharmonie.

e) Die analogen Punkte a_1, a_2', a_3, a_4', b_1', b_2, b_3', b_4 treten auf, vier derselben oberhalb und vier unterhalb des Ebenen-Punktnetzes xx_1, wie in Fig. 438 gezeigt wird. Es ist ersichtlich, daß die zwei Harmonieebenen xxz und x_1x_1z vorliegen. Außerdem treten die 3 monoharmonischen Richtungen tt, t_1t_1 und zz auf, deren erste zwei unter sich gleichwertig sind. Die vorliegende Harmonie heißt ebenfalls Hemiharmonie.

f) Die analogen Punkte a_1, a_3, b_1', b_3' liegen vor, wie es in Fig. 439 dargestellt ist. Das einzige Harmonieelement ist die Harmonierichtung

Fig. 487.

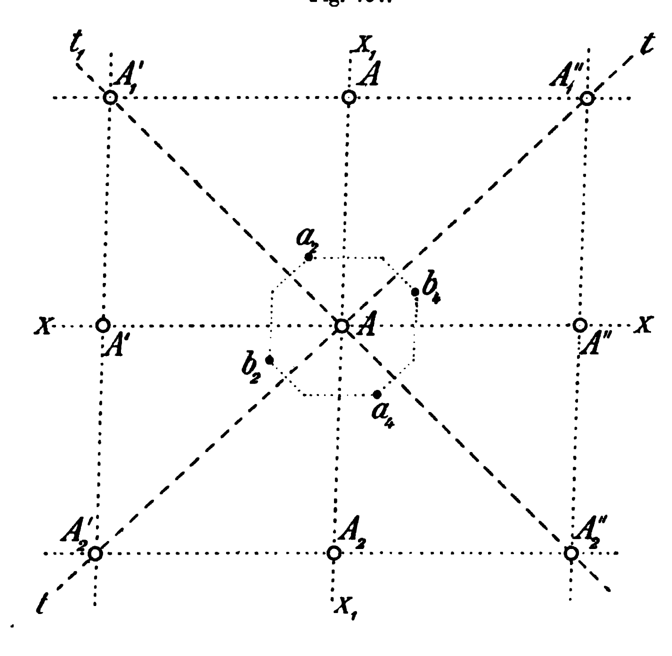
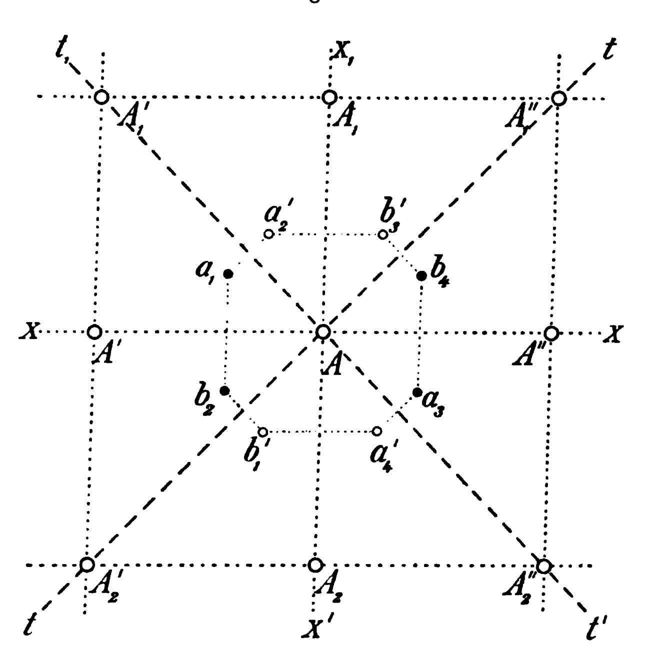


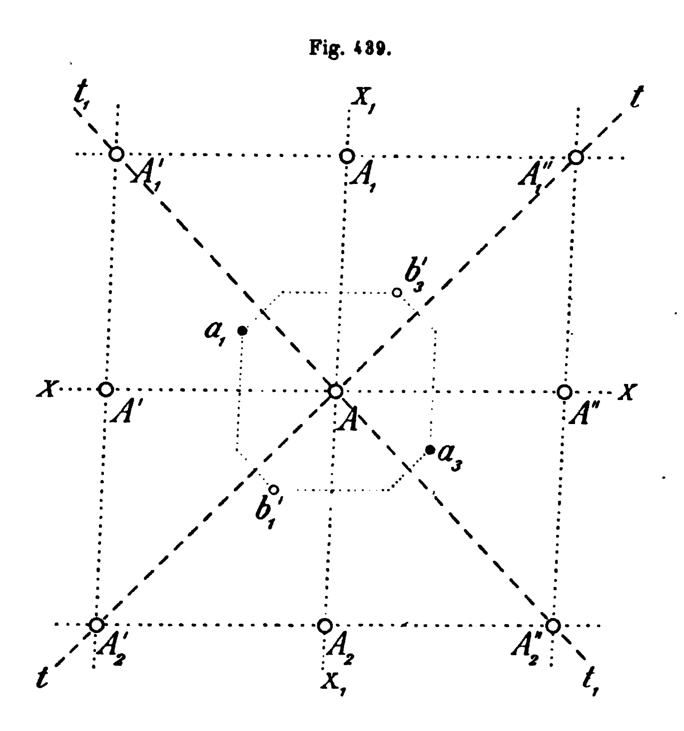
Fig. 488.



zz, sie erscheint monoharmonisch, während das Punktnetz xx_1 diharmonisch bleibt. Da es sich nur um 4 analoge Punkte handelt, nämlich den vierten Teil derjenigen bei der Holoharmonie, so wird diese Anordnung Tetartoharmonie genannt.

g) Endlich sind 8 analoge Punkte vorhanden, nämlich a_1, a_2', a_3, a_4', b_1, b_2', b_3, b_4', wie Fig. 440 zeigt, sie bestimmen nur 5 Harmonieelemente, nämlich die Harmonierichtungen xx, x_1x_1, tt, t_1t_1 und zz. Diese Harmonie ist natürlich eine drehende Hemiharmonie des Punktnetzes.

Fig. 439.



2. Die zwei primitiven Punktreihen xx und x_1x_1 sind physikalisch gleichwertig, sie können deshalb nicht die eine einwertig und die andere zweiwertig sein, wie oben bemerkt wurde.

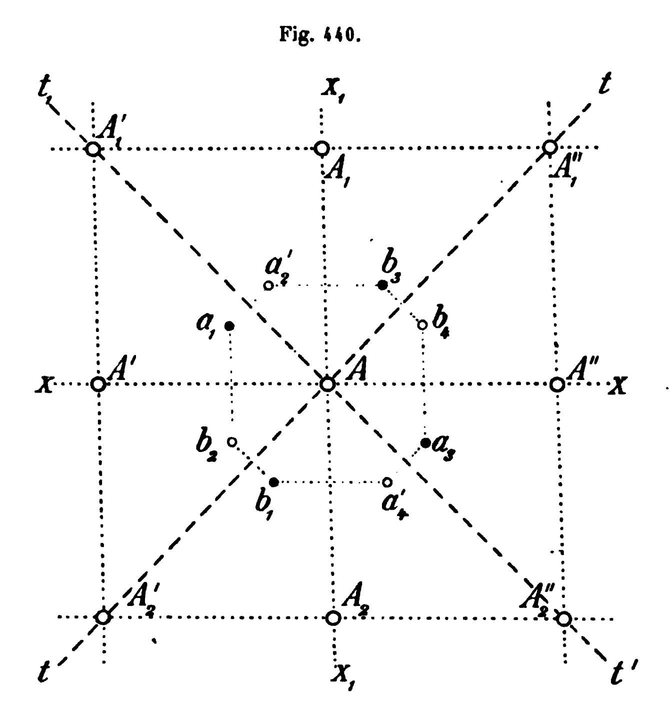
Nachdem dieser Fall ausgeschlossen ist, bleibt zu untersuchen

3. ob beide primitiven Punktreihen zweiwertig sein dürfen. Die kleinste Anzahl von analogen Punkten, welche bestehen können ist 2, denn beide Richtungen xx und x_1x_1 müssen sich physikalisch gleich verhalten. Diese zwei analogen Punkte mögen z. B. a_1 und b_3 sein, s. Fig. 434; sie verleihen den zwei Richtungen xx und x_1x_1 den gleichen physikalischen Wert. Nun geht die Richtung tt zwischen den zwei analogen Punkten a_1 und b_3 durch, während die Richtung tt außerhalb derselben liegt; sie verhalten sich somit physikalisch verschieden. Der Annahme der Punktnetze nach müssen sie sich jedoch gleich verhalten. Auch wenn die

Anordnung durch mehr als 2 analoge Punkte getroffen wird, bringt die Zweiwertigkeit der 2 Richtungen xx und x_1x_1 den Umstand hervor, daß 2 Richtungen des Netzes, welche physikalisch sich gleich verhalten sollten, ungleich werden. Daraus muß geschlossen werden, daß die 2 primitiven Punktreihen in einem diharmonischen Punktnetz nicht zweiwertig sein dürfen.

Es bleiben also für die diharmonischen Punktnetze 7 verschiedene Harmonien möglich, nämlich 1 Holoharmonie, Fig. 434, 4 Hemiharmonien und 2 Tetartoharmonien. Die Holoharmonie ist in Fig. 434 gegeben. Die Fig. 435, 436, 438 und 440 stellen die 4 Hemiharmonien dar und die Tetartoharmonien sind in Fig. 437 und 439 abgebildet.

Fig. 440.



Die Tetartoharmonie zeichnet sich durch 4 analoge Punkte, die Hemiharmonie durch 8 und die Holoharmonie durch 16 aus. Mehr als 16 analoge Punkte würden kein neues Harmonieelement nach sich ziehen.

§ 169. Harmonien in den hexaharmonischen und triharmonischen Punktnetzen.

Beide Punktnetze bestehen aus primitiven Parallelogrammen, deren Hälfte nahezu gleichseitige Dreiecke sind. Beiden Punktnetzen liegen daher 3 primitive Punktreihen zu Grunde, die physikalisch nahezu gleich sind. Alle Punktreihen des Ebenennetzes, welche ebenfalls nahezu gleich sind, liegen harmonisch in bezug auf 3 + 3 Richtungen, welche wir in dem Folgenden mit

x_1, x_2, x_3 und t_1, t_2, t_3 bezeichnen wollen. Die zwei Bezeichnungen triharmonisch und hexaharmonisch dienen also dazu, um genau dieselbe Anordnung der homologen Punkte in der Ebene darzulegen. Sie sollen gebraucht werden, um die Verschiedenheit der umgebenden Masse in bezug auf das Punktnetz auszudrücken, was man durch die analogen Punkte erreicht.

Wir haben schon hervorgehoben, daß wenn die übrigen zwei primitiven Punktnetze des Raumgitters auf das triharmonische Punktnetz nahe senkrecht stehen, es immer 6 Punktnetze gibt, welche nahezu denselben Wert haben und nahezu dieselbe Lage in bezug auf das triharmonische Netz. Wenn dagegen die zwei primitiven Punktnetze stark und gleichmäßig geneigt sind in bezug auf das triharmonische Netz, gibt es auch nur 3 Punktnetze im Raumgitter, welche nahezu denselben Wert und dieselbe Lage haben. Im ersten Fall haben wir das Punktnetz hexaharmonisch, im zweiten triharmonisch genannt. Der erste Fall tritt nur im sechsgliedrigen Raumgitter, der zweite im dreigliedrigen und im drei- und viergliedrigen Raumgitter auf.

Der Unterschied zwischen hexaharmonischen und triharmonischen Punktnetzen stützt sich also auf die Lage derselben im Raumgitter. Es ist einleuchtend, daß dieser Unterschied auch bei den Harmonien sich zeigen muß, welche den beiden Netzen eigen und möglich sind.

Die verschiedenen und möglichen Harmonien werden wir finden, wenn wir die primitiven Punktreihen einwertig und zweiwertig machen.

Um die Lage des Punktnetzes besser vor Augen zu haben, denke man sich eine Gerade durch einen homologen Punkt gezogen (siehe den Punkt A in den folgenden Figuren), welche entweder zum Punktnetz senkrecht steht, oder nicht sehr weit von der Normalen abweicht und die wir mit xx bezeichnen wollen. Eine solche Gerade stellt eine Punktreihe des Raumgitters dar. In der folgenden Untersuchung wollen wir die 2 Punktnetze auseinander halten und jedesmal mit dem hexaharmonischen Punktnetz beginnen, darauf das triharmonische Punktnetz folgen lassen.

1. Die drei primitiven Punktreihen sind einwertig.

A. Das Punktnetz ist hexaharmonisch.

Man kann auf 5 Arten die 3 primitiven Punktnetze einwertig machen. Beschreiben wir zuerst genau den allgemeinen Fall.

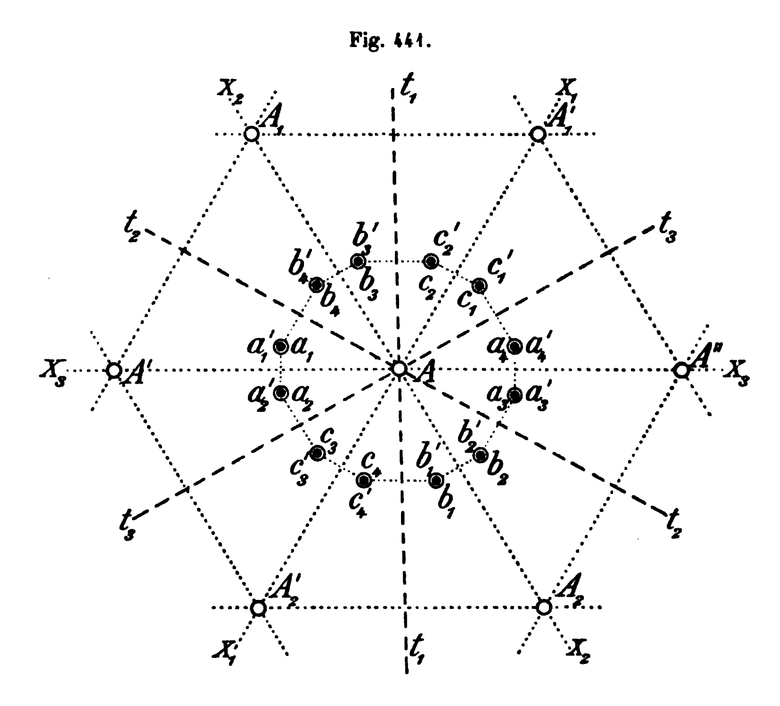
a) Unter a_1 (Fig. 441) sei irgend welcher Punkt verstanden, in welchem bestimmte physikalische Größen herrschen. Durch a_1 ziehe man die Parallele zu $t_1 t_1$, dann nehme man ebenso einen mit a_1 analogen und gleichweit von $x_3 x_3$ entfernten Punkt a_2 an. Auf gleiche Entfernung von A ziehe man eine zweite Parallele zu $t_1 t_1$, und bestimme ferner 2 zu $a_1 a_2$ analoge Punkte a_3 und a_4 ebenso weit entfernt von $x_3 x_3$ als es die Punkte $a_1 a_2$ sind. Durch die Annahme der 4 analogen Punkte a_1, a_2, a_3, a_4 ist nun die Punktreihe $x_3 x_3$ einwertig gemacht. Sollen $x_1 x_1$ und $x_2 x_2$ ebenfalls einwertig sein und sollen sich überdies ihre

Werte gegenseitig so verhalten, wie die primitiven Strecken der betreffenden Punktreihen, so wird man je 4 analoge Punkte b_1, b_2, b_3, b_4 und c_1, c_2, c_3, c_4 konstruieren müssen. Man wird zu diesem Zweck von a_1 aus eine Parallele zu x_1x_1 ziehen, b_4 so weit entfernt von t_2t_2 wählen wie a_1 liegt usw.

Auf diese Art ergeben sich 12 analoge Punkte, welche die Punktreihen x_1x_1, x_2x_2, x_3x_3 einwertig erzeugen; außerdem werden auch die übrigen Punktreihen t_1t_1, t_2t_2, t_3t_3 einwertig sein.

Die 12 analogen Punkte $a_1a_2 \ldots.$ $b_1b_2 \ldots.$ $c_1c_2 \ldots.$ brauchen aber nicht Punkte darzustellen, welche auf der Ebene des Punktnetzes

Fig. 441.



liegen, sondern Punkte, welche oberhalb und unterhalb derselben gelegen sind und zwar ebenso weit entfernt und auf einer dritten Richtung, welche wie vorher mit zz bezeichnet sein mag, liegen. Die oberhalb befindlichen analogen Punkte in der Fig. 441 sind voll ausgezogen und mit $a_1a_2 \ldots.$ $b_1b_2 \ldots.$ $c_1c_2 \ldots.$ bezeichnet, während die unterhalb gelegen Punkte durch Kreischen dargestellt und mit $a_1'a_2' \ldots.$ $b_1'b_2' \ldots.$ $c_1'c_2' \ldots.$ bezeichnet sind.

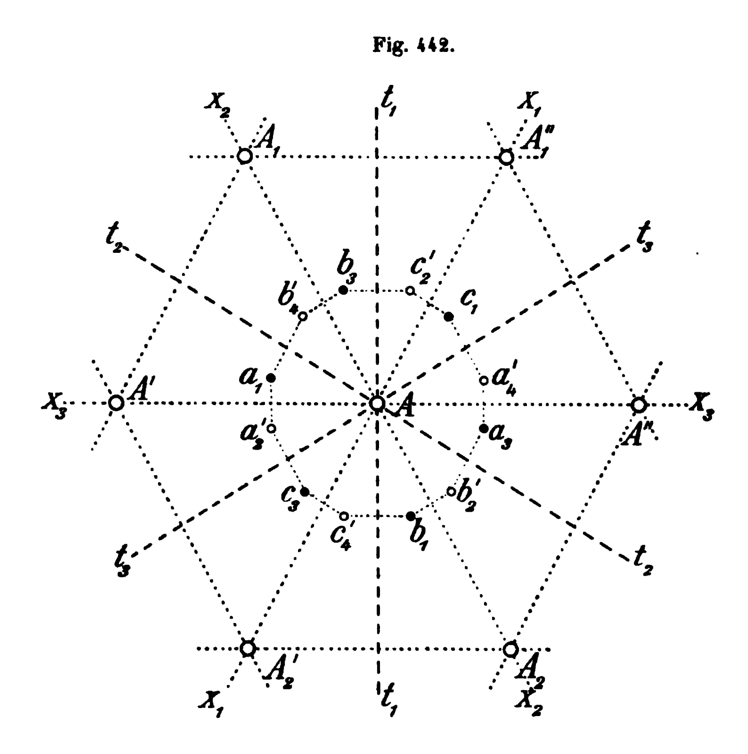
Das primitive Parallogramm bekommt auf diese Art 24 analoge Punkte, welche in bezug auf gewisse Harmonieelemente harmonisch liegen. In der Fig. 441 sind die 24 Punkte nur um einen homologen Punkt, den Punkt A, gezeichnet.

Betrachten wir nun, wie sich die Harmonieelemente bei dieser Anordnung verhalten. Die Richtungen x_1x_1, x_2x_2, x_3x_3 und t_1t_1, t_2t_2,

$t_3 t_3$ sind offenbar Harmonierichtungen und zwar monoharmonische; ferner ist zz (in der Figur nicht zu sehen) eine hexaharmonische Richtung. Außerdem ist die Ebene des Punktnetzes Harmonieebene. Ferner sind Harmonieebenen $x_1 z$, $x_2 z$, $x_3 z$, $t_1 z$, $t_2 z$, $t_3 z$. Fügen wir noch das Harmoniezentrum hinzu, so ergibt sich, daß die angegebene Anordnung durch 15 Harmonieelemente ausgezeichnet wird, nämlich $3 + 3 + 1$ Harmonierichtungen, $3 + 3 + 1$ Harmonieebenen und das Harmoniezentrum.

Diese Harmonieelemente drücken das Merkmal des hexaharmonischen Netzes aus; es ist daher diese Anordnung der analogen Punkte eine vollendete, d. h. sie stellt die Holoharmonie dar.

Fig. 442.



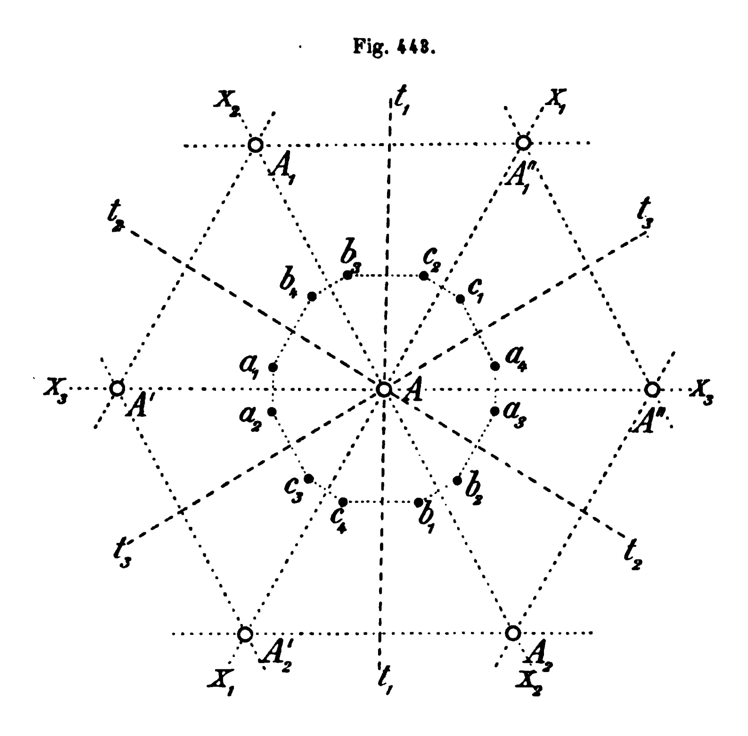
Nachdem nun die Holoharmonie genau beschrieben worden ist, gehen wir zu den speziellen Fällen über, in denen die 3 primitiven Punktreihen ebenfalls einwertig sind.

b) Die 12 in der Fig. 441 angegebenen Punkte können abwechselnd bald oberhalb, bald unterhalb des Ebenen-Punktnetzes befindliche analoge Punkte darstellen. Dann sind in einem primitiven Parallelogramm 12 analoge Punkte vorhanden, wie in der Fig. 442 angedeutet ist. Man sieht aus dieser Darstellung, daß die Harmonieelemente sich auf 7 reduzieren, nämlich die $3 + 3 + 1$ Harmonierichtungen $x_1 x_1$, $x_2 x_2$, $x_3 x_3$, $t_1 t_1$, $t_2 t_2$, $t_3 t_3$, welche monoharmonisch sind und zz, welche

hexaharmonisch ist. Es liegt in diesem Fall eine Hemiharmonie vor, welche gyroedrisch oder auch trapezoedrisch heißt.

c) Stellen die 12 in der Fig. 441 angegebenen Punkte nur die auf einer Seite der Ebene liegenden analogen Punkte dar, wie Fig. 443 zeigt, so veranlassen diese 12 Punkte folgende Harmonieelemente: 1 Harmonierichtung zz, welche hexaharmonisch ist, 3 + 3 Harmonieebenen und zwar x_1z, x_2z, x_3z, t_1z, t_2z, t_3z. Hier heißt die Harmonie hemimorphe Hemiharmonie, weil das Punktnetz selbst zweiwertig ist, d. h. zwei verschiedene Anordnungen der analogen Punkte auf beiden Seiten der Ebene aufweist.

Fig. 443.



d) Die in Fig. 441 angegebenen Punkte reduzieren sich auf folgende 12: 6 oberhalb und 6 unterhalb der Ebene gelegene analoge Punkte, wie in Fig. 444 gezeigt wird. Die Harmonieelemente sind dann: 1 Harmonierichtung zz, welche wieder hexaharmonisch ist, 1 Harmonieebene, nämlich die Ebene des Punktnetzes, und das Harmoniezentrum.

Die hier dargestellte Harmonie ist wiederum eine Hemiharmonie.

e) Hier reduzieren sich die in Fig. 443 angegebenen Punkte auf 6, d. h. sie stellen 6 nur oberhalb oder nur unterhalb der Ebene des Punktnetzes befindliche Punkte dar, wie in Fig. 445 abgebildet ist. Damit fällt die Harmonieebene weg und es bleibt als Harmonieelement nur die hexaharmonische Richtung zz.

Fig. 444.

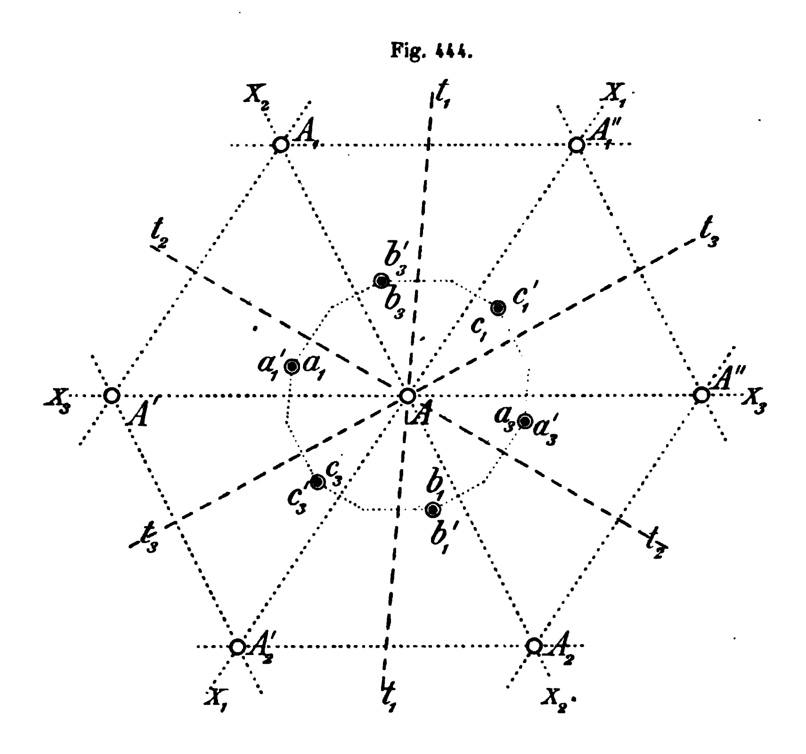
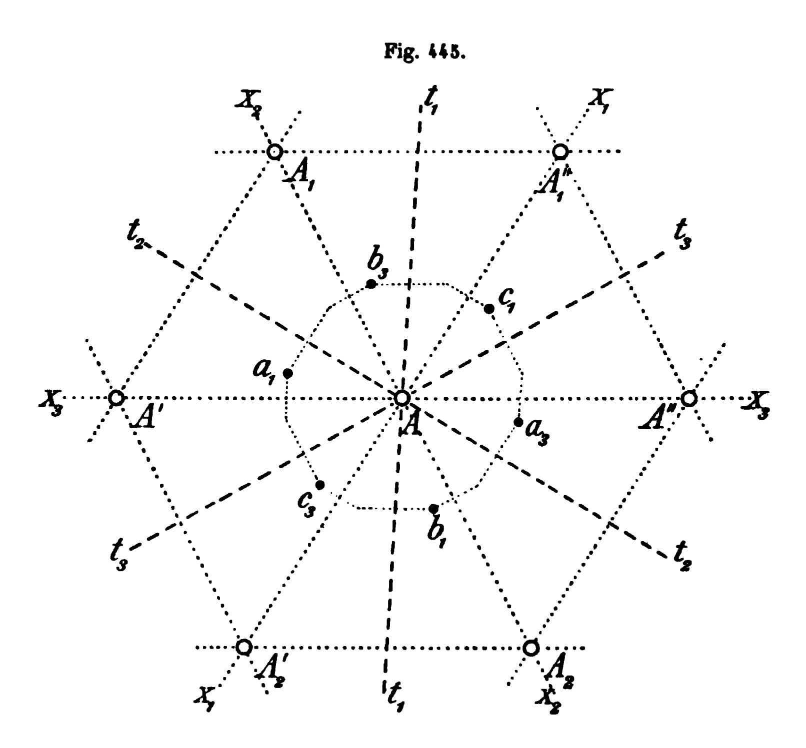


Fig. 445.

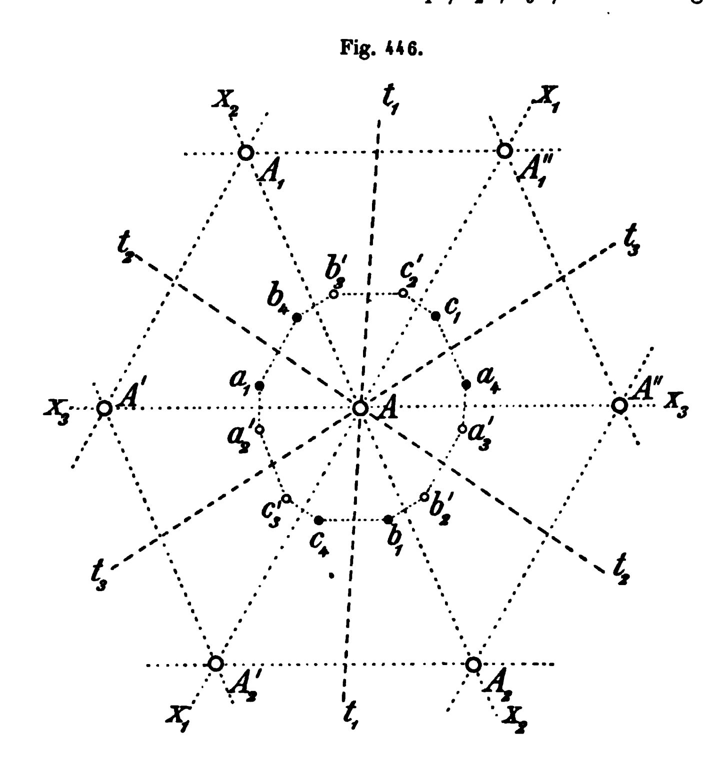


Man kann diese Harmonie **hemimorphe Tetartoharmonie** benennen, weil die Ebene des Punktnetzes zweiwertig ist und in jedem primitiven Parallelogramm nur 6 analoge Punkte liegen, d. h. der vierte Teil wie bei der Holoharmonie.

B. Das Punktnetz ist triharmonisch.

a) Es reduzieren sich die Punkte der Fig. 441 auf 12 analoge Punkte in der Weise, daß 6 oberhalb und 6 unterhalb der Ebene des Punktnetzes liegen; dabei sind je 2 abwechselnd unterhalb und je 2 oberhalb der Ebene, wie in Fig. 446 dargestellt ist. Die Harmonieelemente reduzieren sich auf 3 Harmonieebenen $t_1 x$, $t_2 x$, $t_3 x$, wie die Fig. 446

Fig. 446.



zeigt (oder $x_1 x$, $x_2 x$, $x_3 x$); ferner auf 3 + 1 Harmonierichtungen, wovon die 3 $x_1 x_1$, $x_2 x_2$, $x_3 x_3$ (oder $t_1 t_1$, $t_2 t_2$, $t_3 t_3$) monoharmonisch sind und 1 (xx) triharmonisch ist, und auf das Harmoniezentrum.

Diese Harmonie heißt Holoharmonie oder besser **skalenoedrische Holoharmonie**.

b) Die analogen Punkte der Fig. 446 reduzieren sich auf die Hälfte von total 6 analogen abwechselnd oberhalb und unterhalb der Ebene des Punktnetzes gelegenen Punkte, wie die Fig. 447 andeutet. Damit verschwinden die Harmonieebenen und die monoharmonischen Harmonierichtungen. Es bleibt nur das Harmoniezentrum.

Fig. 447.

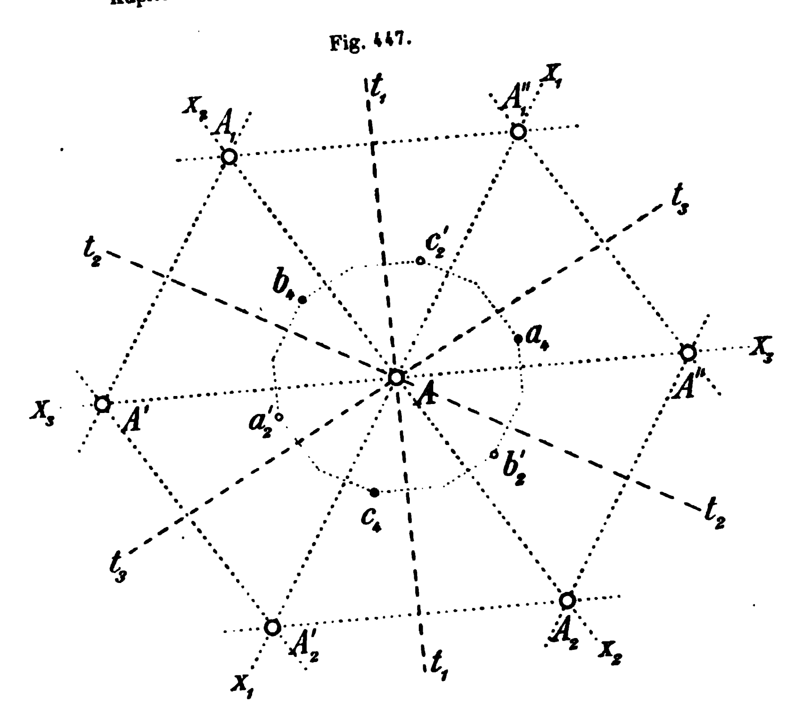
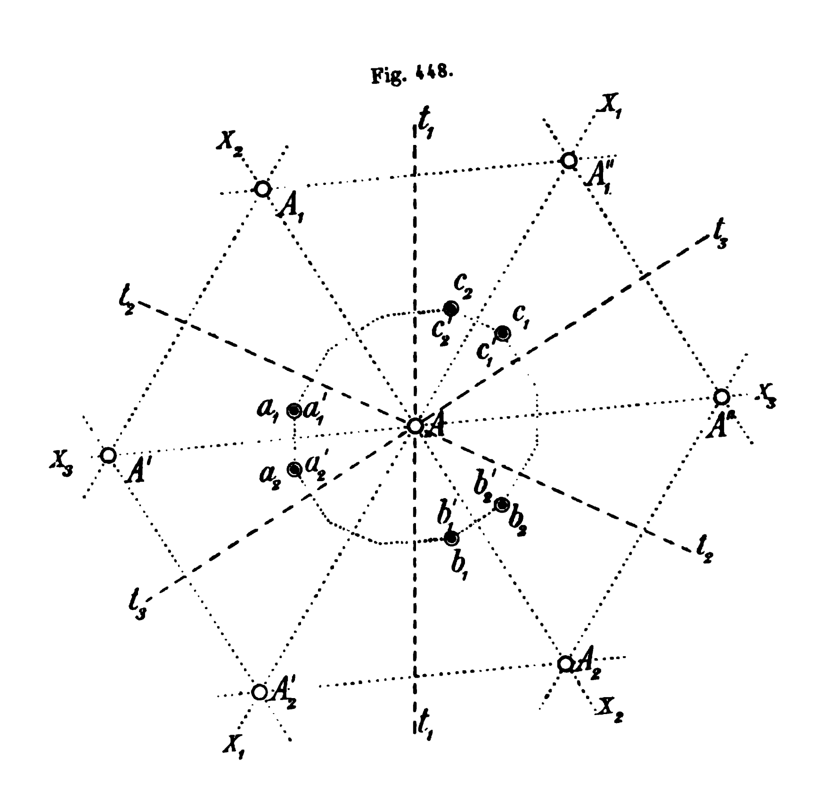


Fig. 448.



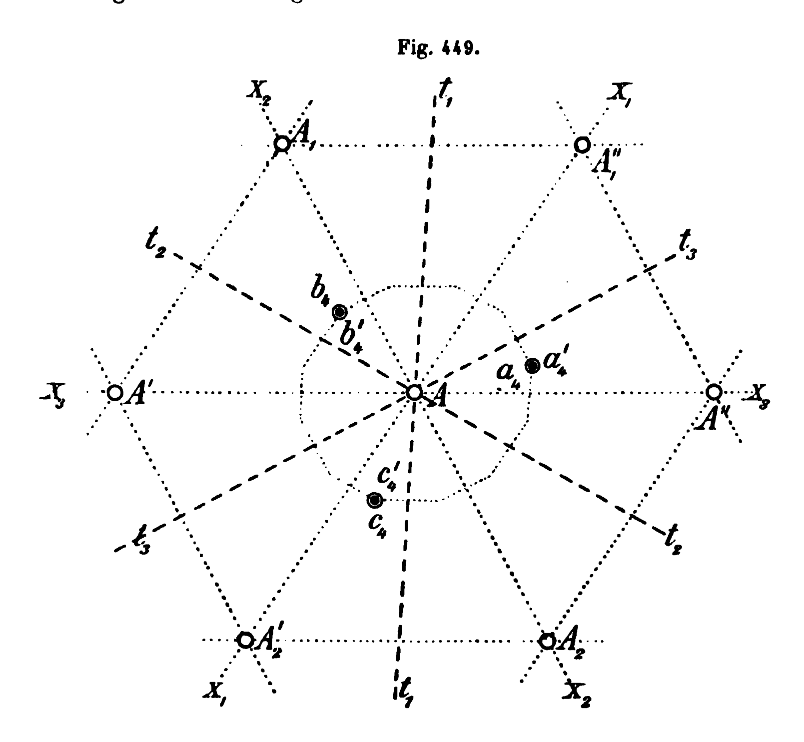
2. Die drei primitiven Punktreihen sind zweiwertig.

A. Das Punktnetz ist hexaharmonisch.

a) Die höchste Anzahl von analogen Punkten, die man annehmen kann, ist 12, wie die Fig. 448 zeigt, 6 liegen oberhalb und 6 unterhalb der Ebene des Punktnetzes. Die Harmonieelemente sind infolgedessen: 3 + 1 Harmonieebenen, d. h. $x_1 z$, $x_2 z$, $x_3 z$ und x_1, x_2, x_3; 3 + 1 Harmonierichtungen, wovon $x_1 x_1$, $x_2 x_2$, $x_3 x_3$ monoharmonisch sind und zz triharmonisch ist.

Es liegt vor eine trigonale Hemiharmonie.

Fig. 449.



b) Endlich reduzieren sich die analogen Punkte auf 6 und zwar 3 oberhalb und 3 unterhalb der Ebene des Punktnetzes, siehe Fig. 449. Es liegen dann nur folgende Harmonieelemente vor: 1 Harmonieebene $x_1 z$, $x_2 z$, $x_3 z$ und eine Harmonierichtung zz, welche triharmonisch ist.

Die vorliegende Harmonie ist die trigonale Tetartoharmonie.

B. Das Punktnetz ist triharmonisch.

a) 6 analoge Punkte liegen abwechselnd 3 oberhalb und 3 unterhalb der Ebene des Punktnetzes, siehe Fig. 450. Die Harmonieelemente sind 3 + 1 Harmonierichtungen, wovon $x_1 x_1$, $x_2 x_2$, $x_3 x_3$ monoharmonisch sind und zz triharmonisch ist.

Diese Harmonie heißt drehende Hemiharmonie.

Fig. 450.

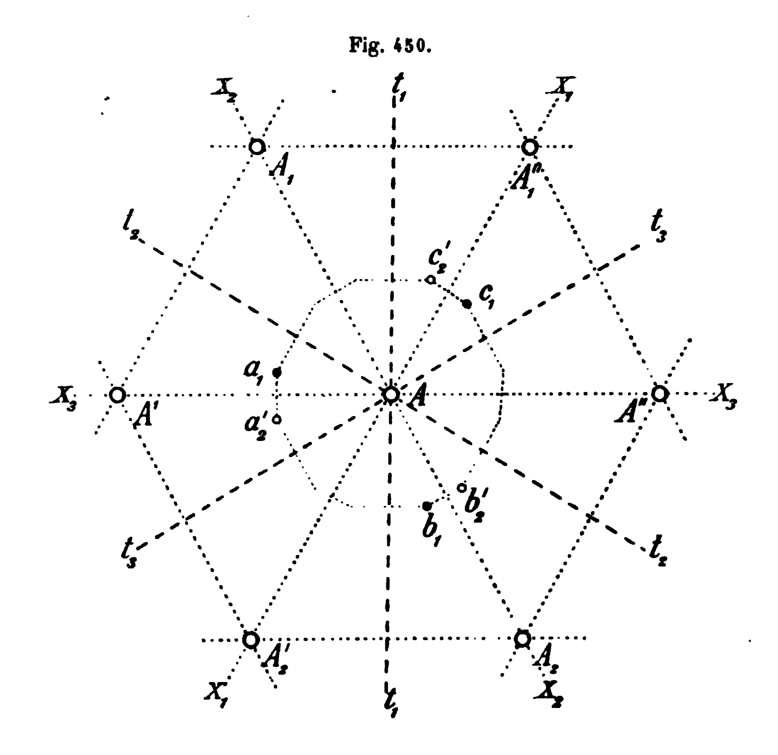
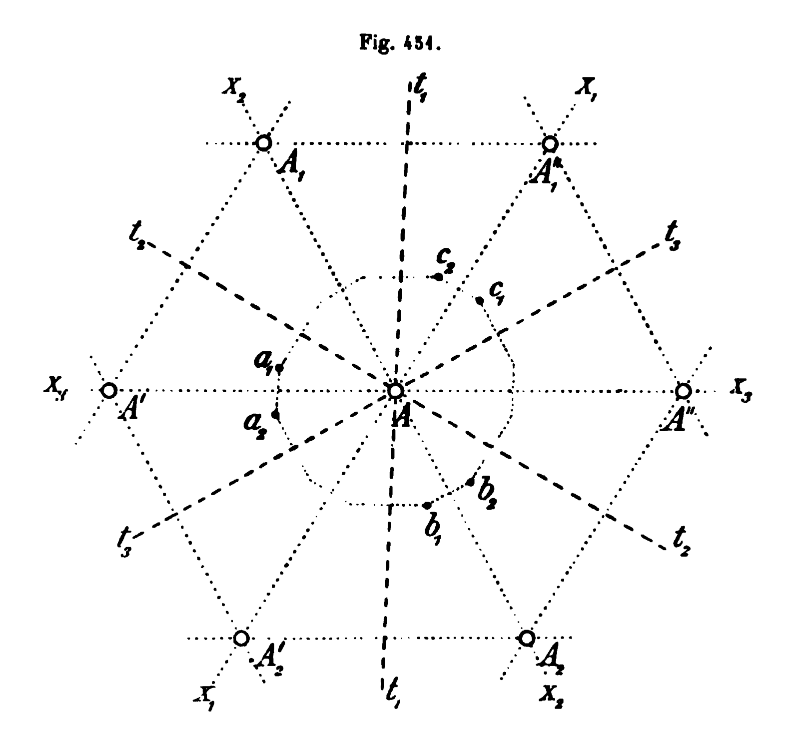


Fig. 451.

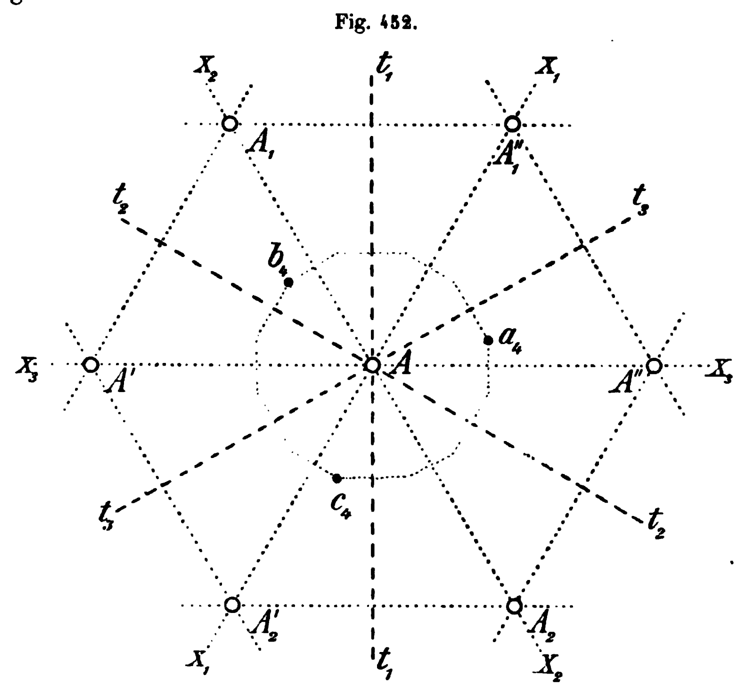


b) Die 6 analogen Punkte liegen nur auf einer Seite der Ebene des Punktnetzes, wie Fig. 451 zeigt. Die Harmonieelemente sind dann die 3 Harmonieebenen $x_1 z$, $x_2 z$, $x_3 z$ und die triharmonische Harmonierichtung zz.

Die **Hemiharmonie** ist **hemimorph**, da sowohl das Punktnetz als die Richtung zz zweiwertig ist.

c) Endlich bleiben nur 3 analoge Punkte a_4, b_4, c_4 auf einer Seite der Ebene des Punktnetzes übrig, siehe Fig. 452. Die Harmonieelemente bestehen bloß noch aus der einzigen triharmonischen Harmonierichtung zz.

Fig. 452.



Wir erhalten dadurch eine **Tetartoharmonie** des triharmonischen Punktnetzes, welche **hemimorph** ist, da Punktnetz und Richtung zz zweiwertig sind.

Weniger als 3 analoge Punkte sind nicht zulässig, wenn 3 Richtungen wie $x_1 x_1$, $x_2 x_2$, $x_3 x_3$ nahezu gleiche physikalische Bedeutung haben sollen, und somit sind die Harmonien in den tri- und hexaharmonischen Punktnetzen erledigt.

Die Harmonien in den hexaharmonischen Punktnetzen unterscheiden sich von denjenigen in den triharmonischen Netzen dadurch, daß bei den erstern entweder eine hexaharmonische Richtung (zz) nie fehlt, oder wenn sie triharmonisch wird, die Ebene des Punktnetzes einwertig, d. h. Harmonieebene wird; bei den andern ist eine hexaharmonische Richtung nie vorhanden, und nie ist das Punktnetz Harmonieebene.

§ 170. Harmonien in den drei- und viergliedrigen Raumgittern.

Diese Harmonien werden erhalten, wenn die Harmonien derjenigen Punktnetze, welche die Raumgitter bestimmen, zusammengebracht werden. Nun bestehen aber die drei- und viergliedrigen Raumgitter aus 3 diharmonischen oder aus 4 triharmonischen, oder endlich aus 6 monoharmonischen Punktnetzen, je nachdem die Raumgitter hexaedrisch, oktaedrisch oder dodekaedrisch sind. Im folgenden wollen wir nun die möglichen Harmonien aufbauen.

Betrachten wir zuerst das holoharmonische Punktnetz der Fig. 434. Sollen auch die beiden Punktnetze xxz und x_1x_1z holoharmonisch und diharmonisch sein, so werden sich darin die analogen Punkte, wie sie im Punktnetz xx_1 angeordnet sind, wiederholen. Man erhält dadurch $3 \times 16 = 48$ analoge Punkte, welche ein primitives Parallelopipedon des Raumgitters besitzen, und es entsteht im Raumgitter die Holoharmonie, die mit der Holoharmonie der Kristalle $(34)^s$ identisch ist.

Nun bemerken wir, daß die 3 diharmonischen Punktnetze des drei- und viergliedrigen Raumgitters stets einwertig sein müssen. Die möglichen Harmonien, welche hier anwendbar sind, werden also die in Fig. 440, 438, und 439 dargestellten sein und sie liefern

die gyroedrische Hemiharmonie (34),
die tetraedrische Hemiharmonie $(33)^s$,
die pentagonale Hemiharmonie $(33)^\sigma$ und
die tetraedrische Tetartoharmonie (33).

Keine andern Harmonien werden entstehen können; sie stimmen vollständig mit den 5 Harmonien der Kristalle überein, welche wir durch einen ganz andern Vorgang erhalten haben.

§ 171. Harmonien in den viergliedrigen Raumgittern.

Da diese Raumgitter aus 1 diharmonischen und aus 2 monoharmonischen Punktnetzen gebildet werden, so haben wir die denselben angehörenden Harmonien zusammen zu verbinden.

Zuerst bemerken wir, daß nur 7 verschiedene Harmonien bei den diharmonischen Punktnetzen möglich sind, nämlich diejenigen, welche in den Fig. 434, 435, 436, 437, 438, 439 und 440 konstatiert sind. Wir werden also wenigstens 7 verschiedene Harmonien in den viergliedrigen Raumgittern erhalten müssen; es läßt sich aber auch leicht beweisen, daß es nicht mehr als 7 geben kann.

Die Harmonie der Fig. 434 kann offenbar nur mit der Harmonie der Fig. 427 in Verbindung gebracht werden, denn beide Punktnetze xz und x_1z müssen holoharmonisch sein. Diese Verbindung bringt die Holoharmonie $(24)^s$ hervor. Es gibt in jedem primitiven Parallelopipedon 16 analoge Punkte.

Die gyroedrische Harmonie der Fig. 440 kann nur mit der Hemiharmonie der Fig. 430 in Zusammenhang gebracht werden. Die daraus entstehende Harmonie ist die gyroedrische Hemiharmonie (24).

Die Hemiharmonie der Fig. 436 verträgt sich nur mit der Hemiharmonie der Fig. 429; beide bestimmen daher 8 analoge Punkte in dem primitiven Parallelopipedon und bringen die pyramidale Hemiharmonie $(04)^{\sigma}$ hervor.

Die Hemiharmonie Fig. 438 läßt sich nur mit derjenigen der Fig. 428 resp. der Fig. 429 vereinigen. Also liegen in jedem primitiven Parallelopipedon 8 analoge Punkte, welche eine Hemiharmonie hervorrufen und zwar die mit $(42)^{s}$ bezeichnete sphenoidische.

Die Tetartoharmonie der Fig. 439 wird nur mit der in Fig. 428 resp. in Fig. 429 dargestellten Tetartoharmonie in Verbindung zu bringen sein. Man erhält dadurch nur 4 analoge Punkte in jedem primitiven Parallelopidedon: die daraus entstehende Tetartoharmonie stimmt mit der sphenoidischen (42) überein.

Es bleibt noch übrig die Fälle zu behandeln, in denen das diharmonische Punktnetz zweiwertig ist.

In Fig. 435 ist ein zweiwertiges diharmonisches Punktnetz dargestellt, da die analogen Punkte nur auf der einen Seite der Ebene des Punktnetzes liegen. Mit diesem Punktnetz läßt sich augenscheinlich nur das in Fig. 432 oder in Fig. 433 gezeigte Punktnetz in Verbindung bringen. Es liefert also nur eine Harmonie, welche mit der hemimorphen Hemiharmonie $(04)^{s}$ übereinstimmt. Dabei sind nur 8 analoge Punkte vorhanden, welche das primitive Parallelopipedon besetzen.

Endlich folgt die in Fig. 437 abgebildete Tetartoharmonie des diharmonischen Punktnetzes. Es läßt sich mit diesem Punktnetz nur das monoharmonische Punktnetz der Fig. 434 resp. der Fig. 435 in Verbindung bringen. Es bleiben also nur 4 analoge Punkte in jedem primitiven Parallelopipedon und die daraus entstehende Harmonie stimmt mit der hemimorphen Tetartoharmonie (04) überein.

§ 172. Harmonien in den dreigliedrigen Raumgittern.

Wir bauen die dreigliedrigen Raumgitter durch 1 triharmonisches und 3 monoharmonische Punktnetze, welche letztern auf den erstern einen Winkel bilden, der weit von 90° absteht.

Nun haben wir gesehen, daß es nur 5 verschiedene Harmonien in den triharmonischen Punktnetzen gibt. Wir haben also hier zu untersuchen wie sich die monoharmonischen Punktnetze mit denselben kombinieren lassen.

Die vollständige Harmonie des dreigliedrigen Punktnetzes ist in Fig. 446 gegeben, wo 12 analoge Punkte vorhanden sind. Wenn wir nun ein monoharmonisches Punktnetz damit kombinieren, so ist es vollständig dargestellt. Es sei dasjenige, welches durch $x_3 x_3$ und z bestimmt ist. Die 4 analogen Punkte a_1, a_2', a_4 und a_3' bestimmen offenbar das in Fig. 429 dargestellte hemiharmonische Netz. Und dasselbe sei von den übrigen monoharmischen Pnnktnetzen gesagt.

Also bestimmt das in Fig. 446 gegebene triharmonische Punktnetz eine einzige Harmonie des dreigliedrigen Raumgitters, es ist nämlich diejenige,

welche mit dem Symbol $(63)^s$ bezeichnet und Holoharmonie oder skalenoedrische Holoharmonie genannt worden ist.

Dasselbe läßt sich auch von der in Fig. 447 dargestellten Hemiharmonie sagen. Das durch x_3 und z gehende monoharmonische Punktnetz ist vollkommen bestimmt durch die 2 analogen Punkte a_2' und a_4 genau so, wie in Fig. 431 angegeben ist. Also auch diese Harmonie liefert eine einzige Harmonie des Raumgitters, nämlich die rhomboedrische Hemiharmonie mit dem Symbol (63).

Die Fig. 450 gibt wieder eine Hemiharmonie des Punktnetzes; darin sind 6 analoge Punkte vorhanden. Nun denke man sich durch $x_3 x_3$ und z ein monoharmonisches Punktnetz gelegt, dessen Harmonie durch die zwei analogen Punkte a_1 und a_2' gegeben ist und mit derjenigen der Fig. 434 resp. Fig. 435 übereinstimmt. Auf diese Art bekommt das primitive Parallepipedon 6 analoge Punkte, durch welche eine Harmonie bestimmt ist; wir haben sie bereits mit dem Namen gyroedrische Hemiharmonie belegt und mit dem Symbol (23) bezeichnet.

Die übrigen zwei Harmonien des triharmonischen Punktnetzes sind hemimorph.

In Fig. 451 stellen wir zuerst 6 analoge Punkte dar. Fassen wir nun wieder das monoharmonische durch $x_3 x_3$ und z gehende Punktnetz ins Auge, so finden wir seine Harmonie vollständig durch die 2 analogen Punkte a_1 und a_2 gegeben. Sie stimmt mit der in Fig. 436 gezeichneten überein. Daher sind im primitiven Parallelopipedon 6 analoge Punkte vorhanden, welche die hemimorphe Hemiharmonie $(03)^s$ bestimmen.

Endlich liegt in der Fig. 452 die niedrigste Harmonie vor, welche überhaupt in triharmonischen Punktnetzen möglich ist. Sie wird nur durch 3 analoge Punkte gegeben. Mit derselben verträgt sich nur ein monoharmonisches Punktnetz, wo kein Punkt mit einem andern analog ist, also wie in Fig. 436, worin aber der bezeichnete Punkt nur einen Punkt bedeutet. Diese Harmonie stimmt mit der hemimorphen Tetartoharmonie (03) überein.

§ 173. Harmonien in den sechsgliedrigen Raumgittern.

Um alle möglichen Harmonien herauszufinden, werden wir auch hier von den Harmonien des hexaharmonischen Punktnetzes ausgehen; auf dem letztern senkrecht oder nahezu senkrecht und nach demselben Sinn geneigt liegen 3 monoharmonische Punktnetze. Die Herausbildung dieser Harmonien geht aus demselben Prinzip hervor wie die Harmonien der vorhergehenden Raumgitter. Wir können daher unsere Erklärung auf wenige Worte beschränken.

Die möglichen Harmonien der hexaharmonischen Punktnetze sind in der Zahl von 7 in den Fig. 441, 442, 443, 444, 445, 448 und 449 schematisch dargestellt. Ebenso viele Harmonien werden in den sechsgliedrigen Raumgittern entstehen. Es wird sich also ausbilden aus:

Fig. 441 die Holoharmonie $(26)^s$

Fig. 442 die gyroedrische Hemiharmonie (26)

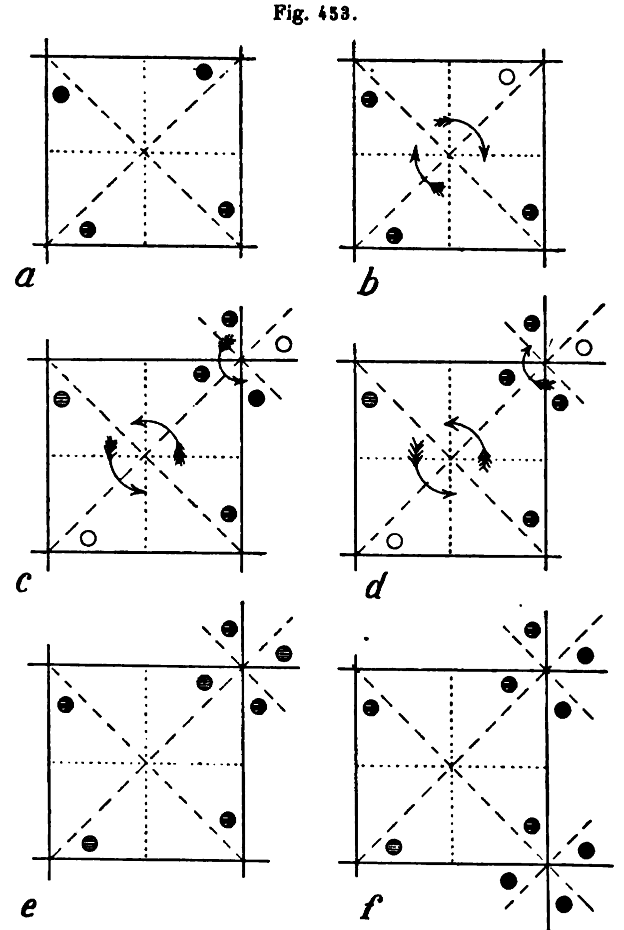
Fig. 444 die pyramidale Hemiharmonie $(06)^{\sigma}$
Fig. 448 die trigonotypische Hemiharmonie $(23)^{s}$
Fig. 449 die pyramidale Tetartoharmonie $(03)^{\sigma}$
Fig. 443 die hemimorphe Hemiharmonie $(06)^{s}$
Fig. 445 die hemimorphe Tetartoharmonie (06).

Damit haben wir die 24 Harmonien abgeschlossen.

§ 174. Die möglichen Strukturen.

Die 24 Harmonien bedeuten Gruppen von Strukturen oder Anordnungen der analogen Punkte, welche ein primitives Parallelopipedon besitzen kann. In jeder Harmonie läßt sich eine gewisse Anzahl von Anordnungen der analogen Punkte treffen, ohne daß die Harmonie ihre Gültigkeit verliert.

Fig. 453.



Wir wollen die Anordnungen von analogen Punkten bei einer gewissen Harmonie als Beispiel studieren und wählen zu diesem Zwecke die hemimorphe Tetartoharmonie (04) der viergliedrigen Raumgitter, wie sie in Fig. 437 beispielsweise angegeben ist.

Die Fig. 453a stellt schematisch eine solche Tetartoharmonie dar, worin die 4 analogen Punkte $a_2 a_4$, $b_2 b_4$ der Fig. 437 angedeutet sind, welche um die durch A gelegte diharmonische Achse harmonisch angeordnet sind. Es ist einleuchtend, daß wir dieselbe Harmonie erreichen werden, wenn die 4 analogen Punkte nicht in einer Ebene liegen. Legen wir zuerst die 4 Punkte in 4 verschiedene zum Punktnetz parallele Ebenen, welche gleich weit voneinander abstehen. Der unterste Punkt sei voll ausgezogen, der zweite nachfolgende sei doppelt

schraffiert, der dritte einfach schraffiert, endlich der vierte zuoberst gelegene sei durch ein Kreischen angegeben; diese Anordnung ist in Fig. 453b, Fig. 453c und Fig. 453d schematisch abgebildet. Bezeichnet man mit c_3 den normalen Abstand zwischen zwei parallelen nacheinander folgenden Punktnetzen, so wird der Abstand der oben genannten Ebenen voneinander um $\frac{c_3}{4}$ betragen müssen.

Man sieht, daß die drei Anordnungen der Figuren 453a, b, c, d dieselbe Harmonie hervorrufen, wie sie der hemimorphen Tetartoharmonie eigen ist.

Man kann auch je zwei analoge Punkte in einer zum Punktnetz parallelen Ebene anordnen, wie in Fig. 453e angegeben ist. Der Abstand der zwei Ebenen muß dann $\frac{c_3}{2}$ sein. Die in den Fig. 453b, 453c und 453d angegebenen Dispositionen der analogen Punkte können angedeutet werden durch eine Harmonieachse wie in Fig. 453a, verbunden mit einer elementaren Translation um $\frac{c_3}{4}$.

Man nennt eine solche Verbindung, nämlich eine diharmonische Achse oder Richtung mit einer Translation, eine diharmonische Schraubenachse, weil die 4 analogen Punkte nach einer Schraube aufsteigen; und zwar ist die Schraubenachse rechtsdrehend in Fig. 453b und linksdrehend in Fig. 453c. Zwei fernere Anordnungen werden getroffen, wenn die Schraubenachsen verschieden drehend sind. Dadurch entsteht die in der Fig. 453d dargestellte Struktur. Eine fernere Anordnung ist die der Fig. 453f. In jedem primitiven Parallelopipedon sind die analogen Punkte der Fig. 453f ebenso geordnet wie die der Fig. 453e, aber abwechselnd um $\frac{c_3}{2}$ verschieden. Auch die analogen Punkte der Fig. 453d sind ebenso geordnet wie diejenigen in Fig. 453c, aber von einem zum andern Parallelopipedon um die Translation $\frac{c_3}{2}$ verschieden. Dadurch ergeben sich Schraubenachsen, welche bald nach links bald nach rechts drehen, wie die Fig. 453d angibt.

Die 6 Strukturen Fig. 453a, b, c, d, e, f zeigen, daß sie derselben Harmonie im Raumgitter entsprechen; sie gehören also zu einer einzigen Gruppe, nämlich zu der Gruppe der hemimorphen Tetartoharmonie (04) der viergliedrigen Raumgitter. Und wir können uns sehr leicht überzeugen, daß nur 6 verschiedene Anordnungen für diese Gruppe möglich sind.

Wo immer Drehungsvermögen nachzuweisen sein werden, wie z. B. beim Quarz, Zinnober usw., wird man berechtigt sein anzunehmen, daß an die Stelle der Harmonieachsen, resp. Symmetrieachsen, Schraubenachsen treten und zwar nur nach einer Richtung drehende. Kein Drehungsvermögen wird gleichbedeutend sein entweder mit einer Harmonieachse bei der Struktur oder mit Schraubenachsen von verschiedenem Sinn.

Außer den Schraubenachsen kommen bei der Anordnung der analogen Punkte im Raumgitter auch Harmonieebenen verbunden mit einer Translation oder Gleitung vor; man nennt sie deshalb gleitende Harmonieebenen.

Sollen die verschiedenen Strukturen abgeleitet werden, welche zu einer Harmonie gehören, so treten an Stelle von Harmonieachsen Schraubenachsen

und an Stelle von Harmonieebenen gleitende Harmonieebenen. Die Schraubenachsen können mono-, di-, tri- und hexaharmonisch sein wie die Harmonieachsen.

Alle diese Anordnungen der analogen Punkte in dem Raumgitter haben aber für die Kristallographie mehr eine theoretische als eine praktische Bedeutung, da sie direkt durch die Erfahrung nicht gewonnen oder geprüft werden können. Was die Erfahrung zu geben vermag, sind die 24 Harmonien oder Gruppen von Strukturen; und die Theorie zeigt, wie viele analoge Punkte für jede Harmonie das primitive Parallelopipedon besetzen müssen.

Wir wollen daher auch nicht alle Strukturen entwickeln, sondern nur anführen, daß 156 verschiedene Strukturen in den homogenen Raumgittern möglich sind. Die folgende Tabelle gibt an, wie die 156 Strukturen bei den 24 Gruppen verteilt sind.

I. Drei- und viergliedrige Raumgitter:		
Holoharmonie $(34)^s$	10	36
Gyroedrische Hemiharmonie (34)	8	
Tetraedrische Hemiharmonie $(33)^s$	6	
Pentagonale Hemiharmonie $(33)^\sigma$	7	
Tetraedrische Tetartoharmonie (33)	5	
II. Viergliedrige Raumgitter:		
Holoharmonie $(24)^s$	20	68
Gyroedrische Hemiharmonie (24)	10	
Pyramidale Hemiharmonie $(04)^\sigma$	6	
Sphenoidische Hemiharmonie $(42)^s$	12	
Sphenoidische Tetartoharmonie (42)	2	
Hemimorphe Hemiharmonie $(04)^s$	12	
Hemimorphe Tetartoharmonie (04)	6	
III. Dreigliedrige Raumgitter:		
Skalenoedrische Holoharmonie $(63)^s$	6	25
Rhomboedrische Hemiharmonie (63)	2	
Gyroedrische Hemiharmonie (23)	7	
Hemimorphe Hemiharmonie $(03)^s$	6	
Hemimorphe Tetartoharmonie (03)	4	
IV. Sechsgliedrige Raumgitter:		
Holoharmonie $(26)^s$	4	27
Gyroedrische Hemiharmonie (26)	6	
Pyramidale Hemiharmonie $(06)^\sigma$	2	
Trigonale Hemiharmonie $(23)^s$	4	
Pyramidale Tetartoharmonie $(03)^\sigma$	1	
Hemimorphe Hemiharmonie $(06)^s$	4	
Hemimorphe Tetartoharmonie (06)	6	
Summe		156

Zu diesen 156 Punktanordnungen werden noch 74 hinzugesetzt, so daß also im Ganzen 230 Strukturen herauskommen. Allein der Unterschied, welchen man zwischen den 74 und den 156 Punktanordnungen macht, ist ein quantitativer und nicht ein qualitativer. Sie haben eine Berechtigung nur dann, wenn man die kleinen Differenzen in Rechnung zieht, die zwischen Harmonie und Symmetrie bestehen.

In jedem analogen Punkt muß man sich denken, daß eine physische und eine chemische Größe in demselben steckt. Die elektrische Eigenschaft der Kristalle scheint das Rätsel aufzudecken, welches zwischen analogen Punkten und physischen resp. chemischen Größen besteht. In diesem Sinne hat hauptsächlich J. Beckenkamp gearbeitet. Aus seiner letzten Arbeit wird sich eine Brücke schlagen lassen zwischen geometrischer und physikalischer Struktur der Kristalle.

§ 175. Struktur und Spaltbarkeit.

Die analogen Punkte in einem primitiven Parallelopipedon des Raumgitters können verschiedene Bedeutung haben. Sie können nämlich die Massenmittelpunkte von Atomen oder Molekülen darstellen, oder sie können die Mittelpunkte von Anziehungskräften bedeuten. Sie können auch sehr verschieden in einem Parallelopipedon angeordnet sein; und zwar können sie näher aneinander liegen, als von einem Parallelopipedon zum nächstliegenden, oder aber gleichmäßig von einem zum andern Parallelopipedon. Im ersten Fall wird eine Trennung des Kristalls leicht möglich sein zwischen zwei nächstliegenden Parallelopipeda, wo der Abstand zwischen den in verschiedenen Parallelopipeda liegenden analogen Punkten größer ist als zwischen den in denselben Parallelopipedon liegenden analogen Punkten. Wo dagegen die analogen Punkte gleichmäßig angeordnet sind zwischen den primitiven Parallelopipeda, wird die Trennung des Kristalls schwer ausfallen.

Wir sehen daraus, daß die Spaltungsflächen des Kristalls dort auftreten werden, wo zwei Bedingungen zur Geltung kommen, nämlich:

1. Spaltungsfläche, zugleich Punktnetze der möglich größten Dichtigkeit, verbunden mit
2. der Verschiedenheit der Anordnung der analogen Punkte senkrecht darauf.

Diese Bedingungen stimmen mit denjenigen überein, welche wir bei den Kohäsionsminima gefunden haben. Dort, § 9, S. 11, ist dargetan worden, daß für eine deutliche Spaltung zwei Bedingungen verlangt werden, nämlich:

1. möglichst kleines Kohäsionsminimum senkrecht zur Spaltungsfläche,
2. verbunden mit einem scharfen Kohäsionsminimum.

Die herrschenden Flächen des Kristalls, welche mit den Punktnetzen der größten Dichtigkeit zusammenfallen, dürfen also auch mit den Spaltungsflächen übereinstimmen.

Ein flaches Raumgitter stimmt mit einer prismatischen Entwicklung des Kristalls. Die Verschiedenheit der Anordnung der analogen Punkte in einem

solchen Gitter wird also am wahrscheinlichsten nach der größten Seite des primitiven Parallelopipedon ausfallen. Also stimmen in diesem Fall die Spaltungsflächen mit der prismatischen Ausbildung überein. Umgekehrt wird es sich herausstellen, wenn der Kristall tafelartig, d. h. das Raumgitter steil ist. Spaltung und innerer Bau des primitiven Parallelopipedon gehen Hand in Hand. Leider liegt bis jetzt keine Kontrolle vor, um diesen Zusammenhang direkt aufzufinden.

§ 176. Geschichtliches.

Wie schon in § 164 erwähnt worden ist, geht die Erforschung der Kristallstruktur auf Haüy zurück. Indem Haüy (Traité de Minéralogie, 1801) durch die regelmäßige Aneinanderlagerung der kleinsten Teile, »molécules intégrantes«, den Kristall aufbaute, gründete er streng genommen die physikalische Struktur der Kristalle. Bald ist die molécule intégrante durch die Spaltungsflächen gebildet, bald stellt sie eine geometrische Konzeption dar, wenn nämlich die Spaltungsflächen kein Parallelopipedon bilden; im letzten Fall ist der kleinste den Kristall bildende Teil die molécule soustractive.

Die folgenden Naturforscher nahmen für die Kristallmoleküle keine bestimmte Form an; sie betrachteten nur den Massenmittelpunkt der Moleküle. M. L. Frankenheim (1835—1842) diskutierte die Frage der Anordnung der Massenmittelpunkte der Moleküle nach einem Netzwerk oder Raumgitter. Er baute 15 Raumgitter, von denen jedoch 2 identisch sind. Nach Frankenheim kam A. Bravais, der ebenfalls die Massenmittelpunkte nach Raumgittern anordnete, von denen er 14 konstruierte. Bravais führte die Deckbewegung und die möglichen Symmetrieelemente ein (1848—1850—1851). Er erklärte die Hemiedrien (nach unsern Begriffen die Hemiharmonien) durch die Symmetrie der konstituierenden Einheiten oder Kristallmoleküle. Mit Hilfe der Raumgitter zeigte Bravais den Zusammenhang der rationalen Indizes mit der kristallinischen Homogenität usw. Einen bedeutenden Schritt in dieser Richtung machte Wiener (Die Grundzüge der Weltordnung, Leipzig 1869), er faßte das Prinzip der Homogenität im allgemeinen und erklärte die Regelmäßigkeit in der Anordnung der Atome dadurch, daß jedes Atom auf gleiche Art von den umgrenzenden Atomen umgeben wird.

Von diesem Prinzip Wieners ging die nachfolgende Entwickelung der Erforschung der Kristallstruktur aus. Zuerst bestimmte C. Jordan (Annali di matematica, Milano 1869) die geometrischen Bedingungen der homogenen Raumverteilung, dann aber wußte L. Sohncke (1876) die von Wiener angeregte und von Jordan rein theoretisch aufgefaßte Frage für die Verteilung der Punktsysteme zu benutzen. Er führte Schraubenbewegungen ein, wodurch er zu zwei einander durchdringenden kongruenten Raumgittern gelangte und so 65 verschiedene Systeme erhielt. Diese Systeme waren aber nicht vollständig, weshalb L. Wulff (Zeitschr. f. Kristallogr. 1888—89) darauf aufmerksam machte, daß die Symmetrie des Dioptas nicht in die 65 Punktsysteme Sohnckes hineinpasse. Ähnliche Bemerkungen wurden von F. Haag (Die regulären Kristallkörper,

Rottweil 1887) gemacht. Schon Sohncke hatte die spiegelbildliche Repetition für die Entwicklung der Punktsysteme eingeführt, um die übrigen Symmetrien herauszufinden, während nach Bravais das Molekül selbst die Eigenschaft der Symmetrie besitzt. Die von Sohncke angeregte Frage wurde später durch A. Schoenflies (Kristallsysteme und Kristallstruktur, Leipzig 1891) und E. v. Fedorow gelöst; beide kamen unabhängig voneinander zu 230 regelmäßigen Punktsystemen, in welchen sämtliche 32 Kristallsymmetrien inbegriffen sind. Zu diesen 230 Punktsystemen hätte man nicht gelangen können ohne die gleitenden Symmetrieebenen.

An die Theorie der Punktsysteme knüpfte dann L. Sohncke (1888) die Theorie der Spaltungsflächen und herrschenden Flächen.

Fedorow prüfte die Symmetrie endlicher starrer Figuren im allgemeinen; und indem er durch das Prinzip der Rationalität die Symmetrieachsen auf zwei-, drei-, vier- und sechszählige einschränkte, erhielt er die 32 Kristallklassen (1885—1888, 1890). Fedorow zeigte, daß der Raum ausgefüllt werden kann durch Paralleloeder oder durch Stereoeder.

Wird der Raum in verschiedene orientierte, identisch ähnliche, ebenflächige Stereoeder eingeteilt, so können letztere zu Gruppen vereinigt werden, und jede Gruppe ist wieder ein Paralleloeder. Die Paralleloeder bilden zusammen das Raumgitter, die Stereoeder aber die Symmetrien und die Strukturen. Daraus ergaben sich 230 Punktsysteme wie bei Schoenflies (1890—91—92).

W. Barlow (Zeitschr. f. Kristallogr. 1894, 1895) ging von den Strukturen geringerer Symmetrie aus und zu den komplizierten Symmetrien fortschreitend, entwickelte er zuerst die Sohnckeschen 65 Punktsysteme. Dann stellte er fest, daß diese 65 Punktsysteme andern homogenen Punktsystemen, welche denselben spiegelbildlich gleich sind, entsprechen. Durch Symmetriezentren, Symmetrieebenen und gleitende Symmetrieebenen erhielt er schließlich 165 verschiedene Punktsysteme, welche mit den Sohnckeschen 65 im Ganzen 230 bilden.

Lord Kelvin (1894—96) hat die Frage der Kristallstruktur auf das Raumgitter gestützt und ist zu dem »Tetrakaidekaeder« (Fedorows »Heptaparalleloeder«) als die zugehörige Zelle der homogenen Raumteilung gelangt.

Im Laufe der letzten 10 Jahre hat J. Beckenkamp eine Reihe von Untersuchungen ausgeführt, die auf die elektrische Bedeutung der Kristallstruktur hinweisen.

Für die Geschichte und Theorie der Frage sehe man die Arbeiten von

A. Schoenflies. Krystallsysteme und Krystallstruktur. Leipzig 1891.

P. v. Groth. Physik. Krystall. Leipzig 1895.

W. Barlow, G. F. H. Smith, H. A. Miers. The structure of Crystals. Glasgow 1901.

H. Baumhauer. Über den Ursprung und die gegenwärtigen Beziehungen der Kristallformen. Freiburg (Schweiz) 1901.

H. Hilton. Mathematical crystallography etc. Oxford 1903.

Ferner:

J. Beckenkamp. Verschiedene Aufsätze, welche in der Zeitschr. f. Krystallogr. erschienen sind.

Alphabetisches Namenverzeichnis
der in diesem Buche erwähnten Autoren.

(Die Zahlen bezeichnen die Seiten.)

Alphabetisches Sachverzeichnis.

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.



